Wiskundig actief

Het ondersteunen van onderzoekend leren in het wiskunde onderwijs

Petra Hendrikse

Netherlands Organisation for Scientific Research

Het onderzoek waarover wordt gerapporteerd in
dit proefschrift is gefinancieerd door de
Nederlandse Wetenschaps Organisatie
(dossier nummer 411-01-063)

ISBN: 978-90-365-2669-2

Print: Gildeprint Drukkerijen, Enschede

WISKUNDIG ACTIEF

HET ONDERSTEUNEN VAN ONDERZOEKEND LEREN IN HET WISKUNDE ONDERWIJS

PROEFSCHRIFT

ter verkrijging van
de graad van doctor aan de Universiteit Twente,
op gezag van de rector magnificus,
prof. dr. W.H.M. Zijm,
volgens het besluit van het College voor Promoties
in het openbaar te verdedigen
op donderdag 22 mei om 15.00 uur

door

Hendrika Petra Hendrikse
geboren op 25 september 1979
te Scherpenzeel

Dit proefschrift is goedgekeurd door de promotor:
Prof. dr. A.J.M. de Jong

en assistent-promotor:
Dr. H. van der Meij

Onderzoek alles, behoud het goede
(1 Tessalonisenzen 5:21, Nieuwe Bijbel Vertaling)

Voorwoord

Tijdens mijn promotieonderzoek mocht ik door middel van sport en cultuur alle indrukken en gedachten laten bezinken. Zo ging ik op de donderdagavond tijdenlang naar schildercursus. Even niet aan het onderzoek denken (waardoor volgens mij de beste ideeën de kans krijgen om te rijpen). Na een dag hard ploeteren op een tekst over abstraheren, zouden we een avond naar het werk van de docent van de cursus gaan kijken. Lekker even d'r helemaal uit, dacht ik..... Vervolgens werd ik getrakteerd op een uitleg hoe deze schilder iets in zijn omgeving uitkoos om het telkens opnieuw te schilderen, waarbij hij steeds verder abstraheerde. Met zijn schilderijen zocht hij naar de kern, het wezen van de dingen om hem heen. Schilders en wiskundigen, ze bleken zich (soms) met hetzelfde bezig te houden. Ze drukken zich alleen heel anders uit. Vandaar de voor- en achterkant van dit proefschrift. Een foto (1ste abstractie) van een bestaand kerkje in het prachtige Zwitserland, op één van de plekken die bij mij warme herinneringen oproepen, als basis voor een schilderij dat ik op de cursus heb gemaakt (2de abstractie). En daarna nog eens, maar nu verder geabstraheerd (3de abstractie). De omslag van het proefschrift sluit op deze manier aan bij de inhoud; een wiskundeopgave in een boek is als een foto van de werkelijkheid en de uiteindelijke wiskundige formule is als een abstract schilderij.

Daarmee was ik nog niet helemaal klaar met de omslag. Zoals u kunt zien, staat op de omslag alleen *mijn* naam. Ik vind dat dan, als ik het daarbij zou laten, te weinig recht gedaan wordt aan een groot aantal mensen. Een proefschrift schrijf je niet alleen! Laat ik proberen dit enigszins recht te zetten in dit voorwoord.

Zoals bij mij zo vaak, ook tijdens het schrijven en praten over het proefschrift, vraag ik me af waar ik mee zal beginnen. Laat ik maar beginnen met het noemen van die mensen die misschien wel het minst verwachten dat ze mij vooruit hebben geholpen: de mensen die in de afgelopen jaren mij hebben gevraagd om hen te helpen bij het studeren voor een wiskundetoets of een statistiek tentamen. Zij gaven mij de gelegenheid om te wroeten in de gedachten van mensen die even niet zagen hoe de wiskunde in elkaar steekt. Ze lieten mij zien waar de moeilijkheden zitten. Twee van hen wil ik in het bijzonder bedanken: Hans en Loes bedankt!

Natuurlijk heb ik in meer of mindere mate ook meegekeken bij al die leerlingen die deelnemer zijn geweest tijdens de verschillende onderzoeken. Ook deze leerlingen wil ik hartelijk danken. De docenten die hebben deelgenomen, ben ik zeer dankbaar. Voor vele van hen is deelname een tijdrovende bezigheid geweest. Ik dank u voor uw inzet, enthousiasme en tijd: dhr. Wanningen, dhr. Salemink, dhr. Reerink, dhr. Meerhof, mevr. Martens, dhr. van der Logt, dhr. te Lintelo, dhr. Koolenbrander, dhr. van 't Hof, dhr. Hesseling, dhr. de Haan, mevr. Groot Dengerink, mevr. Fokkens, dhr. Dekker, dhr. Boerkamp, dhr. Bakker en dhr. Alink.

Twee docenten wil ik speciaal vermelden. Ik dank hen voor hun grote betrokkenheid en hun kennis van het wiskundeonderwijs, die ze met mij gedeeld hebben. Cor van Zelst hartelijk bedankt voor de lessen die ik mocht bijwonen en onze interessante gesprekken. Ik denk er met veel plezier aan terug. Henri Ruizenaar hartelijk dank voor al je bijdragen; het meedenken bij de ontwikkeling, de lessen die je hebt gegeven, je bemoedigingen en het doorlezen en corrigeren van het hele manuscript. Ik dank ook je vriendin voor het corrigeren van het Nederlands binnen de opdrachten in SimQuest. Henri, je hebt me het van jouw hand komende wonderlijke boek over een jacht op een snark gegeven. Je krijgt er van mij een boekje over mijn jacht naar verbetering van het wiskundeonderwijs voor terug. Het is mij, in tegenstelling tot jou, niet gelukt om mijn boek door een bekend illustrator van illustraties te laten voorzien.

Al deze docenten zijn verbonden aan scholen. Scholen die in meer of mindere mate ook bijgedragen hebben aan de mogelijkheid om mijn onderzoek daar uit te voeren. Dank aan: Stedelijk

Lyceum Enschede afdeling Kottenpark (Enschede), Bonhoeffercollege afdeling van der Waalslaan (Enschede), Twickelcollege (Hengelo), Twents Carmel College afdeling de Thij (Oldenzaal), Stedelijk Daltoncollege (Zutphen), Ulenhofcollege (Doetinchem), Rietveldlyceum (Doetinchem), Corderiuscollege (Amersfoort), Openbare Scholengemeenschap Sevenwolden (Heereveen), Schoonhovenscollege (Schoonhoven), Oranje Nassau College (Zoetermeer) en Thorbecke Voortgezet Onderwijs (Rotterdam).

Dank ook aan de mensen, collega's en student-assistenten, die deze scholen tijdens het onderzoek hebben bezocht en hebben geholpen met het nakijken van de verschillende toetsen.

Aan mijn collega's heb ik veel meer te danken dan dat ze bereid waren om me bij te staan bij de praktische kant van het onderzoek. Dank aan al mijn mede-AIO's en ook aan de overige collega's van de afdeling die een bijdrage hebben geleverd. Larisa, dank voor je hand- en spandiensten en al die kopieën die je hebt gemaakt. Dank ook aan de programmeurs en computerexperts. Toen ik met SimQuest bezig was, groeide de lijst met wensen en verbeteringen snel. Dank dat jullie me toch nog hebben laten doorgaan. Computerproblemen zijn altijd vervelend en mijn ervaring is dat ze vaak ook onverklaarbaar zijn. Dank aan de mensen die mij in die gevallen zo goed als mogelijk geholpen hebben (jullie konden er ook niets aan doen dat die computers zo hun eigen gang gaan af en toe). Daarbij denk ik ook aan de systeembeheerders op de diverse scholen. Tot slot wil ik de collega's van het instituut ELAN, in het bijzonder Cees Terlouw, bedanken.

Mijn beide begeleiders wil ik uiteraard ook hartelijk bedanken. Hans en Ton, ik heb het jullie niet gemakkelijk gemaakt. Maar we zijn er gekomen, het boekje ligt er nu. Er is mij geleerd dat er niets groeit en bloeit zonder dat er af een toe een buitje valt. Tijdens zo'n bui zei mijn moeder eens tegen mij: "wat zullen jullie uiteindelijk trots zijn als het af is". Ik hoop dat dit inderdaad het geval is. Ton, ik dank je voor de kans die je me gaf om dit onderzoek uit te voeren, voor de ruimte die je me gaf om daarin mijn eigen weg in te slaan en voor je hulp bij het afronden van het proefschrift. Hans, bedankt voor je geloof in mijn kunnen. Bedankt voor de tijd die je nam om te luisteren naar mijn ideeën, twijfels en gedachten. Je hebt me vaak enorm geholpen door slechts te luisteren. Dank je voor het helpen vinden van woorden en structuren om die woorden in te gieten.

Niet alleen is er af en toe een bui nodig om te groeien en te bloeien, ook een goede ondergrond waarin je kunt wortelen en waaruit je voeding kunt halen, is onmisbaar. Ik heb mijzelf enorm gezegend gevoeld met de ondergrond die ik had. Mijn familie ben ik erg dankbaar voor hun onvoorwaardelijke steun en liefde. Mama, Papa, Dineke, Corine, Anne, Kees en Hans jullie zijn onmisbaar voor mij. Pieter en Bart, ook jullie horen erbij en wil ik bedanken. Ik dank de familie Boxhoorn dat ik bij hen thuis over de vloer mocht komen en daar de nodige afleiding vond. Nynke, Willeke, Arian en Janika ik hoop dat jullie zo vol verwondering over alles om jullie heen zullen blijven en zo gretig zullen blijven leren. Blijf vooral de planten in de tuin water geven zonder je er iets van aan te trekken dat het regent, omdat je het nu eenmaal leuk vindt om te doen. Tante Anneke, bedankt voor de stille steun op de achtergrond. Niet echt familie, maar toch wil ik mijn 'mama in Enschede' bedanken. Ank, hartelijk dank dat je er voor me was. Dank voor je luisterende oor, advies en steun.

Steven dank je voor de lunchwandelingen. Jij en Saron bedankt voor de ontspannende avonden; ik kan nu in ieder geval de eerste uitbreidingen van de kolonisten van Catan aan. Steven, ik ben je enorm dankbaar dat je ondanks de drukte van het starten van een eigen bedrijf op die cruciale momenten daar was (ik denk in het bijzonder aan een kop thee in het theatercafé en een lunch in de mensa).

Ruth, Diana, Miranda, Rianne, Anneke, Celia, Jitka, Joost, Cornelise en al die anderen. Bedankt voor jullie mails, telefoontjes, bezoekjes, brieven, kaartjes en steun. Ze zijn en waren ontzettend belangrijk voor mij. Ik wil ook de mensen bedanken die ik soms zomaar overviel met mijn zorgen en twijfels. Dank aan al diegenen die mij met wijsheid en goede raad hebben bijgestaan: Bram Nauta, Jet Weigand, Jan Hoogland en Diederick Eikelboom. Ik ben erg dankbaar dat mijn afstudeerbegeleider ook na mijn afstuderen een begeleidende rol is blijven spelen. Anne-Johan

Annema, ondanks dat je volgens je eigen AIO's te druk was om te spreken te krijgen, dank ik je dat ik blijkbaar altijd 'toevallig' langs kwam op die momenten dat je wel over redelijk wat tijd beschikte om mij te woord te staan.

Tot slot heb ik me ook altijd geworteld geweten in mijn Vader en Schepper. Ik dank God voor de bodem, regen en zonneschijn die Hij mij gaf en voor de rust, kracht, bemoediging en vertrouwen die ik uit Zijn hand heb mogen ontvangen. Ook in mijn hart leeft het volgende gebed van Johann Kepler (Duits astronoom en wiskunde leraar, 1571-1630):

"Ik dank U, o, mijn Schepper en mijn Here, dat Gij mij zulk een grote vreugde gegeven hebt in Uw schepping, zulk een ware verrukking over de werken Uwer handen. Ik heb de glorie van Uw werken bekend mogen maken aan de mensen, voorzover althans mijn eindige geest in staat was Uw oneindigheid te bevatten. Als ik dingen aan de mensen heb geleerd, die Uwer grootheid onwaardig waren of als ik mijn eigen eer heb nagestreefd, vergeef mij dat in Uw goddelijke genade. Amen"

Nog een opmerking tot slot over de inhoud. Hoe is die tot stand gekomen? Hoe kunnen wij kennen? Hoe komen we tot nieuwe kennis? Hoe leren wij? Ik heb nogal eens het gevoel gehad dat het 'te vroeg' was om dingen op te schrijven; ik ben er op zoveel punten nog lang niet uit en ik heb nog veel vragen. Een voorbeeld hiervan is een gedachte naar aanleiding van voorgaande vragen. Volgens Pascal zijn er drie dingen die samenwerken bij het verkrijgen van onze kennis: de ervaring, het verstand en het hart [1]. Pascal schrijft in pensée nummer 110 [2]:

> We kennen de waarheid niet alleen met het verstand, maar ook met het hart. Het is op die laatste manier dat we de eerste beginselen onderkennen, en het argumenterende verstand, dat daar geen deel aan heeft, probeert die vergeefs aan te vechten. De sceptici, die geen ander doel hebben dan dat, spannen zich er vergeefs voor in. Wij weten dat we niet dromen. Hoe onmogelijk het voor ons ook is dit verstandelijk te bewijzen, deze onmacht bewijst niets anders dan de zwakte van ons verstand, en niet de onbetrouwbaarheid van al onze kennis, zoals zíj beweren. Want de kennis van de eerste beginselen: ruimte, tijd, beweging, getallen, is even stellig als welke kennis ook die onze redeneringen ons opleveren, en het is op deze kennis, van het hart en het instinct, dat het verstand moet steunen en zijn betoog moet funderen. Het hart voelt dat de ruimte drie dimensies heeft en dat het aantal getallen oneindig is, en het verstand toont vervolgens aan dat er geen twee kwadraten zijn waarvan het ene het dubbele is van het andere. De beginselen worden aangevoeld, stellingen bewezen en dat alles met zekerheid, zij het langs verschillende wegen. En het is even nutteloos en belachelijk dat het verstand, alvorens er mee te willen instemmen, het hart om bewijzen voor zijn eerste beginselen vraagt, als het belachelijk zou zijn dat het hart het verstand een intuïtie zou vragen van alle stellingen die het aantoont alvorens ze te willen aanvaarden.
>
> Deze onmacht moet dus slechts tot doel hebben het verstand, dat over alles zou willen oordelen, een toontje lager te laten zingen, maar niet om onze zekerheid aan te vechten. Alsof alleen het verstand in staat was ons te onderrichten! God mocht geven dat we het in tegendeel nooit nodig hadden en alles met ons instinct en gevoel wisten, maar de natuur heeft ons deze gave ontzegd. Ze heeft ons in tegendeel maar zeer weinig van dit soort kennis gegeven; alle andere kan alleen door het verstand worden verworven. …

Tijdens mijn onderzoek heb ik vooral naar de rol van de ervaring en het verstand gekeken, met slechts sporadisch aandacht voor de rol van het hart. Is dit terecht [3]? Dit proefschrift is misschien te typeren als een verslaglegging van een zoektocht. Eentje die nog niet ten einde is.

Petra Hendrikse (Enschede, april 2008)

---

[1] Van den Beukel, A. (1994). *Met andere ogen: Over wetenschap en het zoeken naar zin* (2e dr.). Baarn: Ten Have.

[2] Pascal, B. (1997). *Gedachten* (F. de Graaf, Trans.). Amsterdam: Boom.

[3] Zie onder andere:

Barth, H., La Mont, K., Lipton, J., & Spelke, E. S. (2005). Abstract number and arithmetic in preschool children. *Proceedings of the National Academy of Sciences, 102*, 14116-14121.

Dehaene, S. (1998). *The Number Sense: How the Mind Creates Mathematics* (2nd ed.). London: The Penguin Press.

Inhoudsopgave

Deel 1

Deel 2

Deel 3

Deel 4

Bijlagen

Deel 1

Theorie

1 Inleiding

"Het Nederlandse onderwijs en het Nederlandse voetbalelftal hebben in ieder geval twee dingen met elkaar gemeen. Iedereen in Nederland heeft er een mening over en als je de kranten moet geloven, deugt er niets van." [1]

Tijdens het uitvoeren van het in dit proefschrift beschreven onderzoek verschenen geregeld krantenartikelen over het wiskundeonderwijs. Zo berichtte de Trouw (Ten Haaft, 2006) over bèta-onderwijzers die het zogeheten realistisch wiskundeonderwijs als een belangrijke oorzaak van de gebrekkige wiskundekennis van eerstejaarsstudenten noemden. Ook wordt in de krant regelmatig aandacht besteed aan het nieuwe leren. De Volkskrant citeert op 16-05-07 uit het jaarverslag van de inspectie van onderwijs:

> 'Het onderwijs in Nederland kampt met ernstige en hardnekkige problemen. Veel scholieren leren onvoldoende rekenen, lezen en schrijven, de helft van de scholen voor speciaal onderwijs is onder verscherpt toezicht geplaatst, en nog altijd vallen te veel jongeren uit zonder een diploma.'

De kranten berichtten ook over ingangstoetsen over wiskunde op verschillende universiteiten. Op Pabo's mochten studenten op grond van hun gebrekkige wiskundekennis de opleiding niet vervolgen. De teneur in de kranten is regelmatig negatief.

De kritiek komt niet alleen uit kranten, maar bijvoorbeeld ook uit de hoek van het hoger onderwijs. Een door het ministerie van OC&W samengestelde resonansgroep schrijft in hun standpunt met betrekking tot concept-syllabi (Resonansgroep wiskunde, 2007):

> 'De aansluitingsproblemen op het gebied van de wiskunde die zich thans in vrijwel alle sectoren van het hoger onderwijs voordoen, kunnen kort gekarakteriseerd worden als een gebrek aan reken- en formulevaardigheid. Het meest nijpend zijn deze problemen in de technische en de exacte studierichtingen, maar ook bijvoorbeeld bij de universitaire studierichtingen economie (jaarlijks duizenden eerstejaarsstudenten) is de aansluitingsproblematiek groot. In al deze studierichtingen op hbo en universiteit wordt namelijk zowel bij de wiskundige steunvakken als bij de toepassingen van de wiskunde in het hoofdvak een beroep gedaan op een aanzienlijke mate van formulevaardigheid en kennis van elementaire functies en hun eigenschappen. Die vaardigheid is bij de huidige generatie studenten afwezig of onvoldoende ontwikkeld. Dit probleem wordt inmiddels in vrijwel alle universiteiten en hogescholen gesignaleerd. Bijspijkercursussen waarin de ontbrekende havo- en vwo-kennis in hoog tempo alsnog behandeld wordt, zijn hiervan het gevolg.'

Tempelaar (2007) concretiseert de kritiek in een artikel in het tijdschrift Nieuw archief voor wiskunde, een uitgave van het Koninklijk Wiskundig Genootschap. De auteur is docent wiskunde en statistiek bij de economische richting aan de Universiteit Maastricht. Hij stelt dat het rendement van het wiskundeonderwijs in de Tweede Fase onvoldoende is. In het artikel worden de wiskundescores van Nederlandse studenten met Duitse studenten vergeleken over de jaren heen. Nederlandse studenten gaan het relatief steeds slechter doen. De auteur noemt als belangrijke oorzaken de invoering van het realistische wiskundeonderwijs en de Tweede Fase.

De mening van Tempelaar en de resonansgroep lijkt door velen in het hoger onderwijs en wetenschappelijk onderwijs te worden gedeeld. Een evaluatierapport van het Tweede Fase Adviespunt schrijft over de mening van het hoger onderwijs en het wetenschappelijk onderwijs (Tweede Fase Adviespunt - ministerie Van Onderwijs Cultuur en Wetenschap, 2005, p. 103):

> 'Opleiders in hbo en wo zijn overwegend positief tot zeer positief over de beheersing van de *algemene* vaardigheden door de 1e jaars en oordelen neutraal over de *algemene* kennis. Opleiders uit het wo zijn positiever over de beheersing van de algemene vaardigheden dan die uit het hbo. Deze geluiden zijn niet waar te nemen met betrekking tot de *vakspecifieke* kennis en vaardigheden. Veel opleiders in het hbo menen dat hun 1e jaars van het studiejaar 2003-2004 op beide terreinen matig geëquipeerd zijn. De sector Techniek spant daarin de kroon: 59% van de opleiders vindt het kennisniveau waarmee de studenten

[1] Uitspraak van één van de sprekers tijdens het afscheidscolloquium van dr. C. Terlouw (Enschede, 26-09-2007).

> binnenkomen onvoldoende en 48% van hen vindt dat de vaardigheden te kort schieten. Over de beheersing van de algemene vaardigheden zijn beide sectoren overigens wel positief.
> In het wo heeft men een zelfde – maar versterkt – beeld van het niveau van de 1e jaars van het vorig jaar. Net als in het hbo spreekt men zich overwegend kritisch uit over de *vakspecifieke* kennis en vaardigheden van hun 1e jaars uit de Tweede Fase. En ook in het wo is de sector Techniek vakinhoudelijk het meest somber: 74% vindt noodzakelijke kennis ontbreken en 68% vindt de vakgebonden vaardigheden onvoldoende verworven.'

Ook naar mening van de studenten zelf is hun vakinhoudelijke kennis minder, blijkens hetzelfde rapport (p.106):

> 'In de rapportage wordt gesteld dat deze conclusie voor alle drie de ondervraagde groepen nieuwe stijlers geldt (instroom 2001-2002 t/m 2003-2004): zij zijn tevredener dan de bevraagde oude stijlers (het cohort 2000-2001) over de aansluiting met betrekking tot vaardigheden en minder tevreden over de vakinhoudelijke aansluiting.'

Algemene vaardigheden en vakspecifieke kennis en vaardigheden worden in het citaat uit het evaluatierapport afzonderlijk bekeken. De algemene vaardigheden lijken beter te zijn geworden na invoering van de Tweede Fase. Dit was dan ook één van de doelen van de invoering. De vakinhoudelijke kennis en vaardigheden komen niet goed uit de evaluatie tevoorschijn. Een veelgenoemde reden is dat er een toename van vakken is geweest bij de invoering van de Tweede Fase, waardoor minder tijd is overgebleven voor de reeds bestaande vakken. Maar er worden ook andere redenen genoemd zoals de invoering van de Grafische Rekenmachine (GR) en het realistisch rekenonderwijs (Tempelaar, 2007; Ten Haaft, 2006). Uit het citaat van de resonansgroep komt naar voren dat leerlingen te kort komen op abstractere gebieden als formulevaardigheid en kennis van elementaire functies en hun eigenschappen. Was voor invoering van het realistische rekenonderwijs de kritiek dat leerlingen hun abstracte kennis niet konden toepassen en dat leerlingen niet altijd de relevantie van het geleerde zagen, nu is de kritiek dat leerlingen de abstracte kennis en vaardigheden grotendeels missen. Eén van de voorstellen van de resonansgroep is om de rol van contexten te heroverwegen. Omdat de huidige generatie studenten bepaalde vaardigheden mist (zoals het herleiden van veeltermige breuken en het kunnen werken met formules), is een ander voorstel van de resonansgroep herbezinning op de rol van de GR en de formulekaart in het onderwijs.

Is de kritiek op het wiskundeonderwijs terecht? En zo ja, hoe zou het onderwijs verbeterd kunnen worden? Met dit onderzoek hopen we een (bescheiden) bijdrage aan de beantwoording van vooral het laatste vraagstuk te leveren. Het uitgangspunt was en is 'zelfs al is het onderwijs goed, het kan wellicht nog beter'. In het onderzoek hebben we bestudeerd of nieuw lesmateriaal bijdraagt aan de verbetering van het huidige onderwijs. We hebben dit gedaan voor een specifieke onderwijssituatie, namelijk de vierde klas van het Voorbereidend Wetenschappelijk Onderwijs. Bij de ontwikkeling en implementatie van het lesmateriaal hebben we getracht de juiste balans te vinden tussen toepassing en abstractie en tussen vakinhoudelijke kennis en vakinhoudelijke vaardigheden.

De ontwikkeling is in nauwe samenwerking met docenten uit de praktijk gebeurd. De implementatie is in authentieke[2] klassensituaties onderzocht. Dit heeft als gevolg dat zowel de theorie als de praktijk invloed heeft gehad op ontwerpkeuzes. Tijdens dit onderzoek zijn ook enkele mogelijke oorzaken van suboptimaal onderwijs aan het licht gekomen, die we in dit proefschrift op verschillende plaatsen kort aanstippen.

Het ontwikkelde materiaal past in de traditie van de op dit moment heersende theorieën, filosofieën en ideeën, als het constructivisme, actief leren, betekenisvol leren en het gebruik van ICT.

Het huidige streven in het onderwijs is dat leerlingen actief betekenisvol leren. In dit proefschrift zal dan ook worden nagegaan in hoeverre het ontwikkelde materiaal bijdraagt aan dit

[2] In de dagelijkse praktijk van wiskundelessen op de school zelf.

streven. Voordat we dit kunnen bepalen, brengen we eerst in kaart wat actief betekenisvol leren concreet inhoudt en welke voordelen met deze manier van leren te behalen zijn. Deze didactisch inhoudelijke vragen zijn belangrijke peilers in dit proefschrift. Het leerproces krijgt veel aandacht. Welk soort activiteit streven we na? Welk soort betekenisvolheid willen we bereiken? Wat doen leerlingen precies, wat is de rol van het materiaal en de docent daarin? Wat voor invloed hebben aanpassingen die we doen op dit leerproces? Wat is de beproefde effectiviteit van het nieuw ontwikkelde materiaal?

Bij het zoeken naar oplossingen voor het bevorderen van het actief betekenisvol leren wordt een relatief ‘nieuw’ medium, namelijk de computer, veelvuldig genoemd. Dit medium biedt wellicht mogelijkheden die er tot dusverre nog niet waren. De veronderstelling in dit onderzoek was dat ICT in de vorm van computersimulaties wellicht een vooraanstaande rol zou kunnen spelen bij actief betekenisvol leren. Wiskundesimulaties geven de leerlingen de gelegenheid om interactief en dynamisch de kenmerken van wiskundige formules en begrippen te ontdekken, zo was de redenering. Het nieuwe materiaal is dan ook in een ICT omgeving gemaakt.

De vragen over het ontwikkelde lesmateriaal zijn over het algemeen niet van technische aard. Het ging ons om de functionele invulling van het materiaal in de ICT omgeving. De inhoud van de opdrachten, de feedback en de omgang van leerlingen (en docenten) met het materiaal, krijgen om die reden in dit proefschrift dan ook veel aandacht. Ook onze uiteindelijke bevindingen en conclusies zijn met name van inhoudelijke en didactische aard.

Kortom de centrale vraagstelling in dit onderzoek is hoe kan de didactiek waarbij leerlingen interactief met dynamisch materiaal wiskundige formules onderzoeken, bijdragen aan goed wiskundeonderwijs? Dit omhelst de volgende vragen: (1) wat zou de didactiek moeten zijn (en daarmee de inhoud van het materiaal moeten zijn) en (2) hoe moet de implementatie, met behulp van computersimulaties, eruit zien?

In hoofdstuk 2 van dit eerste deel van dit proefschrift gaan we na wat de doelen van het wiskundeonderwijs zijn. In hoofdstuk 3 werken we een aantal gangbare vormen van didactiek verder uit. In hoofdstuk 4 gaan we na in hoeverre het leerboek de beoogde doelen ondersteunt en op welke punten (nog nauwelijks door het boek ondersteunde doelen) nieuw te ontwikkelen materiaal zich zou kunnen toespitsen. Aan het einde van deel 1 zullen we onze vraagstelling preciezer formuleren.

In deel 2 beschrijven we vervolgens het ontwikkelingsonderzoek. In dit deel besteden we aandacht aan de inhoud van de opdrachten en de manier waarop leerlingen met het materiaal omgaan. Bovendien gaan we in op wat docenten aan ondersteuning nodig hebben om het materiaal in hun les te kunnen gebruiken.

In deel 3 beschrijven we een grootschalig onderzoek. Het ontwikkelde materiaal is op veel scholen gebruikt. We hebben in één klas een dieptestudie uitgevoerd, waardoor we ook gegevens hebben verkregen over de leerprocessen. In tegenstelling tot deel 2 worden deze gegevens echter niet kwalitatief tot op het niveau van de individuele leerling die met het materiaal werkt besproken. De uiteindelijke leerresultaten (wat betreft kennis) zijn gemeten en vergeleken met de leerresultaten van klassen die niet met het ontwikkelde materiaal gewerkt hebben.

Tot slot geven we een samenvatting in deel 4. In dit deel geven we ook onze conclusie en bediscussiëren we de resultaten.

2 Doelen van het wiskundeonderwijs

In dit onderzoek kijken we naar de inzet van interactieve computerprogramma's in het wiskunde onderwijs. Meer specifiek zijn we geïnteresseerd in de vraag in hoeverre deze inzet kan bijdragen aan de realisatie van de doelen van dat onderwijs. In dit hoofdstuk beschrijven we deze doelen waarbij we ons in eerste instantie richten op de bovenbouw van het VWO. We bespreken eerst de algemene doelen van de Tweede Fase. Deze hebben betrekking op de samenhang tussen vakken en zelfstandigheid van leerlingen. Daarna bespreken we de meer specifieke, vakinhoudelijke eindtermen. Hier en daar gaan we in deze besprekingen alvast in op de doelen voor de leerlingen van 4 VWO, de doelgroep van dit onderzoek. We sluiten het hoofdstuk af met een overzicht van complexe algemene vaardigheden, toegepast op het vakgebied.

2.1 Doelstellingen van de Tweede Fase: samenhang tussen vakken en zelfstandigheid

In 1998 werd de zogenaamde Tweede Fase ingevoerd in de bovenbouw van het VWO als vervolg op de Basisvorming. De belangrijkste doelen van dit plan zijn samen te vatten als een streven naar samenhang tussen vakken en de bevordering van zelfstandigheid van de leerlingen (zie figuur 2.1).

Wat is het doel van de Tweede Fase?

In de bovenbouw van havo en vwo ligt steeds meer nadruk op een brede algemene vorming en samenhang tussen verschillende vakken. En net als in de Basisvorming zijn de vakinhouden in de bovenbouw vernieuwd. Een tweede doel van de vernieuwde Tweede Fase is een zelfstandiger manier van werken en studeren die beter aansluit bij de werkwijze in het hoger onderwijs. De overstap naar een vervolgopleiding zal daardoor makkelijker worden, en leerlingen zullen minder snel afhaken in het hoger onderwijs.

(Ministerie Van Onderwijs Cultuur en Wetenschap, 1999)

Figuur 2.1 *Doel van de Tweede Fase volgens het ministerie van OC&W*

Samenhang tussen de vakken

Een leidende gedachte achter het streven naar samenhang tussen de vakken is gelegen in het feit dat vakken soms een beroep doen op beschikbare kennis uit andere vakken. Het is voor de natuurkundedocent bijvoorbeeld wenselijk dat de leerlingen het onderwerp differentiëren hebben gehad voordat hij het onderwerp 'verplaatsing en snelheid' behandelt in zijn les.

Problemen in de onderlinge afstemming tussen vakken kunnen zich op verschillende manieren voordoen. Het kan voorkomen dat leerlingen (nog) niet beschikken over de vereiste kennis. In zo'n situatie moet de leerling tegelijkertijd de inhoud van twee (of meer) vakken leren. Een ander probleem bij de realisatie van samenhang tussen vakken kan zich voordoen als leerlingen de gewenste kennis nog onvoldoende beheersen. In zo'n situatie kan het leerlingen teveel inspanning kosten om een oplossing te vinden. Soms ook slagen de leerlingen er niet in de vertaalslag te maken naar een ander vakgebied. In het ideale geval kan een docent in zijn les dan naar, bijvoorbeeld, de wiskundeles verwijzen en de leerlingen helpen te herkennen dat zij de daar opgedane kennis ook in de natuurkunde kunnen gebruiken.

Eenvoudige oplossingen voor deze problemen zijn er niet. Want welke vakdocent legt het verband tussen vakken? In hoeverre is het zelfs wenselijk en haalbaar om wiskunde te integreren in andere vakken of andere vakken te integreren in de wiskundeles? Over deze kwesties worden uitgebreide discussies gevoerd. In dit proefschrift bespreken we deze problematiek echter niet.

Een manier om de samenhang tussen vakken in elk geval formeel te realiseren, is gevonden in het opstellen van profielen in de bovenbouw van het VWO (en de HAVO). In profielen worden een aantal vakken uit het VWO geclusterd. De idee was dat hiermee ook een aanzet werd gegeven om in het VWO de verschillende vakken in elk profiel meer in hun onderlinge samenhang te realiseren.

Een ander achterliggend motief naar het streven van samenhang tussen vakken is de afstemming op de werkelijkheid. In dit verband is een onderscheid te maken tussen de werkelijkheid nu en later. Er wordt regelmatig geschermd met de gedachte dat wiskunde vooral bedoeld is voor 'later'. Om dit argument kracht bij te zetten wordt bijvoorbeeld verwezen naar architecten die wiskunde nodig hebben bij het berekenen van oppervlakten of een stabiliteitsberekening van een balkon of overhangend gedeelte.

Dit 'later'- perspectief negeert echter de wenselijkheid of misschien wel de noodzaak om wiskunde ook in samenhang te brengen met de huidige werkelijkheid voor de leerlingen. Wiskunde zou niet alleen iets moeten zijn voor op school of later. Wiskunde zou zeker ook iets van de leerling zelf moeten zijn. Iets waarin de leerling 'in zijn eigen tijd' ook het nut van inziet. Om deze samenhang te realiseren wordt tegenwoordig veel gewerkt met authentieke taken en contexten (Drijvers, 2006).

Het is echter lastig om een context te kiezen die aansluit bij de belevingswereld van tieners en waaruit het belang van de wiskunde blijkt. Een vaak gemaakte opmerking is bijvoorbeeld dat contextrijke opdrachten gekunsteld zijn, de werkelijkheid (te) sterk vereenvoudigen en daardoor niet overeenkomen met de manier waarop leerlingen in het dagelijks leven tegen deze context aankijken. In het proefschrift komen we o.a. in hoofdstuk 4 van dit deel op de kwestie van authentieke taken en contexten terug.

De profielen spelen een duidelijke rol in dit streven naar samenhang met als uiteindelijk doel afstemming op de werkelijkheid. De clustering in profielen beoogt ervoor te zorgen dat leerlingen toegerust zijn met die vakken die nodig zijn voor hun toekomst (beroep of verdere studie). We bespreken de profielen in detail in paragraaf 2.2.

Zelfstandigheid

Zelfstandigheid is een breed begrip waaronder tal van zaken zoals vaardigheden vallen. Een evaluatierapport uit 2005 schrijft hierover het volgende (figuur 2.2):

> Daarbij zijn vooral de volgende aspecten van belang: verantwoordelijkheid van de leerling voor het eigen leerproces, tot uiting komend in duidelijkheid omtrent het te doorlopen leerproces en de verwachte resultaten daarvan, en een zekere mate van vrijheid in het tempo waarin dit proces wordt doorlopen; nadruk op zelfstandig werken door de leerling, met een begeleidende rol voor de docent – dit in tegenstelling tot de meer passieve rol van de leerling en de centrale rol van de docent in het meer traditionele onderwijs: 'De leerling zit niet op school, maar werkt op school'; variatie in te verrichten activiteiten, waarbij een grotere plaats wordt ingeruimd voor het verwerven van vaardigheden door de leerling, naast de reproductie van kennis; variatie in organisatievormen, groter dan gebruikelijk in het traditionele klassikaal georganiseerde onderwijs. Het leren – leren concept is een doel om naar toe te werken.
>
> (Tweede Fase Adviespunt - ministerie Van Onderwijs Cultuur en Wetenschap, 2005)

Figuur 2.2 *Zelfstandigheid volgens het adviespunt van de Tweede Fase*

De typering van wat zelfstandigheid inhoudt is erg globaal. Wat betekent het bijvoorbeeld om te leren leren, zelfstandig te werken en om verantwoordelijk te zijn voor het eigen leerproces? Van Streun (2001) gaat in zijn inauguratie rede op deze zaken dieper in. Ze komen er naar zijn mening op neer dat leerlingen moeten leren reflecteren, concepten en denkmethoden moeten expliciteren, begrippenkaarten zouden moeten maken en zich metacognitieve vaardigheden eigen moeten maken. Deze, en nog vele andere, vaardigheden vinden we terug in de eindtermen voor het wiskunde onderwijs (zie paragraaf 2.3).

2.2 Profielen als middel om samenhang tussen vakken te realiseren

Het VWO is een algemene opleiding. Leerlingen met een diploma kunnen werk zoeken, maar ook een verdere studie of opleiding voor een beroep volgen. Werk en vervolgopleidingen zijn door de overheid verdeeld in vier grote, globale sectoren. Dit heeft geleid tot de sectoren 'Cultuur & Maatschappij', 'Economie & Maatschappij', 'Natuur & Gezondheid' en 'Natuur & Techniek' Deze sectoren worden profielen genoemd (zie figuur 2.3). De eerste twee sectoren worden samen ook wel aangeduid als Maatschappij-profielen (M-leerlingen), terwijl naar de laatste twee wordt verwezen als de Natuur profielen (N-leerlingen).

Wat zijn profielen?

Een kenmerk van de Tweede fase zijn de profielen. Een profiel bestaat uit een samenhangend onderwijsprogramma dat -samen met zelfstandiger werken- de leerling in havo en vwo beter voorbereidt op een opleiding aan een hogeschool of universiteit. Door die betere aansluiting kan ook het aantal studenten dat het hoger onderwijs voortijdig verlaat, verminderen. Leerlingen kunnen kiezen uit de profielen cultuur en maatschappij, economie en maatschappij, natuur en gezondheid en natuur en techniek. De vier profielen corresponderen met de grote, globale sectoren waarin we werk en opleidingen in de huidige samenleving verdelen. Een profiel kent vakken die voor alle leerlingen gelijk zijn, een deel dat specifiek is voor het gekozen profiel en een vrij in te vullen deel. De vrije ruimte kan worden gebruikt om vakken te volgen uit een ander profieldeel. Dat vergroot de mogelijkheden van leerlingen om door te stromen naar het hoger onderwijs.

(Ministerie Van Onderwijs Cultuur en Wetenschap, 1999)

Figuur 2.3 *De verschillende profielen in de Tweede Fase*

Het profiel 'Cultuur & Maatschappij' is bedoeld voor leerlingen die willen doorstromen naar vervolgstudies als sociale wetenschappen, geschiedenis, recht, taal en cultuur. Gedacht kan worden aan beroepen als uitgever, beleidsmedewerker bij de overheid, docent, cursusontwikkelaar, archeoloog, musicoloog, historicus, (ortho)pedagoog, bibliothecaris, informatie-analist.

Het profiel 'Economie & Maatschappij' kan worden gekenschetst als 'dé weg naar het zakenleven'. Leerlingen die dit profiel kiezen zullen meestal terechtkomen in banen waarbij economie, arbeid, recht en veiligheid centraal staan. Gedacht kan worden aan beroepen als accountant, functies bij een bank, (juridisch) beleidsmedewerker bij de overheid, commercieel medewerker, marketingmanager, hoteldirecteur, belastingadviseur, advocaat of organisatieadviseur.

Het profiel 'Natuur & Gezondheid' bereidt voor op studierichtingen die met gezondheidszorg en milieu te maken hebben zoals geneeskunde, farmacie, (medische) biologie en milieukunde. Bij concrete beroepen kan gedacht worden aan apotheker, huisarts, bodemkundige, ingenieur plantenveredeling, landbouwconsulent, microbioloog of tandarts.

Het profiel 'Natuur & Techniek' is een exact profiel, dat voorbereidt op technische studierichtingen. Beroepen waaraan gedacht kan worden zijn architect, chemicus, natuurkundige, meteoroloog, bosbouwkundig onderzoeker of IT-specialist.

Elk profiel bestaat uit een gemeenschappelijk deel, een profieldeel en een vrij deel. Het *gemeenschappelijke* deel is voor iedereen hetzelfde en neemt ruim 40% van de totale studietijd in beslag. Het heeft een algemeen vormende functie en bestaat daarom uit een breed pakket. De vakken in dit deel zijn: Nederlands, Engels, Duits en Frans, algemene natuurwetenschappen, culturele en kunstzinnige vorming, een combinatie van geschiedenis en maatschappijleer en lichamelijke opvoeding.

Het *profieldeel* is een vaste combinatie van vakken. Het beslaat bijna 40% van de totale studietijd. Het is een specialisatie met verplichte vakken. Het verschilt per profiel welke vakken dit zijn. De vakken voor bijvoorbeeld het profiel Natuur & Gezondheid zijn biologie, scheikunde, natuurkunde en wiskunde en voor het profiel Economie & Maatschappij zijn dit economie, wiskunde, aardrijkskunde en geschiedenis.

Het *vrije* deel beslaat circa 20% van het totale programma. Er is een zgn. verplicht vrij deel en een geheel vrij deel. Het verplichte vrije deel dient gevuld te worden met vakken met een landelijk examenprogramma. Dit zijn niet alleen de vakken en deelvakken uit de profielen, maar kunnen ook, als de school er voor kiest, vakken zijn zoals filosofie, informatica en management & organisatie. Iemand die bijvoorbeeld het profiel Economie & Maatschappij heeft gekozen en die ook geïnteresseerd is in biologie of natuurkunde kan bijvoorbeeld één van beide vakken kiezen in het vrije deel. Het geheel vrije deel kan gevuld worden met een programma waarmee de school zich wil profileren (bijvoorbeeld godsdienst of oriëntatie op studie en beroep, maar ook extra vakken of ondersteuning van andere examenvakken) of met activiteiten die los staan van de vakken, zoals een stage of het lidmaatschap van de medezeggenschapsraad.

Wiskunde is een verplicht vak in alle profielen. Maar de specifieke invulling ervan, het niveau, verschilt per profiel. Medio maart 2006 wordt onderscheid gemaakt in vier niveaus: wiskunde A1, wiskunde A1,2, wiskunde B1 en wiskunde B1,2. Voor alle M-leerlingen is wiskunde A1 verplicht. Leerlingen met het profiel 'Economie en Maatschappij' dienen daarnaast tevens aan de eisen van wiskunde A2 te voldoen. Voor het aantal te volgen vakken maakt dit niveauverschil niet uit. Voor leerlingen geldt dus de combinatie van wiskunde A1 en A2 als één vak. Voor alle N-leerlingen is wiskunde B1 verplicht. Leerlingen met het profiel 'Natuur en techniek' dienen daarnaast tevens aan de eisen van wiskunde B2 te voldoen. Ook voor deze leerlingen geldt dat wiskunde B1 en B2 gelden als één vak.

In het vierde leerjaar van het VWO krijgen alle leerlingen nog het zelfde leerboek. De doelen van het vak wiskunde zouden dus in theorie voor iedereen in 4 VWO gelijk kunnen zijn. In de praktijk ligt dit vaak anders. Op veel scholen zijn 4 VWO-leerlingen meestal al verdeeld in N-klassen en M-klassen. De proefwerken die in deze klassen worden afgenomen verschillen vaak, wat erop duidt dat leerkrachten voor deze leerlingen andere doelen nastreven. De verschillen uiten zich in de keuze van de leerstof – welke onderwerpen wel/niet getoetst worden- , en/of in de mate van diepgang waarop onderwerpen wordt getoetst in de proefwerken.

2.3 Eindtermen voor het wiskunde onderwijs in het VWO

De voor het wiskunde onderwijs in het VWO te realiseren doelen zijn opgesplitst in eindtermen voor de vakinhoud en eindtermen voor algemene vaardigheden toegepast in het vakgebied.

2.3.1 De vakinhoudelijke eindtermen

Deze eindtermen zijn gevat in een bijzonder lange lijst van onderwerpen waarover de leerlingen kennis dienen te bezitten. Wiskunde is hierin onderverdeeld in, afhankelijk van het deelvak, een 5- tot 10-tal domeinen met elk 1 tot 4 subdomeinen. In deze gebiedsaanduidingen zijn vervolgens de doelen nader gespecificeerd. Een voorbeeld van de omschrijving van deze doelen staat hieronder (figuur 2.4). De illustratie betreft een subdomein dat onderdeel uitmaakt van de vakinhoud van het onderzoek.

Subdomein: Functies, grafieken, vergelijkingen en ongelijkheden

De kandidaat kan

1. een in de context beschreven samenhang vertalen in een functievoorschrift.
2. op grafieken transformaties uitvoeren als verschuiven en rekken en de samenhang met de bijbehorende verandering van het functievoorschrift beschrijven.
3. functies combineren (optellen, aftrekken, schakelen) en de samenhang met de bijbehorende grafieken beschrijven.
4. een tweede-graadspolynoom in één variabele ontbinden in lineaire factoren.
5. een algoritme gebruiken voor het oplossen van een tweede-graadsvergelijking.
6. vergelijkingen oplossen met numerieke, grafische of elementair-algebraïsche methoden.
7. ongelijkheden oplossen met de grafische methode.
8. de begrippen absolute waarde en entier (integer) hanteren.

Figuur 2.4 *Een voorbeeld van een omschrijving van eindtermen in een subdomein*

De omschrijving van doelen is vaak vervat in een combinatie van objecten of begrippen en handelingen daarop (zoals 'functies combineren'). De termen hiervoor zijn bepaald door een nomenclatuurcommissie die daarmee een standaardisatie heeft willen realiseren. De gehanteerde termen worden aangeduid als 'basis vocabulaire'. Dit vocabulaire kan volgens deze commissie zonder verdere uitleg gebruikt worden in eindexamens. Hiermee geven ze in feite aan dat iedere leerling die deelneemt aan het eindexamen VWO over deze basis vocabulaire zou moeten beschikken.

De nomenclatuurcommissie maakt onderscheid tussen termen die geen nadere toelichting behoeven en de termen waarvoor een beschrijving nodig is om hun exacte betekenis te duiden. Voor elk is een lijst opgesteld.

De lijst van termen die geen nadere toelichting behoeven bestaat voornamelijk uit *objecten en begrippen* en is daardoor een opsomming van de inhoud sec. De commissie gaat ervan uit dat de betekenis van de termen ondubbelzinnig is. Er mag zonder meer worden aangenomen dat de termen bekend zijn. Ze worden daarom niet nader beschreven. Er wordt onderscheid gemaakt tussen objecten en begrippen uit de algebra en analyse, uit de kansrekening en statistiek en uit de meetkunde en voortgezette meetkunde.

Voor elke term in deze lijst wordt aangegeven voor welk niveau (Wiskunde A1, Wiskunde A1,2, Wiskunde B1, en Wiskunde B1,2 (zie paragraaf 2.2.)) dit object of begrip van toepassing is. Onderstaand voorbeeld illustreert de opzet van de lijst. Het voorbeeld betreft een deel van de eindtermen die aan bod komen in het onderzoek (voor de volledige lijst zie bijlage B.1):

Tabel 2.1 *Voorbeeld van welke eindtermen bij welke vakken behandeld dienen te worden*

Analyse en algebra	A1	A1,2	B1	B1,2
D - notatie (delta-notatie)	X	X	X	X
Asymptoot	X	X	X	X
Domein en bereik			X	X
Formule	X	X	X	X

De lijst van termen waarvoor een beschrijving nodig is om hun exacte betekenis te duiden bestaat voornamelijk uit handelingen. Het gaat hier om bekend veronderstelde woorden waarvan de betekenis niet vanzelfsprekend eenduidig is en om termen waarover verwarring kan ontstaan over hun precieze betekenis. In deze tweede lijst staan naamwoorden en werkwoorden. Bij de naamwoorden gaat het om een 12-tal termen als minimum, maximum, extreme waarde, uiterste waarde, waar een korte toelichting bij gegeven wordt. In onderstaande illustratie staat een deel van de werkwoorden die gebruikt worden in de eindtermen die behoren bij de vakinhoud uit het onderzoek (voor de volledige lijst zie bijlage B.1). De termen uit deze lijst komen nagenoeg allemaal voor bij alle wiskunde niveaus. Uitzonderingen staan apart vermeld.

Tabel 2.2 *Voorbeeld toelichting werkwoorden in eindtermen*

Werkwoorden	
Bereken	Hierbij moet de berekening altijd opgeschreven worden; het antwoord mag ook een met de (grafische) rekenmachine gevonden antwoord zijn. Bij het gebruik van de grafische rekenmachine moet duidelijk worden aangegeven hoe men tot het antwoord komt. Wanneer een antwoord wordt vereist dat langs algebraïsche weg en niet via benaderingen met de (grafische) rekenmachine dient te worden gevonden, wordt dat in de vraagstelling expliciet aangegeven. Dit kan op de volgende manier: "Bereken (eventueel met een toevoeging als 'langs algebraïsche weg' of 'met differentiëren of iets dergelijks) de exacte waarde van …"
Onderzoek	De leerling verkent het probleem, bijvoorbeeld met behulp van de grafische rekenmachine, en doet verslag van zijn aanpak en bevindingen. Als ook de juistheid van de bevindingen formeel moet worden aangetoond, zal daar expliciet naar worden gevraagd.
Teken de grafiek	Bij deze opdracht worden aan de kwaliteit (zoals nauwkeurigheid, saillante punten, speciale vorm) van de tekening eisen gesteld. De opdrachten "plot de grafiek" en "teken de globale grafiek" zullen bij examens niet gebruikt worden. In het geval slechts een globale schets van een grafiek wordt gevraagd, worden omschrijvingen als "geef in een grafiek een mogelijk verloop aan ....", "licht je antwoord toe met een schets" of "maak een schets van de grafiek waaruit blijkt dat …" gebruikt. Indien een (tekstuele) toelichting bij de tekening gewenst is, moet daar expliciet om gevraagd worden
Toon aan	Gevraagd wordt naar een redenering of berekening waaruit de juistheid van het gestelde blijkt. Als de juistheid van een algemeen geldende regel moet worden aangetoond, zal een formulering worden gebruikt als "toon aan dat voor elke *a* de bewering waar is". Het verifiëren van een algemeen geldende regel door middel van enkele voorbeelden is dan niet voldoende.

Misschien wel het meest opvallende kenmerk van de lijsten met vakinhoudelijke eindtermen is hun omvang. In totaal beslaat de lijst met voornamelijk objecten en begrippen bijvoorbeeld uit niet minder dan ongeveer 250 objecten of begrippen. Het is dan ook niet verwonderlijk dat herhaaldelijk in discussies over het wiskunde onderwijs de kwestie van overladenheid aan bod komt.

Wat verder opvalt, is dat relatief weinig eindtermen verbanden leggen tussen verschillende begrippen. Men zou bijvoorbeeld verwachten dat de doelstelling ‘het begrijpen van de overeenkomsten en verschillen tussen de punten 5, 6 en 7 uit figuur 2.4’ in de lijst met eindtermen voorkomt, ze gaan immers alle drie over het oplossen van functies, maar dat is niet het geval. Verder valt op dat de eindtermen niet beschreven zijn op een manier waarop onderwijskundigen gewoonlijk doelen formuleren. Er wordt bijvoorbeeld geen onderscheid gemaakt in *typen kennis*. Een typologie als die van Merrill (1994) met een indeling in feiten, concepten, procedures en principes, of Van Streun’s (Van Streun, 2001) indeling in ‘weten dat’, ‘weten hoe’, ‘weten waarom’ en ‘weten over weten’ kan nuttig zijn. In deze indeling ontbreekt ook aandacht voor het gewenste *beheersingsniveau*. Er is bijvoorbeeld niet aangegeven voor welke vakinhouden automatisering gewenst is. Desondanks hebben we ervoor gekozen in dit onderzoek, vanwege de aansluiting, de in de eindtermen gebruikte indeling te volgen.

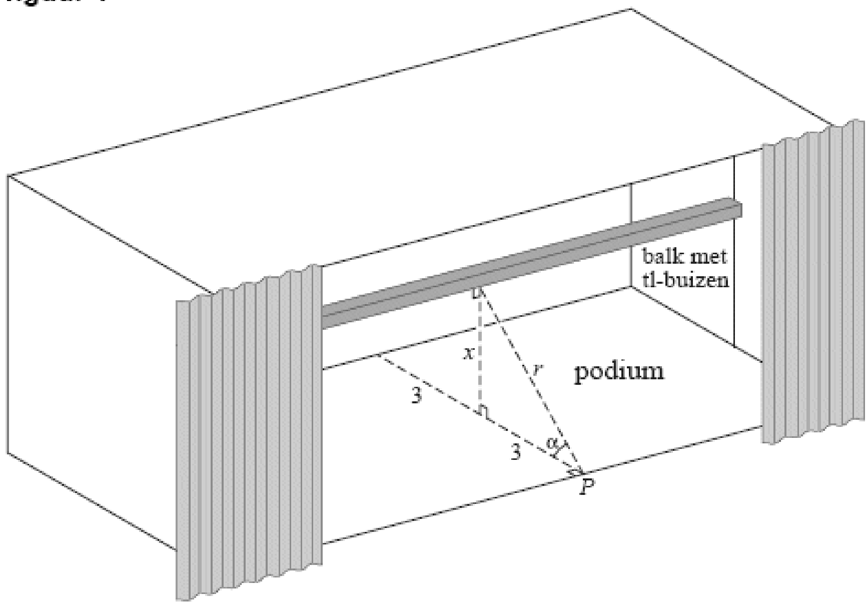
De eindtermen zijn bepalend voor de inhoud van de eindexamens die op hun beurt weer bepalend zijn voor de inhoud van de wiskunde methoden. Eindexamen en methoden zijn ook in sterke mate richtinggevend voor wat docenten in hun les bespreken. Mede omdat de eindtermen enige interpretatie-ruimte geven ten aanzien van het na te streven niveau, zoals boven aangegeven, biedt dit docenten ook enige ruimte voor deelname aan initiatieven zoals het hier besproken onderzoek.

Het eindexamen bestaat uit twee gedeelten, een schoolexamen en een centraal examen. Het gemiddelde op deze examens bepaalt het eindcijfer. Het schoolexamencijfer wordt geregeld in het Programma van Toetsing en Afsluiting (PTA). Dit kan voor elke school anders geregeld zijn. Sommige scholen beginnen hier al in 4 VWO mee, de overige scholen beginnen in 5 VWO. Dit betekent dat een deel van de behaalde cijfers in (4), 5 en 6 VWO meetelt voor het schoolexamencijfer. Het cijfer voor dit schoolexamen wordt, medio 2006, voor 20%-40% bepaald door praktische opdrachten. Bij praktische opdrachten zijn onderzoeksvaardigheden van groot belang. Deze vaardigheden vinden we, nader omschreven voor de wiskunde, terug in de eindtermen voor algemene vaardigheden.

De centrale eindexamens worden ontworpen op basis van de eindtermen voor de deelvakken. Dit centrale eindexamen toetst in hoeverre de leerlingen de gestelde eindtermen beheersen. Een groot deel van de opdrachten in de centrale eindexamens is tegenwoordig, medio 2007, contextrijk. Een voorbeeld van zo’n eindexamenopgave staat in figuur 2.5.

Podiumverlichting
Een podium is 6 meter diep. Midden boven het podium hangt een balk met tl-buizen. De verlichtingssterkte op het podium is het kleinst aan de rand, bijvoorbeeld in punt P. De afstand van P tot de balk is r meter, de hoogte van de balk boven het podium is x meter en de hoek die het kortste verbindingslijnstuk van de balk en punt P met het podium maakt is α radialen. Zie figuur 1.

figuur 1



De verlichtingssterkte op het podium in punt *P* noemen we *V* (in lux). *V* is omgekeerd evenredig met *r* en evenredig met sin α . Dus $V = c \cdot \frac{1}{r} \cdot \sin\alpha$, waarbij de evenredigheidsconstante *c* afhangt van het lichtvermogen van de tl-buizen. Voor deze balk met tl-buizen geldt: *c* = 650 (lux□m).

Er geldt: $V = \dfrac{650x}{9 + x^2}$.

3p **1** Toon aan dat deze formule juist is.

De balk met tl-buizen kan omhoog gehesen worden: de hoogte kan variëren van 2,0 tot 5,0 meter.

De verlichtingssterkte op het podium in punt *P* moet minimaal 100 lux zijn.
5p **2** Bereken langs algebraïsche weg op welke hoogtes de balk mag hangen.

Er is een hoogte van de balk waarbij *V* maximaal is.
6p **3** Bereken deze hoogte langs algebraïsche weg.

("Examen VWO 2007 tijdvak 1 woensdag 16 mei 13.30 - 16.30 uur wiskunde B1, podium verlichting," 2007)

Figuur 2.5 *Voorbeeld van een contextrijke eindexamenopgave*

2.3.2 Eindtermen voor algemene vaardigheden toegepast in het vakgebied

Naast eindtermen voor de vakinhoud zijn er ook eindtermen voor algemene vaardigheden die in de wiskunde belangrijk zijn. Er wordt onderscheid gemaakt in twee subdomeinen, te weten informatievaardigheden en onderzoeksvaardigheden. In onderstaande illustratie (figuur 2.6) worden deze eindtermen aangegeven.

2.1 Eindtermen: vaardigheden

domein Ag: Vaardigheden

Subdomein: Informatievaardigheden

De kandidaat kan

1 artikelen of berichten uit (nieuws)media of vakliteratuur waarin wiskundige presentaties, redeneringen of berekeningen voorkomen, kritisch analyseren.
2 informatie verwerven en selecteren uit schriftelijke, mondelinge en audiovisuele bronnen, mede met behulp van ICT.
3 informanten kiezen en informanten bevragen.
4 benodigde gegevens halen en interpreteren uit grafieken, tekeningen, simulaties, schema's, diagrammen en tabellen, mede met behulp van ICT.
5 gegevens weergeven in grafieken, tekeningen, schema's, diagrammen en tabellen, mede met behulp van ICT.
6 hoofd- en bijzaken onderscheiden.
7 feiten met bronnen verantwoorden.
8 informatie analyseren, schematiseren en structureren.
9 de betrouwbaarheid beoordelen van informatie en de waarde daarvan vaststellen voor het op te lossen probleem of te maken ontwerp.
10 (historische) situaties benoemen waarin wiskunde een belangrijke rol speelt of heeft gespeeld.
11 voorbeelden noemen van het gebruik van wiskunde in andere vakgebieden, beroepen of kunst.

Subdomein: Onderzoeksvaardigheden

De kandidaat kan

12 logische relaties tussen gegevens, beweringen en resultaten aanbrengen en beoordelen en relevante gegevens scheiden van minder relevante gegevens.
13 gegevens met elkaar en met de probleemstelling in verband brengen, op grond daarvan een passende aanpak kiezen en deze zo mogelijk opsplitsen in deeltaken.
14 in een tekst verstrekte gegevens doelmatig weergeven in een geschikte wiskundige representatie (model).
15 vaststellen of een gekozen model voldoet en, indien nodig, een bijstelling hiervan suggereren.
16 vaststellen of er aanvullende gegevens nodig zijn en zo ja, welke.
17 onderzoeken in hoeverre het model bijgesteld moet worden ten gevolge van wijzigingen in de gegevens.
18 een bij het model passende wiskundige oplossingsmethode correct uitvoeren.
19 resultaten betekenis geven in de context en binnen die context kritisch analyseren.
20 de nauwkeurigheid van de gegevens of werkwijzen betrekken bij de beoordeling van het

eindresultaat.
21 reflecteren op de gemaakte keuzen voor representatie, werkwijze, oplossingsproces en resultaten en deze onder woorden brengen.

(http://www.nvvw.nl/ en http://www.cevo.nl/ 15-02-06)

Figuur 2.6 *Eindtermen van algemene vaardigheden*

Wat in deze lijst van eindtermen vooral opvalt, is dat het vaardigheden betreft die in vrijwel elk vak kunnen worden toegepast. Het gaat hier dan ook om vakoverstijgende vaardigheden met hier en daar wat wiskundige accenten. Net zoals bij de eindtermen voor de vakinhouden is de formulering erg algemeen. Maar waar de vakinhouden nog een grote invloed hebben op de eindexamens, lijkt dat voor deze algemene vaardigheden niet op te gaan. Er wordt nauwelijks op getoetst in het centraal eindexamen. De grote hoeveelheid vakinhoudelijke eindtermen leidt op dit moment al tot discussies over de overladenheid van het wiskundeprogramma. Dit zet de aandacht van de algemene vaardigheden onder druk, wat nog versterkt wordt doordat het centrale eindexamen weinig aandacht aan deze vaardigheden besteedt. Het gevolg is dan ook dat het aanleren van deze vaardigheden (te) weinig aandacht krijgt in lesmethoden en ondersteunend lesmateriaal.

We ordenen deze vaardigheden op een iets andere wijze en met meer gangbare termen (het gaat hierbij om activiteiten). Deze nieuwe indeling (zie onder) richt de aandacht sterker op vaardigheden die een rol spelen bij het zelfstandig werken. Tevens geldt dat het hier om complexe activiteiten gaat die om een meer gedetailleerde uitwerking vragen dan nu wordt geboden in de eindtermen.

Tabel 2.3 *Herordening in gangbare termen (activiteiten) van vaardigheden*

Vaardigheid / activiteit	Eindterm	
abstraheren	6:	hoofd- en bijzaken onderscheiden
	8:	informatie analyseren, schematiseren en structureren
	14:	in een tekst verstrekte gegevens doelmatig weergeven in een geschikte wiskundige representatie (model).
	19:	resultaten betekenis geven in de context
structureren	13:	een passende aanpak kiezen en deze zo mogelijk opsplitsen in deeltaken
	21:	reflecteren op de gemaakte keuzen voor representatie, werkwijze, oplossingsproces en resultaten
evalueren	12:	logische relaties tussen gegevens, beweringen en resultaten beoordelen
	15:	vaststellen of een gekozen model voldoet en, indien nodig, een bijstelling hiervan suggereren
	16:	vaststellen of er aanvullende gegevens nodig zijn en, zo ja, welke
	19:	resultaten binnen de context kritisch analyseren
interpreteren	4:	benodigde gegevens halen en interpreteren uit grafieken, tekeningen, simulaties, schema's, diagrammen en tabellen, mede met behulp van ICT
	7:	feiten met bronnen verantwoorden
	12:	logische relaties tussen gegevens, beweringen en resultaten aanbrengen en relevante gegevens scheiden van minder relevante gegevens

beredeneren/ aantonen/ bewijzen	9:	de betrouwbaarheid beoordelen van informatie
communicatie- en presentatievaardigheid: o.a. beheersing taal van de wiskunde	14: 21:	in een tekst verstrekte gegevens doelmatig weergeven in een geschikte wiskundige representatie (model). gemaakte keuzen voor representatie, werkwijze, oplossingsproces en resultaten en onder woorden brengen

Abstraheren is het ontdoen van het bepalende of toevallige, van het concrete, het als begrip afleiden. Om informatie te kunnen selecteren, een wiskundig probleem in een context te herkennen of een model op te stellen moet een leerling kunnen abstraheren. Abstraheren is dan ook een belangrijk onderdeel van de wiskunde.

S*tructureren* is het indelen van verzamelingen op basis van gemeenschappelijkheden. Wiskundigen kijken naar gemeenschappelijkheden op het gebied van getallen (getaltheorie), beweging en verandering (analyse), vorm (meetkunde) en daarmee samenhangend symmetrie (transformaties), positie (topologie) en uitkomsten (statistiek en kansrekening). Verzamelingen kunnen voorkomen op

- microniveau (hun handelingen bij het werken aan opdrachten, zowel uit het boek als in een computerprogramma),
- mesoniveau (de opdrachten onderling; zowel binnen één bron, bijvoorbeeld het boek, als tussen de opdrachten van verschillende bronnen, bijvoorbeeld simulatieprogramma en boek) en
- macroniveau (voorkennis).

Bij structureren gaat het om het weten welke aanpak geschikt is bij de aanpak van een probleem en hoe problemen opgedeeld kunnen worden in kleinere problemen. Over welke kennis gaat dit probleem en welke beschikbare oplossingsmethoden zijn er? Leerlingen moeten in staat zijn een groot probleem op te splitsen in kleinere deelproblemen.

Bij *evalueren* draait het om het beoordelen van de behaalde resultaten. Wanneer een leerling een opdracht heeft opgelost, zal hij aan het einde bijvoorbeeld moeten beoordelen of de oplossing volledig is en voldoet aan de randvoorwaarden.

Interpreteren is het verklaren of uitleggen wat er gebeurt. Het verkrijgen van een resultaat van bijvoorbeeld een berekening zou niet het einde moeten zijn. Er dienen vragen te volgen als ‘Wat vertellen deze resultaten mij?’ en ‘Wat betekent dit resultaat?’. Ook al verkrijgen meerdere personen dezelfde resultaten, dit betekent niet dat zij ze op eenzelfde manier interpreteren.

Beredeneren/ aantonen/ bewijzen is het doen blijken dat iets is zoals beweerd, of verondersteld wordt. Iets aantonen of een standpunt ondersteunen met argumenten zijn voorbeelden. Bewijzen en stellingen zijn de vorm waarin wiskundigen hun resultaten formeel presenteren[1]. Een bewijs dient een ander ervan te overtuigen dat een stelling afleidbaar is vanuit de als waar geaccepteerde wiskundige ondergrond. Een stelling kan door middel van experimenten aanneembaar gemaakt worden.

Veel zaken kunnen in de wiskunde niet uitgeprobeerd worden. Uitproberen wat er gebeurt als een getal oneindig groot wordt, kan bijvoorbeeld niet. Blindelings vertrouwen op wat er gebeurt bij kleinere getallen en dat generaliseren naar het oneindige toe is geen methode die tot juiste en betrouwbare resultaten leidt. Iets vluchtig bekijken en daar verstrekkende conclusies aan verbinden mag niet zomaar. De leerlingen zullen gevoel voor de geldigheid van de argumenten moeten krijgen. Ook bewijzen is een kenmerkend onderdeel van de wiskunde.

Om correct te kunnen *communiceren en presenteren*, moeten de leerlingen zich de taal eigen maken die bij het vakgebied hoort. In vakgebieden worden tal van zaken op een meer exacte manier beschreven dan daarbuiten. Dit leidt tot gedetailleerde beschrijvingen en ‘nieuwe’ termen waardoor jargon ontstaat. Ook voor de grammatica en manier van uitdrukken gelden in vakgebieden vaak regels

[1] Wiskundigen presenteren ook in vermoedens en beweringen, waarbij ze aangeven dat deze nog bewezen moeten worden.

die afwijken van het dagelijks taalgebruik. Leerlingen moeten vertrouwd raken met de in de wiskunde gebruikelijke terminologie, grammatica en gewoonten van communiceren en presenteren.

Een belangrijke wiskundige activiteit is probleem oplossen. Probleem oplossen is het kunnen oplossen van een probleem, waarbij het niet direct duidelijk is om welk type (deel)probleem het gaat of welke oplossingsweg kan worden gebruikt. Probleem oplosvaardigheden zijn nodig. Bij het oplossen van problemen spelen bovenstaande activiteiten een rol. Omdat probleem oplossen een overkoepelende activiteit is, kiezen we ervoor om deze in het proefschrift niet apart te behandelen.

2.4 Er is meer…..

De eindtermen beperken zich tot cognitieve doelen. Een heel andere categorie nog niet genoemde doelen betreft zaken van sociaal-emotionele aard. Een sociaal-emotioneel doel voor het wiskunde onderwijs is bijvoorbeeld dat leerlingen enthousiasmeren voor wiskunde op zo'n manier dat ze er plezier in krijgen en dat ze zich zekerder voelen over hun vaardigheden en kennis.

Deze sociaal emotionele doelen zijn niet direct in de eindtermen te vinden, maar kunnen daar wel toe behoren. Voldoende zelfvertrouwen is bijvoorbeeld belangrijk bij het onder woorden brengen van gemaakte keuzen. De meeste docenten weten hoe belangrijk sociaal emotionele factoren zijn op de prestaties en leerresultaten van de leerlingen en zij steken dan ook veel energie en tijd in het zo goed mogelijk bereiken van dit soort doelen.

2.5 Conclusie

Wanneer we de eindtermen bekijken, dan valt het op dat deze eindtermen weinig precies gedefinieerd zijn. We constateren dat het vooral om de vakinhoud lijkt te draaien. Het onder de knie krijgen van vaardigheden komt slechts sporadisch en in beperkte mate aan bod en wordt nauwelijks getoetst op het centraal eindexamen. Met de invoering van de Tweede Fase is met name het besef toegenomen dat er meer aandacht besteed moet worden aan de bevordering van de zelfstandigheid. De belangrijkste vaardigheden voor het vak wiskunde hiervoor staan in de algemene eindtermen voor vaardigheden. In tabel 2.3 hebben wij een nieuwe indeling en benaming voor deze vaardigheden voorgesteld. Deze ordening dient als kader voor de uitwerking van de lessen en het ondersteunend materiaal in dit onderzoek. De sociaal-emotionele doelen zijn niet direct herkenbaar in de eindtermen. Realisatie hiervan is belangrijk als voorwaarde voor de realisatie van de cognitieve doelen uit de eindtermen.

3 Didactiek

In het voorgaande hoofdstuk hebben we beschreven wat de doelen van het wiskundeonderwijs zijn. In dit hoofdstuk beantwoorden we de vraag welke didactiek toegepast zou moeten worden om deze doelen zoveel en zo goed mogelijk te realiseren. Hierbij gaan we ervan uit dat de in tabel 2.3 genoemde activiteiten alleen verworven kunnen worden in een actief leerproces. We zullen deze activiteiten, die we gezien hun centrale rol hierna kernactiviteiten zullen noemen, eerst verder uitwerken, waarna we bespreken wat we onder "actief leren" verstaan. Vervolgens bespreken we enkele vormen van onderwijs die specifiek aandacht besteden aan het actief laten werken van leerlingen.

3.1 Inleiding

Docenten hebben meestal duidelijke doelen die ze met de leerlingen willen bereiken. Over het algemeen steken ze veel energie in realiseren van deze doelen. Echter, inzet van de kant van de docent is niet voldoende. Het zijn uiteindelijk de cognitieve activiteiten van de leerling die tot kennisverwerving zullen leiden. Hierbij zien we door de jaren heen een duidelijke ontwikkeling in de opvattingen over de rol van de leerling in het leerproces. In de tijden van het "*behaviorisme*" werd de lerende vooral gezien als een "passieve" ontvanger van informatie die hier min of meer reflexief op reageerde, in het *cognitivisme* stond de interne kennisstructuur van de lerende centraal. Ook in het cognitivisme werd al aangenomen dat adequate kennisstructuren (vooral in de vorm van probleemschema's, Rumelhart, 1980) alleen actief geconstructueerd kunnen worden, bijvoorbeeld door zelfstandig of begeleid problemen op te lossen. In het *constructivisme* gaat men nog een stap verder en legt men veel verantwoordelijkheid bij de leerling. Leerlingen stellen zichzelf vragen, zoeken naar verbanden, abstraheren actief, construeren producten, etc. Een goed voorbeeld betreft het onderzoek naar leerlingen die werken met zogenaamde "self-explanations", dat wil zeggen dat zij actief proberen een verband te leggen tussen de kennis die ze al hadden en nieuw te verwerven kennis, betere resultaten halen dan leerlingen die dit niet doen (Chi, Bassok, Lewis, Reimann, & Glaser, 1989; Ferguson-Hessler & De Jong, 1990; Renkl, 1999). Deze effecten zijn vrij stabiel en niet alleen aangetoond bij meer conceptuele domeinen maar ook bij procedurele vaardigheden als het schrijven van queries in SQL (Catrambone & Yuasa, 2006) en bij verschillende domeinen zoals natuurkunde maar ook, recent nog, bij een wiskunde onderwerp als statistiek (Broers & Imbos, 2005). Het algemene idee is dat diepere conceptuele kennis dit soort actieve verwerving nodig heeft en niet direct overgedragen (gepresenteerd) kan worden van de docent naar de leerling (zie bijvoorbeeld Jonassen, 1991; Novak, 1998; Von Glaserfeld, 1987). In relatie tot het leren van wiskunde loopt deze ontwikkeling parallel met de verschuivende opvatting over wiskunde als een "rekenvaardigheid" naar wiskunde als een elementaire begripvolle activiteit en als een begrip van relaties tussen concepten (Bransford, Brown, & Cocking, 1999). Binnen het constructivisme zijn sterkere en gematigder opvattingen over de hoeveelheid zelfstandigheid die een leerling gegeven moet worden. Later in dit hoofdstuk en dit proefschrift zal duidelijk worden dat we een omgeving voor wiskunde gecreëerd hebben waarin leerlingen zelfstandig onderzoek kunnen doen. Echter, mede gebaseerd op resultaten van onderzoek (De Jong, 2006a; Mayer, 2004), zullen we leerlingen daarbij allerlei vormen van instructie en ondersteuning aanbieden. In dat opzicht wordt in dit proefschrift een gematigde vorm van constructivisme gevolgd.

Alhoewel we nu de voornaamste richting van ons onderzoek hebben aangegeven, het onderzoeken van een omgeving naar ondersteund actief leren in de wiskunde, kunnen beide aspecten (actief leren en ondersteunen) verder worden uitgediept. Op de eerste plaats is de vraag relevant wat nu precies bedoeld wordt met actieve leerlingen, in andere woorden welke leerprocessen moeten plaatsvinden voor het genereren van kennis? Op de tweede plaats is de vraag relevant wanneer een leerling actief wordt en hoe het onderwijs ervoor kan zorgen dat dit gebeurt en op de juiste wijze gebeurt.

In dit hoofdstuk zullen we beginnen met het beantwoorden van de eerste vraag door te omschrijven wat we met het woord actief bedoelen. In paragraaf 3.2 bespreken we de door ons onderscheiden kernactiviteiten van leerlingen (zie tabel 2.3 in paragraaf 2.3.2) nader. In paragraaf 3.3 gaan we op zoek naar voorbeelden van wiskunde onderwijs waarin leerlingen actief leren en we proberen te achterhalen welke vormen van ondersteuning in deze benaderingen worden aangeboden.

3.2 Activiteiten nader omschreven

In paragraaf 2.3.2 hebben we kort zes kernactiviteiten gedefinieerd die binnen wiskunde en wiskundig probleem oplossen een centrale rol vervullen, namelijk abstraheren, structureren, evalueren, interpreteren, bewijzen / beredeneren / aantonen en presenteren en communiceren. In deze paragraaf zullen we deze kernactiviteiten nader toelichten. In deze toelichting gaan we in op enkele uitkomsten en conclusies wat betreft de kernactiviteiten uit de literatuur.

3.2.1 Abstraheren

Abstraheren is binnen de wiskunde een centraal proces. Abstraheren betekent dat een situatie ontdaan wordt van de aspecten die alleen aan de situatie gebonden zijn en in meer algemene termen wordt weergegeven. In feite betekent het het “mathematiseren” van de situatie, dat wil zeggen het zien van een situatie in mathematische termen. Abstraheren en mathematiseren kunnen in verband worden gebracht met het gebruik van zogenaamde “big ideas” (Twomey Fosnot, Dolk, Zolkower, & Seignoret). De term “big ideas” in de wiskunde wordt gebruikt om een aantal fundamenteel begrippen of principes in de wiskunde weer te geven. Voorbeelden zijn: "objecten en groepen”, “proporties”, “schattingen” etc. Carnine en Jones (1994) geven het voorbeeld van de berekeningen rondom geometrische ruimte. Zij stellen dat wanneer leerlingen leren dat volume gelijk is aan de basis maal een bepaalde fractie van de hoogte, ze niet de afzonderlijke regels voor de verschillende vormen, zoals cilinders, piramides, etc., uit het hoofd hoeven te leren. Het kunnen denken in dit soort termen behoort bij het abstraheren. Ook bij andere natuurwetenschappelijke domeinen is het kunnen abstraheren van belang. Larkin (1983) bijvoorbeeld geeft voorbeelden van wat ze noemt ‘construction rules’, elaboraties die van een concreet probleem een natuurkundig probleem maken. Het herkennen van symmetrie is bijvoorbeeld een onderdeel van het creëren van een natuurkundige situatie, maar ook bijvoorbeeld het herkennen van koperen elementen als geleiders. In een recent artikel laten Savelsbergh, de Jong, en Ferguson-Hessler (submitted) zien dat bij het oplossen van natuurkunde problemen het vertalen van een gegeven concrete situatie naar een natuurkundige situatie een essentieel onderdeel van het natuurkundig probleemoplossen is en dat verschillen tussen goede en zwakke beginnende probleemoplossers voor een deel door verschillen in het kunnen abstraheren wordt bepaald.

Verschillende auteurs bespreken het proces van abstractie vanuit het startpunt van ervaringen met concrete objecten. Dienes (1963), bijvoorbeeld, benadrukt het belang van ervaring opdoen met concrete materialen. In de leercyclus van Dienes worden de volgende drie fasen doorlopen: vrij spel, gestructureerd spel (gestructureerd systematisch opdoen van ervaringen) en symboliseren. Vervolgens spelen de leerlingen met symbolen en regels of te wel een nieuw vrij spel. Ook Freudenthal (1991) schrijft in soortgelijke termen over het abstractieproces. De leerling gaat aan de slag met concrete ervaringen. Hij ontdekt daar nieuwe eigenschappen en structuren. Deze worden op hun beurt weer onderwerp van zijn ontdekkingen. Het gaat om een cyclus van nieuwe ontdekkingen uit voorgaande ontdekkingen. Wiskunde is volgens Freudenthal (1991) het opnieuw en opnieuw herordenen van de werkelijkheid[1]. Eén van de eerste dingen die een kind leert is het tellen. Vervolgens wordt dit tellen herordend in optellen en aftrekken. Heel veel keer iets optellen wordt weer herordend in vermenigvuldigen. Dit proces gaat als maar door.

> The first non-trivial structure as such, i.e. whole number as the product of the process of counting, begot rich process and product content in the sense of subject content, which, organized by ever new structures, in turn begot new contents. – a never ending cyclic process. (Freudenthal, 1991, p. 10)

Het steeds opnieuw doorlopen van de cyclus, maakt dat leerlingen steeds verder abstraheren:

> Through reflecting on his own activity man discovers paradigms, which are abstracted into patterns of mental action and made conscious as schemes by which thought is organized on behalf of new progress. (Freudenthal, 1991, p. 10)

De leerlingen raken steeds verder bij hun ‘gezonde verstand’ vandaan:

> Through reflections on ones own activities, one finds a new paradigm, which is then strictly formulated in rules and schemes. This way mathematics drifted away further and further from most people’s common sense (which is in fact the same only much less organized). (Freudenthal, 1991, p. 10)

Men zou nu kunnen denken dat een context alleen maar ballast is, die de pure wiskundige boodschap onduidelijk maakt. Dit is onjuist volgens Freudenthal (1991), de context is de boodschap:

> Viewing context as noise, apt to disturb the clear mathematical message, is wrong; the context itself is the message, and mathematics is a means of decoding. (Freudenthal, 1991, p. 75)

Korthagen en Lagerwerf (1995) hebben een theorie opgesteld over hoe uit eerste ervaringen theorievorming plaats vindt. Met andere woorden hoe de eerste ervaringen van overbodige informatie worden ontdaan, hoe uit de eerste ervaringen theorie wordt afgeleid. Zij baseren hun theorie op de theorie van Van Hiele. Van Hiele heeft een theorie ontwikkeld die de miscommunicatie tussen leerlingen en de docent tracht te verklaren. Hij onderscheidt drie niveaus van communicatie: communicatie op een intuïtief niveau, communicatie op een niveau van netwerk van relaties (of structuur), communicatie waarbij men de interne structuur van het netwerkniveau onder de loep neemt. Dit onderscheid in niveaus hebben Korthagen en Lagerwerf (1995) overgenomen. Zij koppelen daar bovendien een theorie over het verwerken van binnenkomende informatie aan (zie figuur 3.1).

[1] (Freudenthal, 1991) spreekt over horizontaal en verticaal mathematiseren: “Horizontal mathematisation leads from the world of life to the world of symbols. In the world of life one lives, acts; in the world of symbols, symbols are shaped, reshaped, and manipulated, mechanically, comprehendingly, reflectingly; this is vertical mathematisation.” (blz. 41)

Uit onze leefwereld komen via de diverse zintuigen indrukken binnen. Deze indrukken spelen een belangrijke rol in onze ervaringen in onze leefwereld. Allereerst vormen we van de binnenkomende informatie zogenaamde images. Tijdens het proces van het vormen van een image worden sommige aspecten uit de omgeving belangrijk en anderen worden genegeerd. Het is in deze fase bijna onmogelijk om een concept of wet expliciet te maken. De gebruikte woorden zijn terloops, bijna onverschillig. We gebruiken concepten die vaak niet volledig ontwikkeld zijn. Bij veel images kennen we de achterliggende kennis niet; we kunnen niet uitleggen wat we doen en ook niet rechtvaardigen of verifiëren wat we doen. Zulke intuïtieve, impliciete images zijn vaak voldoende in het dagelijks leven.
Soms gaan mensen over tot het vormen van schema's. Deze schema's beschrijven gedetailleerder een bepaald aspect van het image. In het dagelijks leven is het over het algemeen voldoende om eerdere ervaringen te gebruiken bij de confrontatie met nieuwe problemen. Op school daarentegen kan een probleem of vraag mensen aanzetten om verder te kijken. Vanzelfsprekendheden worden nader bekeken en images worden meer ingevuld en worden minder verweven met het dagelijks leven. Tijdens het schematiseren wordt (nog verder) gefocust op bepaalde aspecten van fenomenen. Nieuwe concepten en verbanden dienen zich aan. Laboratoria kunnen nodig worden, omdat rondkijken in je eigen omgeving niet langer voldoet.
In sommige situaties hebben mensen de behoefte om een systeem van uitgangspunten, definities en theorema's te construeren. Kortom theorie bouwen. Het formeren van images, het schematiseren en het bouwen van een theorie zijn drie fundamenteel verschillende fasen in het proces van het bevatten van een onderwerp.

Figuur 3.1 *Theorie over abstraheren van Korthagen en Lagerwerf (1995)*

Ook Dienes en Golding (1971, p. 95) zien het proces van abstraheren als een proces waarin sommige aspecten verzameld en belangrijk gevonden worden en andere aspecten afgewezen worden omdat ze als onbelangrijk worden bestempeld. Docent en materiaal kunnen volgens Dienes de leerlingen door een serie ervaringen leiden, die wijzen op de interessante aspecten en het concept dat wordt geleerd verscherpen. Het symboliseren maakt dat wiskundige ervaringen los geweekt worden van hun concrete referenties en werktuigen worden voor nieuwe soorten mentale manipulaties. Dienes (1963) waarschuwt echter wel dat het gevaar bestaat dat symbolen gemanipuleerd worden los van de 'realiteit'. Dit is het gevaar dat steeds in het wiskunde onderwijs heeft bestaan, wiskunde wordt gezien als een abstractie die weinig met de werkelijkheid te maken heeft. Dit geldt niet alleen voor docenten en ontwerpers van onderwijs, maar zeker ook voor leerlingen. In een onderzoek waarin ze observeerden hoe studenten omgingen met data bij een (realistisch) statistiekprobleem vonden McGatha, Cobb, en McClain (2002) dat lerenden dit toch vaak opvatten als "doing something with the numbers", zonder een directe relatie met het werkelijke probleem te leggen.

Wanneer leerlingen niet doorhebben dat het bij wiskunde om een continue herordening van de werkelijkheid gaat, dan kan bij hen het gevoel ontstaan dat wiskunde niet met de werkelijkheid van doen heeft. Het oplossen van een vraagstuk wordt nu meer gezien als het vinden van 'de magische formule'. Wiskunde is in hun ogen het leren van de juiste trucs. Het vinden van de formule is het doel geworden in plaats van het oplossen van een vraagstuk uit het dagelijks leven. Freudenthal (1991) geeft een aantal mooie voorbeelden van het vinden van de magische formule ook al gebeurt dit in een concrete context (zie figuur 3.2).

On a ship there are 18 sheep and 16 goats. How old is the captain? I gave this problem to an 8 year-old girl who lived at that time in a world of fairy tales and sorcerers where she played her small and large roles, with gnomes sitting on each toadstool. She beamed with joy because she had discovered the secret, and had calculated the captain's age. Thanks to her enthusiasm she was unaware of the mockery of her two years older brother, who is as sober-minded as she is imaginative, and so no illusions were cracked. When I tried to explain to the boy how others reasoned when they calculated the captain's age by adding, subtracting, multiplying, and eventually by dividing, he shook his head: "I cannot understand what you mean; this yields at most the number of sheep per dog."

(Freudenthal, 1991, blz. 71)

Figuur 3.2 *Voorbeeld hoe in een context naar magische formules wordt gezocht*

Deze voorbeelden laten zien dat abstraheren niet eenvoudig is voor leerlingen en dat het van tijd tot tijd opnieuw terug gaan naar de concrete context van het probleem niet de (gehele) oplossing biedt.

In dat opzicht is de conclusie van Dienes en Golding dezelfde als die van Freudenthal, abstractie is van wezenlijk belang, maar de relatie met de concrete werkelijkheid moet bewaard blijven. Het blijft daarom belangrijk wiskunde te presenteren in realistische contexten. Belangrijk is de afwisseling tussen concrete en niet concrete situaties. De volgende auteurs geven hiertoe een aanzet.

Cobb en McClain (2006) geven een voorbeeld van een methode voor het onderwijzen van statistiek (EDA: exploratory data analysis) waarin het leggen van een relatie tussen de (abstracte) statistiek en het werkelijke probleem centraal staat. Hierin speelde de docent een centrale rol. De relatie tussen het werkelijke en statistische probleem werd in een aantal stappen gelegd: a) het 'framen' van het fenomeen dat onderzocht wordt (bijv. AIDS), het belang van het probleem (bijvoorbeeld het ontwikkelen van effectieve behandelingen), het bepalen wat er gemeten moet worden (bijv. het aantal T-cellen) en hoe dat gemeten kan worden (bijv. door het nemen van bloedmonsters). Hierna werden de data geïntroduceerd en werd verteld dat deze door het beschreven proces waren gegenereerd. Hierdoor werd het studenten duidelijk dat data een 'geschiedenis' hebben en een doel dienen (Cobb & McClain, 2006, p. 177).

3.2.2 Structureren

Kennis kan gezien worden als een bouwwerk, waarbij allerlei verbindingen tussen de verschillende onderdelen van kennis bestaan. In de context van probleemoplossen zijn bijvoorbeeld verbindingen tussen een gedefinieerde beginsituatie en de daarbij behorende aanpak van belang (zie bijvoorbeeld Hardiman, Dufresne, & Mestre, 1989). Een relevante theorie is hier de "schema" theorie die ervan uitgaat dat de verwerving van "schema's" een aanduiding is voor voortschrijdende expertise (Elio & Scharf, 1990). Schema's kunnen gedefinieerd worden als een voor een bepaald type probleem noodzakelijke oplossingsinformatie (Rumelhart, 1980). In een schema komen verschillende vormen van kennis naar voren. Leerlingen moeten weten wanneer kennis van toepassing is en situaties kunnen herkennen en beoordelen (situationele kennis), ze moeten weten welke concepten relevant zijn (conceptuele kennis) en ze moeten weten welke procedure moeten worden toegepast (procedurele kennis) (de Jong & Ferguson-Hessler, 1986, 1996). Deze opvatting geeft aan dat niet alleen technieken, vaardigheden en vakinhoud, maar ook het waarom van de bruikbaarheid hiervan, moet worden geleerd. De leerling moet weten waarom in welke situatie welke kennis ingezet kan worden. Daarvoor moet een leerling de kern uit een opdracht kunnen halen. De NVvW (Nederlandse Vereniging voor Wiskundeleraren) omschrijft de volgende opdrachten die leerlingen voor het onder de knie krijgen hiervan moeten uitvoeren (Nederlandse Vereniging voor Wiskundeleraren, 2005): "*Overzichten laten maken, samenhangen en abstracties laten zoeken en expliciteren, in toepassingen de onderliggende wiskundige kernen laten opsporen*."

Bij structureren is de voorkennis van leerlingen van het grootste belang. Voorkennis is de basis waarop een verdere structurering plaats vindt. De voorkennis van leerlingen verschilt onderling. Het kan zijn dat er bij de ene leerling al iets meer of iets anders aanwezig is dan bij de andere leerling. Verschil in voorkennis heeft als gevolg dat er niet één identiek bouwplan voor alle leerlingen is. Voor iedere leerling afzonderlijk moet er op een andere ondergrond gebouwd worden. Dit heeft tot gevolg dat er inzicht verworven moet worden in de voorkennis van leerlingen en indien mogelijk het materiaal hierop moet worden aangepast. Om overzicht te krijgen in wat een leerling allemaal geleerd heeft en waar hij dit toe kan passen is het belangrijk dat een leerling structuur aanbrengt in zijn kennis. Mayer (1996), bijvoorbeeld, identificeert het organiseren van geselecteerde informatie in een coherente representatie en het integreren van nieuwe kennis met bestaande kennis als de twee belangrijkste processen in verband met transfer bij probleem oplossen. Freudenthal (1991) beweert dat wanneer nieuwe kennis niet geïntegreerd wordt, er vaak wordt teruggegrepen op oude 'foutieve' voorkennis en dat het niet integreren daarom tot onjuiste antwoorden kan leiden.

Om de structuur in het geheel van de stof te zien, moet een leerling overzicht over het geheel hebben. Maar dat overzicht is er pas, wanneer er een bepaalde mate van beheersing van de stof is. Deze mate van beheersing is groter dan de mate die nodig is om de eerste eenvoudige oefeningen op te kunnen lossen. Leerlingen die zich de stof eigen aan het maken zijn, hebben deze beheersing nog niet. Selectie van het juiste materiaal en het verder kunnen kijken dan de oppervlakkige kenmerken is lastig (Chi, Feltovich, & Glaser, 1981). Het is voor hen niet mogelijk om de structuur in het totaal plaatje te zien. Zeker in het begin hebben leerlingen dus ondersteuning nodig voor het zien van de structuur.

Boeken en hoofdstukken in boeken zijn opgebouwd volgens een bepaalde structuur. De vraag is alleen in hoeverre leerlingen doorhebben dat er een structuur achter zit, hoe deze structuur is en wat de redenen voor het kiezen voor deze structuur zijn. Om zelf structuur aan te brengen zoals we in het voorgaande onder de aandacht brachten, hebben leerlingen dus ook ondersteuning nodig bij het zicht krijgen op de structuur die anderen in het onderwerp hebben aangebracht.

3.2.3 Evalueren

Een leerling is niet klaar na het uitvoeren van een berekening of het verzamelen van resultaten van hands-on practica en als gevolg daarvan het formuleren van een conclusie dan wel een antwoord. De leerling moet vervolgens nagaan of het door hem gevonden antwoord (of conclusie) overeenstemt met de overige informatie. Komt het gevonden antwoord overeen met wat de leerling erover weet? Dit proces noemen we evalueren en dit evalueren levert vaak problemen op voor leerlingen. Davis (1984) heeft als een fase in het probleemoplossen evalueren. In deze fase vindt volgens Davis het accepteren of verwerpen van delen van het gedane werk plaats. Daarnaast wordt nagegaan hoe adequaat de constructies, opgehaalde voorkennis en gemaakte links met voorkennis zijn. De Jong en Ferguson-Hessler (1984) noemden dit de "controlefase" in het probleemoplossen en zij constateerden dat probleemoplossers de neiging hebben deze fase over te slaan en dat zij niet eenvoudig aan te zetten zijn deze fase goed uit te voeren. Nelissen (1987) vindt in zijn studie dat een verschil tussen goede en minder goede probleemoplossers is dat de goede probleemoplossers vaker reflecteren, dat wil zeggen momenten van zelf-controle nemen waarin de leerling zich bijvoorbeeld afvraagt of zijn aanpak juist is. Ook Noddings (1985) noemt evalueren een fase van probleem oplossen, namelijk de zesde en laatste fase. Volgens haar draait het in deze evaluatiefase om het terugkijken om na te gaan of de resultaten aan de oorspronkelijke eisen voldoen. Daarnaast moet volgens haar in deze fase vooruit gekeken worden of en hoe de resultaten gegeneraliseerd kunnen worden. Leerlingen hebben moeite om met behulp van experimenten en redenaties iets aannemelijk te maken, zo blijkt onder andere uit het overzicht van De Jong en Van Joolingen (1998). Ook McArthur en Lewis (1991) beschrijven problemen die leerlingen hebben met het bedenken van experimenten. Zij noemen dat leerlingen alleen kijken naar bevestigende experimenten en niet naar tegensprekende experimenten. Daarnaast vragen leerlingen vaak om hulp bij het bedenken van nieuwe experimenten. Verder bespreken de auteurs dat leerlingen vaak stoppen na het empirisch aantonen van een verband en niet daarna nog proberen te beredeneren waarom dat verband waar moet zijn.

Om een uitspraak te doen over het feit of de gevonden oplossing wel een geldige oplossing kan zijn, moet de leerling duidelijk hebben wat voor voorwaarden er voor het antwoord gelden. De leerling moet weten dat hij een overzicht van de voorwaarden moet hebben.

Bij een evaluatie op basis van data, gaat een leerling na of zijn idee of bewering door de data ondersteund worden. Dit verzamelen van data is niet bij iedere didactiek gebruikelijk. Hierdoor zal bij de ene leermethode meer nadruk op evaluatie liggen dan bij de andere.

3.2.4 Interpreteren

Docenten moeten dat wat leerlingen doen en zeggen, interpreteren om een beeld van het begrip van leerlingen te krijgen. Een dergelijke interpretatie is niet eenvoudig (Chamberlin, 2005; Wallach & Even, 2005). Interpreteren van gegevens is bijna een wetenschap op zich. Stein (2007) gaat in zijn oratie in op wat er na het verzamelen van waarnemingen allemaal moet gebeuren voor je informatie hebt waar je iets mee kunt en dat je processen helpt begrijpen. Wat in de praktijk van het doen van onderzoek een onmisbare stap is, lijkt in het onderwijs niet onmisbaar te zijn. Leerlingen zijn niet gewend dat na het antwoord en de evaluatie nog een stap volgt, zoals interpretatie. Vaak is het in lesmethoden voldoende om alleen de formule te vinden (Freudenthal, 1991; White, 1993). Leerlingen moeten beseffen dat interpreteren erbij hoort en belangrijk is.

Uit onderzoek naar curricula waarin hands-on ervaringen een belangrijke plaats innemen, blijkt dat, zelfs bij leerlingen die deze curricula volgen, gevolgtrekken en uitleggen gebaseerd op proefresultaten zaken zijn waar leerlingen moeite mee hebben (Pine et al., 2006). Pine et al. (2006) vonden in hun onderzoek dat leerlingen theoretiseren en extrapoleren van data lastig vinden. Lowrie (2002) stelt dat bij het toenemende gebruik van technologie een grotere nadruk komt te liggen op de interpretatievaardigheden van leerlingen. In het beschreven onderzoek laat hij zien dat sommige leerlingen (uit het primair onderwijs) niet tot interpretatie in staat zijn, omdat ze de verbanden tussen de verschillende dimensies (3-dimensionaal en 2-dimensionaal in de echte- en de computerwereld) niet begrijpen. Uit beide onderzoeken blijkt dat het verkrijgen van één interpretatie al lastig kan zijn. Heeft de leerling eenmaal een mogelijke interpretatie gevonden, dan moet hij zich ervan bewust worden dat er eventueel meerdere interpretaties mogelijk zijn en welke alternatieve interpretaties dat dan zijn. Daarna volgt een evaluatie welke interpretatie het meest ‘bruikbaar’ of het meest ‘verklarend’ is.

Bij de interpretatie van grafieken gaat het om meerdere stappen in data-interpretatie, namelijk (Watson & Moritz, 2001):

1. het aflezen van waarden,
2. het vergelijken van waarden,
3. het voorspellen van waarden op basis van data, en
4. het nagaan van de invloed van de context op de data.

De auteurs citeren Biggs en Collis (1982, 1991), die onderscheid maken tussen de bases van waaruit leerlingen interpreteren. Dit kan vanuit intuïtieve responsies (ikonic responses), dat wil zeggen vanuit intuïtief denken zonder zich met de data bezig te houden. Daarnaast zijn ongestructureerde responsies (uninstructural responses) mogelijk, dat wil zeggen vanuit een enkel resultaat of een subverzameling van de resultaten. Multi gestructureerde responsies (multistructural responses) zijn ook mogelijk, waarbij bijvoorbeeld naar alle data wordt gekeken maar daarbij slechts oog hebben voor één variabele. Tot slot zijn relationele responsies (relational responses) mogelijk, waarbij naar meerdere variabelen en de relatie tot elkaar wordt gekeken en bijvoorbeeld een mogelijk causaal verband wordt gezien.

Uit het onderzoek van Pine et al (2006) blijkt dat het simpelweg invoeren van een curriculum met hands-on als belangrijke component, leerlingen niet tot goede onderzoekers maakt. In hun discussie wijten zij dit resultaat aan een mogelijke gebrekkige voorbereiding van de docenten en het mogelijk te kort schieten van het instructiemateriaal. Zij verwachten dat aanpassing van beide zaken als gevolg zal hebben dat hands-on ervaringen leerlingen wel tot betere onderzoekers zal maken.

Kortom in het instructiemateriaal zal meer gevraagd moeten worden dan alleen de formule om leerlingen aan te zetten tot interpretatie. Omdat de vraag naar een interpretatie niet gebruikelijk is, is het goed mogelijk dat leerlingen gebrekkige interpretatievaardigheden hebben.

3.2.5 Bewijzen / beredeneren / aantonen

Bewijzen wordt wel gezien als een centrale en specifiek wiskunde activiteit (Herbst & Brach, 2006). Van Schalkwijk geeft de volgende definitie voor bewijzen (1998, p. 24):

> ‘In principe is een bewijs van een wiskundige stelling een afleiding van die stelling uit definities, axioma's en reeds eerder bewezen stellingen’

In de nomenclatuur (zie hoofdstuk 2.3, dit deel) wordt aantonen omschreven als het geven van een redenering of berekening waaruit de juistheid van het gestelde blijkt. Het gaat bij het bewijzen / beredeneren / aantonen in de klas om het funderen van beweringen en ideeën op berekeningen of (eerder behandelde) theorie.

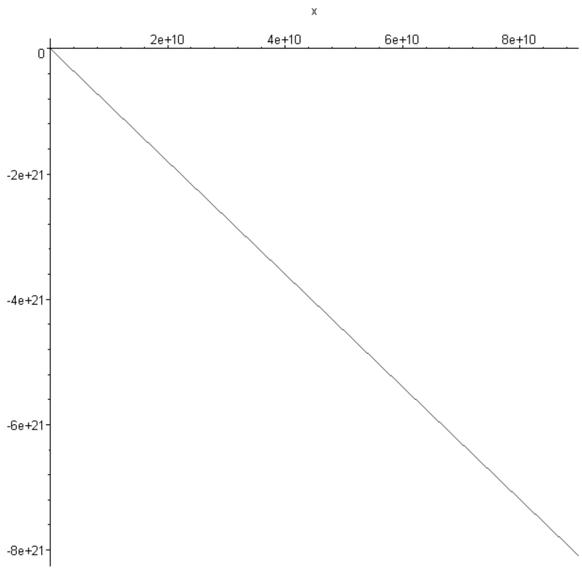
Niet alleen vindt onderzoek plaats naar hoe men met benaderingen van het wiskundeonderwijs in het algemeen leerlingen actiever kan krijgen, ook vindt er onderzoek plaats naar hoe men bij het leren van slechts één vaardigheid de leerlingen actief krijgt. Van Schalkwijk (1998) heeft bijvoorbeeld onderzocht hoe leerlingen aangezet kunnen worden om actief met bewijzen aan de slag te gaan. Hij concludeert uit voorgaand onderzoek dat een didactiek van bewijzen, die uitsluitend gericht is op het produceren van een formeel bewijs, weinig succesvol gebleken is. Hij verwacht een beter resultaat te bereiken door op de een of andere manier het geven van een bewijs voor leerlingen betekenis te geven. Dit betekenis krijgen voor leerlingen hoopt hij te bereiken door
(1) de vraag aan de orde te stellen wat een goed bewijs is,
(2) leerlingen zelf vermoedens te laten formuleren,
(3) de leerlingen zelf meningsverschillen te laten beslechten,
(4) leerlingen te betrekken bij het kiezen van axioma’s en definities en/of
(5) deductief en axiomatisch denken eerst voor te bereiden.

Van Schalkwijk (1998) vertrekt vanuit een sociaal-constructivistische invalshoek bij het omzetten van deze uitgangspunten in een lessenserie. De lessenserie, die van Schalkwijk (1998) in zijn onderzoek ontworpen heeft, is als volgt:

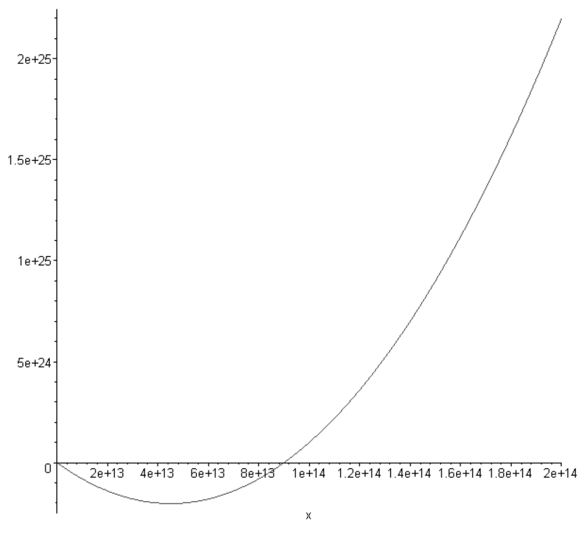
- Bij de introductie van het onderzoeksterrein zoeken de leerlingen, onder leiding, naar mogelijke verbanden in het onderzoeksgebied. Deze bijeenkomst werd aangeduid als de ‘brainstorm’.
- In de periode tussen de introductie en de daaropvolgende les proberen de leerlingen in groepjes van twee of drie enkele geopperde verbanden te bewijzen of te weerleggen.
- Tijdens de volgende les brengen de leerlingen, weer onder leiding, aan elkaar in een plenaire zitting verslag uit van hun inspanningen. De leerlingen kunnen elkaar vragen stellen en kritiek leveren op de aangevoerde argumenten. Deze bijeenkomst hebben wij aangeduid als het ‘symposium’.
- Tenslotte maken de groepjes van leerlingen een schriftelijk verslag van hun onderzoek en leveren dat de daaropvolgende les in.

Waarom is bewijzen belangrijk? Een bewering kan door experimenten aanneembaar gemaakt worden, maar alleen de uitkomsten van experimenten zijn niet voldoende voor een veralgemeniseerde bewering. We illustreren dit aan de hand van het voorbeeld in figuur 3.3.

Bij de formule $y = 0.001x^2 - 9 \cdot 10^{10} x$ zou een leerling tot hele grote getallen x = 0 t/m x = 9 · 10^{10} kunnen bekijken en kunnen concluderen dat voor een oneindig grootte x de uitkomst van de formule oneindig negatief wordt. De grafiek ziet er dan als volgt uit:



Maar voor nog grotere waarden van x (bv. x = 2 · 10^{15}) wordt de uitkomst positief. Wie kan er nu voorspellen wat er voor nog grotere waarden van x zal gebeuren? De waarheid van een stelling als ‘wanneer x oneindig groot wordt, wordt y oneindig groot’ moet aangetoond worden.



Iemand met een beetje achtergrond kennis zal dit meteen aan de formule kunnen zien. Maar voor ingewikkeldere formules is het niet eenduidig te zien wat er uiteindelijk gaat gebeuren. Bij technische en bèta studies worden vakken gegeven over het beredeneren wat er gebeurt indien x naar oneindig gaat (limieten). Ook op het VWO wordt daar al een begin mee gemaakt bij horizontale asymptoten.

Figuur 3.3 *Voorbeeld belang van aantonen*

Zoals uit dit voorbeeld blijkt voldoet een conclusie trekken op basis van een vluchtig kijken naar de grafiek niet. Iets vluchtig bekijken en daar verstrekkende conclusies aan verbinden mag niet zomaar. Mogen leerlingen wanneer ze dingen uitproberen, volstaan met een conclusie gebaseerd op alleen hun resultaten? Of moet een leerling ook kunnen aantonen of beredeneren waarom dit zo moet zijn? Eén van de kernactiviteiten is het kunnen aantonen of beredeneren. Daarbij mag een leerling zich baseren op wat hij in eerdere jaren heeft geleerd of van het nieuwe onderwerp al weet.

Daarnaast moeten leerlingen gevoel voor de geldigheid van argumenten krijgen. Wellicht is het voldoende om een bewijs of bewering te kunnen beoordelen op zijn robuustheid en geldigheid en hoeft een leerling niet de vaardigheden te bezitten om zelf een formeel bewijs te kunnen genereren. Het is de vraag of dat wat tot de activiteiten van wiskundigen behoort, ook een onderdeel van het lesprogramma van het vak wiskunde zou moeten zijn. Een leerling moet in ieder geval gevoel ontwikkelen voor wanneer hij iets stellig kan brengen en wanneer hij voorzichtig moet zijn.

Een ander punt dat uit het voorbeeld naar voren komt is de vraagstelling wat een leerling allemaal moet uitproberen. Je kunt, zeker als je geen achterliggende kennis van het onderwerp hebt, niet weten welke situaties/gevallen handig zijn om uit te proberen.

3.2.6 Communiceren / presenteren

Binnen een vakgebied wordt nader naar elementen gekeken, waarbij door de meeste mensen buiten het vakgebied niet stil wordt gestaan en/of door hen als voor vanzelfsprekend wordt aangenomen. Voor een dergelijke gedetailleerdere beschrijving zijn vaak 'nieuwe' termen nodig. Dat wil zeggen, termen die in het dagelijks leven niet of niet op die manier gebruikt worden.

Gebruik van dergelijke termen is niet vrijblijvend. Voor een goed begrip is het belangrijk dat er binnen het vakgebied een algemene consensus geldt voor de precieze betekenis van een term, zodat de communicatie tussen personen zo optimaal mogelijk is. Eén van de taken van het onderwijs is daarom het wegwijs maken in en vertrouwd raken met de binnen de wiskunde gebruikelijke terminologie. Leerlingen moeten hulp krijgen bij het vinden van nieuwe manieren om over hun bevindingen te praten (Dienes, 1963). Door het (nog verder) focussen op bepaalde aspecten van fenomenen dienen nieuwe woorden en concepten van het specifieke veld zich aan, welke geïntroduceerd moeten worden (Korthagen & Lagerwerf, 1995). Perrenet (1995) geeft op basis van zijn onderzoek de volgende waarschuwing (p.75):

> "The described result concerning students' ideas about the number of solutions may serve as a warning: Never take for granted that a concept is clear. Without explicitly stating the essential facts in an educational process, wrong ideas can develop and take root, even in the best of students."

Niet alleen de termen zijn kenmerkend voor de wiskunde taal. Ook voor de grammatica en manier van uitdrukken gelden regels, die over het algemeen afwijken van het dagelijks taalgebruik. Ook wat dit aspect van het taalgebruik betreft zullen leerlingen bekwaam gemaakt moeten worden.

In de wiskunde, en in de wetenschap in het algemeen, wordt een veel grotere precisie gevraagd, waarmee uitspraken worden gedaan. Wanneer de 'slordigheid' qua formulering in het dagelijks leven slechts een kwestie van gemakzucht is, zou men op het binnen de wiskunde vereiste niveau van zorgvuldigheid kunnen komen door hier meer aandacht aan te besteden. Zo simpel ligt het niet: de vraag om een zorgvuldiger formulering maakt vaak een gebrek aan voldoende inzicht duidelijk. Er zijn niet alleen andere en betere woorden nodig, maar ook een dieper/uitgebreider inzicht. Dat wat duidelijk leek, blijkt ineens toch niet zo duidelijk te zijn. De vraag om een precieze formulering leidt nu niet alleen tot de eventuele introductie van nieuwe terminologie, maar ook tot een noodzaak tot verder inzicht.

3.3 Actief leren

Zoals we in de inleidende paragraaf al schreven zijn er twee zienswijzen op wiskunde, namelijk (Bransford et al., 1999):

1. een vak waarin voornamelijk rekenvaardigheid belangrijk is en
2. een vak waarin inzicht in wiskundige begrippen centraal staat.

Een soortgelijke tweedeling in opvatting over wat nuttig en na te streven valt in een vak zien we ook in veel andere domeinen. Kernachtig wordt dit samengevat in de uitspraak van Simon uit 1996 dat ".. the meaning of "knowing" has shifted from being able to remember and repeat information to being able to find and use it" (geciteerd in Bransford et al., 1999, p. 1). Deze tweedeling in opvatting heeft ook consequenties voor ideeën over wat een goede vorm van leren is. Bij "herinneren" en "herhalen", of meer toegespitst op wiskunde "rekenvaardigheid" lijkt een vorm van instructie waarbij demonstratie, imitatie en intensieve oefening van technieken afdoende te zijn. Bij het vinden en gebruiken van kennis, of in andere woorden bij meer inzichtelijke eisen aan kennis, worden aan het leerproces ook andere eisen gesteld. De activiteiten zoals die onderscheiden werden in het vorige hoofdstuk zijn illustratief voor activiteiten die tot inzicht leiden en waar inzicht uit kan worden afgeleid.

Grabinger (1996, p. 667) geeft een overzicht van de "oude" en "nieuwe" opvattingen van leren binnen de onderwijskunde. Deze zijn samengevat in de volgende tabel (tabel 3.1).

Tabel 3.1. *Overzicht van veranderde opvattingen over leren volgens Grabinger (1996).*

Oude aannamen	Nieuwe aannamen
Kennis is eenvoudig transfereerbaar als er abstracte en gedecontextualiseerde begrippen worden geleerd	Transfer is moeilijk en heeft inhoud en context nodig
Leerlingen zijn ontvangers van kennis	Leerlingen zijn actieve constructeurs van kennis
Leren is een behavioristische aangelegenheid waarin de band tussen stimulus en response versterkt wordt	Leren is cognitief en steeds in ontwikkeling
Leerlingen komen "leeg" naar de onderwijssituatie	Leerlingen brengen hun eigen kennis en vaardigheden mee naar een leersituatie.
Kennis en vaardigheden worden het best verworven onafhankelijk van de context	Kennis en vaardigheden worden het best verworven in realistische contexten
	Toetsing moet een realistische en holistische benadering volgen

De "aannamen" die door Grabinger (1996) genoemd worden zijn voornamelijk gerelateerd aan begripvol leren. Veel recente publicaties over leren en instructie (binnen en buiten de wiskunde) sluiten op de hier genoemde aannamen aan. In hun standaard werk "How people learn" laten Bransford et al (1999) zien dat actieve vormen van leren gerelateerd zijn aan het verwerven van begrip en het verwerven van transfereerbare kennis.

Alhoewel vaak als zodanig gepresenteerd, zijn deze opvattingen over kennis en leren niet geheel nieuw. Dewey (1916), bijvoorbeeld, benadrukte al het belang van het "doen" van "science", "wiskunde", en "geschiedenis om begripsvolle kennis te verwerven. Het doen van wiskunde omvat activiteiten als probleem oplossen, abstraheren, ontdekken, en bewijzen. Processen die gelijksoortig zijn aan de processen die wij ook als sleutelprocessen hebben geïdentificeerd. Ook in het werk van Bruner, dat deels zijn oorsprong binnen wiskunde leren had, is er volop aandacht voor betekenisvol leren (Bruner, 1973; Bruner, Goodnow, & Austin, 1956). Ook in Bruner's opvatting is leren een actief proces waarin lerenden nieuwe ideeën ontwikkelen op basis van hun bestaande opvattingen. Instructie, volgens Bruner, moet er vooral op gericht zijn dat leerlingen principes zelf ontdekken, de gewenste instructiemethode is een actieve dialoog (socratisch leren). De Socratische methode is op zichzelf een goed voorbeeld dat al ver in de oudheid naar leren is gekeken. Goffree (2002) haalt een onderzoek van Mooy uit 1946 aan, waarin klassengesprekken worden uitgeprobeerd om leerlingen bewust te maken hoe ze leren.

Zo zijn we via kennis en leren bij "instructie" gekomen en dringt zich de vraag op welke instructievormen van belang zijn voor het initiëren van processen die tot begripvolle kennis leiden. Het is verleidelijk om hier alleen uit te gaan van onderwijsmethoden waarin leerlingen actief met de stof bezig zijn. Echter, ook bij kennisoverdracht, bijvoorbeeld in de vorm van demonstraties, kunnen leerlingen actief met de stof bezig zijn. Ausubel, Novak, en Hanesian (1968), bijvoorbeeld, maken en verduidelijken het onderscheid tussen iets getoond krijgen en passief zijn. Tussen passief ontvangen en actief ontvangen zit een groot verschil en actief receptief leren kan wel degelijk bestaan. Het is niet correct te beweren dat een leerling tot niets in staat zal zijn wanneer hem, nadat hem iets is gedemonstreerd, gevraagd wordt zelf een (vrijwel identiek) probleem op te lossen. Ook in dit onderzoek zullen wij regelmatig de nadruk leggen op tonen, bijvoorbeeld door middel van expliciteren. Wel is het zo dat onderwijsvormen sterk kunnen verschillen in de mate waarin ze leerlingen uitnodigen om actief te worden. In paragraaf 3.4 zullen we voorbeelden bespreken van projecten / onderwijsvormen die leerlingen specifiek uitnodigen tot actief leren.

Bovenstaande discussie is gerelateerd aan de polemiek over 'nieuw' en 'oud' leren die nu in Nederland volop gevoerd wordt. Vaak spelen in deze discussie niet alleen onderwijskundige, leertheoretische argumenten een rol, maar ook argumenten die te maken hebben met financiën en schoolorganisaties. Als we ons beperken tot de onderwijskundige argumenten dan zien we dat er wel degelijk evidentie is aan te voeren voor de effectiviteit van vormen van leren waarin actief leerling gestuurd omgaan met de stof, leren in realistische contexten en samenwerken leren (de Jong, 2006b) belangrijk zijn, maar dat er ook nadrukkelijk gezocht wordt naar combinaties van oude en nieuwe vormen waarin ook een belangrijke rol is voor structurering en informatie aanbieding door de docent dan wel de leeromgeving (de Jong, 2006b). Op het gebied van de wiskunde werd een soortgelijke opvatting al vertolkt door Freudenthal (1991) wanneer hij de volgende uitspraak doet (blz. 55): "Guiding means striking a delicate balance between the force of teaching and the freedom of learning." Ook in de leeromgeving die wij gecreëerd hebben, spelen informatie aanbieding en demonstratie, naast exploratie en ondersteuning een belangrijke rol.

Een onderscheid dat een grote rol speelt in de discussie over actief en meer passief leren is dat tussen inzichtelijk en mechanistisch leren, oftewel, het verschil tussen imiteren en creëren. Voor het aanleren, beheersen en op het juiste moment kunnen inzetten van kennis is het belangrijk dat leerlingen niet alleen memoriseren, maar ook dat zij begrijpen wat ze leren. De tegenhanger van het begrijpen wat men leert, is het leren van "recepten". Hierbij kan de leerling standaard problemen op een standaard manier oplossen. Op deze manier heeft de leerling geen inzicht nodig (Doyle, 1983). Zonder te begrijpen wat de beginsituatie eigenlijk inhoudt en waarom daar juist die oplossingsmethode op moet volgen, kunnen leerlingen wel de juiste oplossing leveren. Volgens van Streun (1989) verdelen wiskunde docenten opgaven in twee verschillende categorieën, namelijk routineopgaven en nadenkopgaven. Voor de routineopgaven kan een algoritmische oplosmethode gebruikt worden. Kenmerkend voor een algoritmische oplosmethode is dat het doel scherp vast ligt, dat de voorwaarden voor de toepassing van de methode duidelijk zijn, dat de opgave scherp is gedefinieerd en dat het doel bij toepassing van de methode gegarandeerd wordt bereikt (De Jong, 1986). Vooral dit laatste kenmerk duidt een groot verschil aan tussen de algoritmische oplosmethode en de heuristische oplosmethode, waar bij gebruik van de laatste niet persé het doel wordt bereikt. Ook Perrenet (1995) maakt dit onderscheid, alleen hij gebruikt de term transferopgaven voor de nadenkopgaven. Bij de transferopgave is het aan de leerling om verband te leggen tussen het nieuwe en het reeds bekende (Reed, 1992). De garantie van het bereiken van het doel leidt ertoe dat een routineopgave kan worden opgelost zonder dat het vraagstuk noch de oplossing door de leerling begrepen wordt (o.a. Schoenfeld, 1985; Van Streun, 1989). Wanneer een opgave binnen een scherp begrensde klasse valt, dan kan, wanneer de leerling de juiste klasse uit de verschillende klassen weet te kiezen, de leerling de opgave met behulp van de algoritmische oplosmethode oplossen. Voorwaarde hiervoor is wel de capaciteit van de leerling om de verschillende klassen van opgaven uit elkaar te kunnen houden. Het op deze wijze onderwijzen van wiskunde zal op een gegeven moment zijn effectiviteit verliezen. Wanneer de opgaven ingewikkelder worden en het herkennen van de klassen niet meer zo voor de hand liggend is of wanneer opgaven niet langer binnen de strikt gedefinieerde klasse vallen, zullen deze leerlingen verward raken en/of vast lopen. Van Streun (1989) verwoordt deze onderwijsmethode en zijn gevolgen op blz. 93 als volgt:

> “Het snel presenteren en inoefenen van de wiskundige algoritmen leidt wel tot een bevredigende prestatie bij het oplossen van standaardopgaven, maar blijkt in wendbaarheid te kort te schieten bij het oplossen van toegepaste problemen.”

Een afweging kan dus gemaakt worden tussen snel presenteren en inoefenen met bevredigende prestaties op standaardopgaven aan de ene kant en veel tijdrovender begripsvol leren met als resultaat een grotere wendbaarheid en wellicht op korte termijn minder bevredigende prestaties op standaard opgaven, aan de andere kant (Gravemeijer et al., 1993).

Men zou nu kunnen besluiten om zich voornamelijk te richten op het bijbrengen van inzicht en het inoefenen van technieken niet langer na te streven. Het is niet zo dat het leren van het één automatisch het leren van het ander tot gevolg heeft. Doyle (1983, p. 166) schrijft:

> ‘Learning to use an algorithm does not necessarily enable one to understand why the algorithm works or when to use it. Similarly, learning to understand why an algorithm works or when it should be used does not necessarily lead to computational proficiency.’

Maar het is wel belangrijk dat leerlingen behendigheid krijgen in het uitvoeren van (reken)technieken. Uit onderzoek is gebleken dat leerlingen pas ingewikkelder algoritmes kunnen leren wanneer ze eenvoudiger algoritmes geautomatiseerd hebben (Mayer, 1985). Er is momenteel een tendens de rekenvaardigheid een wat meer prominente rol te laten spelen. In de nieuwe examenprogramma's wordt namelijk dit punt expliciet genoemd en er gaan hierover ook vragen op examens gesteld worden. We zoeken dan ook naar een combinatie van het inoefenen van technieken en het verkrijgen van inzicht in concepten.

In samenvatting hebben wij in de door ons ontwikkelde methode gezocht naar een vorm van instructie waarin demonstratie en uitleg een belangrijke plaats hebben naast actieve omgang met wiskunde door de leerlingen. Dit laatste gebeurt dan wel op een gestructureerde en ondersteunde manier. Het doel is processen van abstractie, structureren, evalueren, interpreteren, beredeneren en communiceren te bevorderen zodat begripsmatige kennis ontstaat. Hierbij moet nog steeds ruimte worden gemaakt voor het inoefenen van technieken. In de volgende paragraaf worden kort enkele benaderingen beschreven die ter inspiratie hebben gediend.

3.4 Voorbeelden van onderwijsmethoden

Op het gebied van wiskundeonderwijs vindt veel onderzoek en ontwikkeling plaats. In dit gedeelte geven we een beperkt overzicht van enkele toonaangevende benaderingen, projecten en onderzoeken. Dit overzicht is niet volledig en dient slechts om een beeld van de gedachten over het wiskundeonderwijs en lessen getrokken uit voorgaand onderzoek te krijgen.

3.4.1 Heuristisch wiskundeonderwijs

Een belangrijk werk binnen het heuristisch wiskundeonderwijs is dat van Polya (1971). Polya heeft een duidelijke visie op de inhoud van het wiskundeonderwijs zo blijkt (zie ook figuur 3.4) onder andere uit zijn voorwoord. Hij stelt daarin dat wanneer een docent de hem toebedeelde tijd vult met het door zijn leerlingen laten uitvoeren van routinebewerkingen hij hun belangstelling doodt en hun intellectuele ontwikkeling belemmert. Als de docent er echter in slaagt om de nieuwsgierigheid van de leerlingen te prikkelen door hen problemen op te geven die zij voor wat hun kennis betreft aankunnen en hun vraagstukken helpt oplossen door stimulerende vragen, kan hij erin slagen dat de leerlingen plezier krijgen in het onafhankelijk denken.

> De toekomstige wiskundige leert, zoals ieder ander, door imitatie en oefening. Hij moet op zoek gaan naar het model dat geschikt is om te imiteren. Hij moet een stimulerende leraar observeren. Hij moet zich meten met een begaafde vriend. Bovendien en dat is misschien het belangrijkst, moet hij niet alleen de in het leerjaar te gebruiken leerboeken lezen, maar ook andere schrijvers tot hij er een vindt die een instelling heeft die hij van nature geneigd is te imiteren. Hij moet plezier zoeken in datgene wat hem eenvoudig, leerzaam of mooi lijkt. Hij moet problemen oplossen, problemen kiezen die in zijn lijn liggen, over de oplossing ervan mediteren, en nieuwe problemen uitdenken. Met deze middelen, en alle andere moet hij proberen zijn eerste belangrijke ontdekking te doen: hij moet zijn sympathieën en antipathieën ontdekken, zijn eigen smaak.
>
> (Polya, 1971, blz. 67)

Figuur 3.4 *De visie van Polya over het leren van wiskunde*

Polya vergelijkt wiskunde met appeltaart: je weet pas of je het lekker vindt, als je ervan geproefd hebt. De leerling moet het plezier in de wiskunde proeven, zodat het vak iets voor hem gaat betekenen. Ook Polya (1971) heeft het over de twee gezichten van wiskunde: het systematische deductieve gezicht zoals in de strenge wetenschap van Euclides en het experimentele, inductieve gezicht zoals bij wiskunde 'in de maak'. Leerlingen moeten het uitdagende gezicht van de wiskunde in de maak proeven: hoe is het mogelijk om zelf op die oplossing te komen, hoe is mogelijk om zelf dergelijke feiten te ontdekken? Polya (1971) wil de leerlingen in dit proces ondersteuning bieden door hen heuristieken aan te leren. Heuristieken zijn methoden die helpen bij het oplossen van problemen en het doen van ontdekkingen. Polya (1971) heeft een probleemaanpak geformuleerd die bestaat uit achtereenvolgens (1) het probleem begrijpen, (2) een plan ontwerpen, (3) het plan uitvoeren en (4) een terugblik. Bij elke fase geeft hij een aantal leidende vragen (heuristieken), die in zijn boek verder uitgewerkt worden.

Volgens Schoenfeld (1985) bestaat probleem oplossen uit de vier componenten bronnen (domeinkennis), heuristieken, controle en overtuigingen. Bij heuristisch onderwijs gaat het volgens hem om het werken aan problemen waarbij de oplossingsstrategie niet eenduidig en van te voren vast ligt. Het leren van heuristieken is volgens Schoenfeld (1985) niets anders dan het bekwamen zodat transfer mogelijk is. Schoenfeld (1985) stelt dat het eenvoudig een aantal problemen aan de leerlingen voorschotelen, niet vanzelf heuristieken bij de leerlingen oplevert. Er dient expliciet onderwijs gegeven te worden in heuristieken. Ook in Harskamp and Suhre (2006) gaat het om het werken aan problemen waarbij er geen standaard oplossing is. Volgens hen leggen de meeste methoden de leerlingen te weinig realistische problemen voor. Wanneer de boeken dit toch doen, dan laten ze een standaard oplossing zien die de leerling stap voor stap kan volgen. Harskamp en Suhre (2006) hebben een computer programma ontwikkeld waarin zij leerlingen allerlei reële problemen voorleggen. Zij bieden vervolgens ondersteuning volgens algemene heuristieken toegepast voor het (oplossen van het) specifieke probleem. Een ander computerprogramma dat gebaseerd is op Polay's werk wordt beschreven in Chamoso Sanchez, Hernandez Encinas, Lopez Fernandez, & Rodriguez Sanchez (2002). Zij ontwikkelden een programma op CD-ROM dat opgebouwd was volgens de volgende stappen: a) het probleem begrijpen (wat zijn de data, wat wordt er gevraagd, wat zijn de condities?), b) het opstellen van een plan (hier worden de heuristieken gekozen zoals: kun je het probleem herformuleren, is er een algemener probleem? etc.), c) uitvoeren van het plan en d) terugkijken (kun je het resultaat nog op een andere manier afleiden, kun je de gevolgde methode ook voor andere problemen gebruiken etc.).

Het ontbreken van een oplossingsgarantie is een essentieel verschilpunt tussen een heuristische en algoritmische methode. Volgens van Streun (1989) is daarom de eerste en verreweg de belangrijkste taak bij het onderwijzen van wiskunde, het bij leerlingen ontwikkelen van de bekwaamheid om problemen methodisch aan te pakken. Van Streun komt, na bestudering van het oplossingsgedrag van de zwakkere leerlingen, tot de conclusie dat het aan die bekwaamheid nogal eens schort (blz. 28):

- Aan de inspectie van de opgave, het lezen en herlezen, besteden zij te weinig tijd, zodat allerlei relevante aspecten over het hoofd worden gezien.
- Na een korte inspectie kiezen zij uit hun kennisbestand een specifieke oplossingsmethode, die in veel gevallen niet of niet helemaal van toepassing is.
- Zij proberen zich te redden door bij elk type som één specifieke oplossingsmethode te onthouden.
- Het overzicht over het geheel aan beschikbare wiskundige methoden ontbreekt, evenals het zicht op de samenhang tussen verschillende representaties (analytisch, numeriek, grafisch en/of verbaal) van dezelfde opgave.
- Als deze leerlingen niet onmiddellijk een van toepassing geachte eigenschap of een algoritme herkennen, dan houden zij ermee op.

Van Streun noemt als één van de oorzaken dat het gebruikelijk was, dat leerlingen eerst een geheel aan wiskundige begrippen en technieken leerden voordat toepassingen werden behandeld. Leerlingen leren daardoor minder goed die wiskunde toe te passen dan leerlingen die vanaf het begin hebben gezien hoe die wiskunde gerelateerd kan worden aan voorstelbare situaties. De optimale didactische opbouw is volgens hem dan ook dat een vroegtijdige koppeling gelegd wordt tussen geschikte contexten en wiskundige begrippen en methoden. De vertaling van een reële situatie naar een analytisch model is volgens hem essentieel. Verder stelt Van Streun dat zowel de vakinhoudelijke kennis als de meer algemene probleemaanpak (heuristieken) duidelijk geëxpliciteerd moeten worden. Bovendien moet het vereiste cognitieve schema gefaseerd worden opgebouwd met afwisselend aandacht voor de genoemde aspecten, waarna integratie volgt. Algoritmische methoden, in tweede instantie onderwezen als verkortingen van heuristieken, kunnen een waardevolle bijdrage leveren.

Koichu, Berman en Moore (2006) geven een omschrijving van verschillende heuristische gedragingen, zoals het uit de herinnering terugroepen van gerelateerde problemen en het exploreren van symmetrie (beide vormen van structureren). Voor het leren van dergelijke heuristieken moeten niet-routine opgaven gebruikt worden. Dezelfde heuristiek moet in verschillende opgaven toepasbaar blijken te zijn. De docent moet een rol krijgen als expert probleemoplosser die zijn persoonlijke worsteling met een probleem deelt met de leerlingen. Een vocabulaire voor heuristieken moet ontwikkeld worden en gebruikt worden in klassengesprekken.

Kortom wanneer er met open opdrachten gewerkt wordt, is het kunnen toepassen van heuristieken belangrijk en zal er in het onderwijs aandacht voor het aanleren van heuristieken moeten zijn. Vooral in de beginfase van het oplossingsproces zal tijd moeten worden besteed aan de keuze voor de juiste heuristiek. Het blijkt dat vooral zwakkere leerlingen nogal eens tekort schieten in de bekwaamheid om problemen methodisch aan te pakken.

3.4.2 Realistisch wiskundeonderwijs

Een benadering binnen het wiskundeonderwijs, die in Nederland erg sterk vertegenwoordigd is, is het realistisch wiskundeonderwijs. In realistisch rekenonderwijs is het vertrekpunt de belevingswereld van de leerling. Kennis, opgedaan in het dagelijks leven en ontstaan door het gebruik van 'gezond verstand', is de basis van waaruit door aanpassen en uitbreiden wordt geleerd. Binnen de realistische wiskunde is het belangrijk dat problemen uit de belevingswereld van de leerling komen. De bedoeling is dat de leerlingen herontdekken hoe wiskunde in elkaar steekt en wat het nut van wiskunde is. Abstraheren lijkt een belangrijke activiteit in deze onderwijsbenadering te zijn. Doordat de problemen uit de belevingswereld van de leerling komen, is de relevantie groot en zal de leerling gemotiveerd worden. Daarnaast gaat men er vanuit dat zulke problemen de leerling in staat stellen om de problemen beter te begrijpen en op te kunnen lossen.

Dé (bekendste) grondlegger van het realistisch wiskundeonderwijs is Freudenthal (1991). Freudenthal (1991) ziet wiskunde als een bezigheid en benadrukt dat het een activiteit is. Zo moeten volgens hem leerlingen leren bewijzen in plaats van bewijzen te leren. Een kerngedachte binnen het realistisch wiskundeonderwijs is dan ook dat wiskunde een menselijke activiteit is (Van den Boer, 2003). Freudenthal (1991) introduceert het begrip mathematiseren. Mathematiseren bestaat uit verschillende activiteiten zoals modelleren, het bepalen van de essentiële zaken, organiseren, schematiseren, structureren, formaliseren, algorithmiseren, symboliseren en reflecteren op eigen activiteiten.

Freudenthal (1991) onderscheidt twee vormen van mathematiseren: horizontaal en verticaal mathematiseren. Met horizontaal mathematiseren doelt hij op de vertaling van het dagelijks leven in wiskundige termen. Met verticaal mathematiseren doelt hij op het herorganiseren en manipuleren van deze wiskundige termen. Het herontdekken van algemene kenmerken, overeenkomsten, analogieën en isomorfen leidend tot generalisaties is een vorm van verticaal mathematiseren. Dit generaliseren is tegenover gesteld aan het toepassen of illustreren van algemene ideeën in een specifieke context.

Het is volgens Freudenthal (1991) de bedoeling dat de leerling zoveel mogelijk zelfstandig principes leert en zich eigen maakt. Daarbij moet vermeden worden dat leerlingen dezelfde fouten maken als in de geschiedenis gemaakt zijn of op zijpaden terecht komen. Begeleiding van het proces onder andere door docenten is dan ook een belangrijk onderdeel. Begeleiding bestaat uit het aanbieden van problemen uit het dagelijks leven, het bieden van middelen voor verticaal mathematiseren, het in groepen laten werken van leerlingen, het gebruiken van 'producten' van leerlingen zelf en het aanzetten van leerlingen tot reflectie. Freudenthal is tegen het scheiden van wiskunde met de leefwereld door pasklare axioma's te onderwijzen (Van den Heuvel-Panhuizen, 2003).

Bij het ontwikkelen van onderwijsmateriaal volgens de principes van het realistisch wiskundeonderwijs moeten ontwikkelaars probleemsituaties kiezen, die geschikt zijn voor modelleren en passen in een scenario of traject voor verdere ontwikkeling van het model. Hiervoor moet de probleemsituatie makkelijk te schematiseren zijn en moet er voor de leerling een noodzaak zijn om te modelleren. Voorbeelden van probleemsituaties die door onderzoekers zijn gekozen, zijn gegeven in het werk van Van den Heuvel-Panhuizen (2003) en dat van De Lange (1993). Van den Heuvel-Panhuizen (2003) toont bovendien hoe een traject van modelontwikkeling eruit kan zien. Verder moeten de probleemsituaties een breed scala aan oplossingsmogelijkheden bieden (Hoek, 2007). Sociale interactie is binnen het realistisch wiskundeonderwijs een centraal aspect (Hoek, 2007), bijvoorbeeld voor de betekenisgeving en de uitwisseling van de verschillende oplossingsmogelijkheden. Zowel het gebruik van contexten als de sociale interactie leidt tot een toename van de taligheid van wiskundeonderwijs volgens de realistische benadering (Van den Boer, 2003).

Veel onderzoek binnen het realistisch rekenen / wiskunde heeft plaats gevonden op de basisschool. Een voorbeeld van materiaal dat voor die doelgroep is ontwikkeld is 'de lege getallenlijn' (Klein, Beishuizen, & Treffers, 1998). Uit onderzoek was gebleken dat een gestructureerde getallenlijn resulteerde in tellen en passief aflezen. Bij een lege getallenlijn is tellen niet mogelijk. Bovendien is er ruimte voor leerlingen om hun eigen markeringen te maken. Binnen het realistisch reken/wiskundeonderwijs wordt gestreefd om leerlingen zoveel mogelijk hun eigen oplossingsstrategieën te laten ontwikkelen.

Een studie naar de effecten van onderwijs volgens de realistische benadering wordt bijvoorbeeld beschreven door Cobb et al. (1991). In dit onderzoek werd gevonden dat de leerlingen die met materiaal dat volgens de principes van realistisch rekenonderwijs was vormgegeven, gewerkt hebben significant beter conceptueel begrip ontwikkelden dan leerlingen die les kregen aan de hand van een traditioneel leerboek. De (computational performance) rekenvaardigheden van beide groepen waren gelijk. Uit andere onderzoeken blijkt dat dit beeld genuanceerd dient te worden. Rekenzwakke leerlingen profiteren bijvoorbeeld meer van gestructureerd onderwijs (Kroesbergen & Van Luit, 2002; Timmermans, 2005).

Een voorbeeld van onderzoek in het middelbaar onderwijs is het onderzoek van Rasmussen en Kwon (2007). Deze auteurs trekken, mede op basis van kwantitatieve gegevens, de conclusie dat leerlingen kunnen profiteren van onderzoeksgeoriënteerde benaderingen, waaronder de realistische benadering. De auteurs refereren onder andere naar een onderzoek waaruit blijkt dat leerlingen uit de groep die met materiaal, gebaseerd op de realistische principes, werken, significant beter scoren op conceptuele kennis en gelijk op routine.

Een ander voorbeeld naar onderzoek op de middelbare school is dat van Doorman (2005). In dit onderzoek wordt de realistische benadering toegepast waarbij ook gebruik gemaakt wordt van materiaal op de computer (waarin bijvoorbeeld stroboscopische foto's gebruikt worden). In dit onderzoek is vooral naar de verloop van het leerproces gekeken. Er heeft geen kwantitatieve vergelijking tussen twee of meer groepen leerlingen plaats gevonden.

Binnen de realistische benadering zijn door het Freudenthal Instituut veel applets ontworpen. Deze zijn te vinden op het internet (www.fi.uu.nl/wisweb). De applets zijn vrij kaal. Er zit nauwelijks ondersteuning en uitleg bij (zo blijkt onder andere uit de analyse van Hendriksen (2003)). Het zijn vooral programma's waarmee de leerling wiskundige zaken kan manipuleren.

Er is een zeker spanningsveld tussen de realistische benadering en het gebruik van computerapplets (Kanselaar, Van Dooren, & Verschaffel, 2007, p. 422):

> 'het geleid heruitvinden balanceert tussen de soms 'onjuiste' eigen constructies van leerlingen – of de afwezigheid van een construerende activiteit door de leerlingen tout court – en het uitlokken van de gewenste richting van de begripsontwikkeling door de aangeboden instrumenten (emergent modelling).'

Het spanningsveld lijkt niet te vermijden omdat software representaties aanbiedt, die vooraf door anderen geconstrueerd zijn, zo stellen de auteurs.

Drijvers (2000) is nagegaan in hoeverre de realistische benadering te combineren is met het gebruik van computer-algebra-systemen (CAS) en tegen welke problemen leerlingen daarbij aanlopen. Op basis van de realistische theorie voorspelt hij een aantal obstakels, namelijk (Drijvers, 2002):

1. Het verschil tussen de algebraïsche voorstelling die de computeralgebra omgeving geeft, en de vorm die de leerling verwacht en als eenvoudigst beschouwd.
2. Het verschil tussen numerieke en exacte berekeningen en de impliciete manier waarmee het CAS daarmee omgaat.
3. De flexibele conceptie van variabelen en parameters die het gebruik van computeralgebra vereist.
4. De neiging om alleen numerieke en geen algebraïsche oplossingen te accepteren.

5. De beperkingen van het CAS en de moeilijkheid om algebraïsche strategieën te vinden welke die beperkingen omzeilen.
6. Het onvermogen om te weten wanneer en hoe computeralgebra van pas komt.
7. Het black box karakter van het CAS.
8. De beperkte conceptie van algebraïsche substitutie.
9. De beperkte conceptie van algebraïsch oplossen.
10. De conceptie van een expressie als een proces, als een rekenvoorschrift, en niet als een object.
11. De moeilijkheid van transfer tussen CAS techniek en pen-en-papier techniek vanwege het gebrek aan congruentie tussen de technieken in beide media.
12. Het interpreteren van de uitvoer van het CAS.

Vervolgens laat hij zien dat deze ook daadwerkelijk in de klas voorkomen. In dit artikel trekt de auteur geen conclusies, behalve dat een docent de obstakels serieus moet nemen.

3.4.3 Wetenschappelijk (begeleid) ontdekkend/onderzoekend leren

In wetenschappelijk ontdekkend leren hoopt men leerlingen actief te krijgen door hen hun eigen begrip te laten construeren. De hoofdtaak van de leerling is het doorgronden van een onderliggend model door middel van simuleren (De Jong, 2006a; De Jong & Van Joolingen, 1998). In deze benadering ligt de nadruk op het ontdekken van relaties op een manier die lijkt op de wijze waarop wetenschappers onderzoek doen. Volgens Lewis, Bishay, McArthur, en Chou (1993) bestaat wetenschappelijk redeneren uit de volgende stappen:

- voorstellen van een onderzoeksgebied
- voorstellen en definiëren van een specifiek wetenschappelijk probleem
- genereren van hypothesen
- verzamelen van observaties, die te maken hebben met de hypothese en analyseren en interpreteren van de verzamelde data
- bevestigen of verwerpen van de hypothese
- herformuleren van de hypothese
- interpreteren of verklaren van de hypothese

Friedler, Nachmias, en Linn (1990) komen tot een vergelijkbare opsomming waaruit wetenschappelijk redeneren volgens hen bestaat:

- het definiëren van een (natuur)wetenschappelijk probleem
- het opstellen van een hypothese
- het ontwerpen van een experiment
- observeren, verzamelen, analyseren en interpreteren van data
- het toepassen van de resultaten
- het doen van voorspellingen op basis van de resultaten (p. 173)

Bij hen is stap 1 uit het overzicht van Lewis et al. overgeslagen; deze stap wordt vaak door de ontwerpers van instructie of door de docent genomen. Een ander verschil is dat er bij Friedler et al. (1990) alleen over het toepassen van resultaten wordt gesproken, terwijl in de lijst van Lewis et al. (1993) apart het interpreteren en verklaren van de hypothese wordt genoemd. Het gevaar bestaat dat het interpreteren en verklaren ondergesneeuwd raakt in de vele bezigheden die gedaan moeten worden en van de kaart verdwijnt. Omdat dit onderdeel in onze ogen uitermate belangrijk is, gaat onze voorkeur uit naar het expliciet noemen als stap. De Jong en Van Joolingen (1998) baseren zich op de lijst van Friedler et al. (1990) in hun bespreking van mogelijke instructie voor het bieden van ondersteuning bij de verschillende stappen. Zij gaan in dit overzicht niet in op het bieden van ondersteuning op het gebied van interpreteren of verklaren van de hypothese.

Het gaat bij wetenschappelijk onderzoekend of ontdekkend leren erom dat leerlingen hun eigen vragen beantwoorden door het ontwerpen en uitvoeren van experimenten. Om op deze manier te kunnen werken heeft de leerling wel allerlei experimenteervaardigheden nodig. Omdat gebleken is dat deze nogal eens onvoldoende zijn bij leerlingen (o.a. De Jong & Van Joolingen, 1998; McArthur & Lewis, 1991), wordt onderzocht hoe deze processen ondersteund kunnen worden (o.a. Gijlers, 2005; Van der Meij & De Jong, 2004; Van Joolingen, 1993; Veermans, 2002). Begeleiding bestaat uit opdrachten bij het probleem, feedback op sommige antwoorden gegeven op dergelijke opdrachten, ondersteuning bij de verschillende fasen die leerlingen zouden moeten doorlopen, zoals het bedenken van hypothesen, het ontwerpen en uitvoeren van experimenten en ondersteuning van regulatieve processen als plannen.

Onderzoekend leren wordt veelal toegepast in natuurwetenschappelijke domeinen. Echter ook voor wiskunde bestaan er omgevingen waarin het onderzoeken en ontdekken voorop staan. In het Jasper project (the Cognition and Technology Group at Vanderbilt, 1997) worden leerlingen met een wiskundig probleem geconfronteerd door een video te bekijken. Na afloop krijgen leerlingen instructie over het probleem dat moet worden opgelost (al dan niet in competitie met andere scholen). De context van het probleem is erg rijk, namelijk het verhaal en de beelden van de video-opname. Hoewel het een herkenbaar verhaal voor de leerlingen is, is het niet een probleem wat leerlingen op die manier in hun eigen leefwereld snel zullen tegenkomen. Na de introductie van de computer is geprobeerd om elementen van dit succesvolle project opnieuw in computerprogramma's te realiseren. Pea (1987) meent dat computerprogramma's kunnen voorzien in avontuurlijke probleem-situaties, waarin wiskundig denken nodig is om tot een oplossing te komen. Eén van de opwindende facetten van computerprogramma's, ontworpen op basis van de ontdekkend leren benadering, is dat leerlingen terwijl ze bezig zijn op interessante ideeën kunnen komen die erom vragen getoetst te worden (Pea, 1987, p. 108):

> 'The exciting feature of the environment is that interesting properties that emerge in the course of a construction cry out for testing on other kinds of triangles, and students can follow up.'

SimCalc is een voorbeeld van een computeromgeving waarin leerlingen actief en onderzoekend met wiskunde aan de gang kunnen (Roschelle & Kaput, 1996). In dit programma kunnen leerlingen bijvoorbeeld de startpositie van een bewegend persoon veranderen en vervolgens bekijken wat er in een grafiek verandert. De bedoeling is dat leerlingen het concept richtingscoëfficiënt op deze manier leren. Het programma bevat geen opdrachten en bestaat alleen uit een animatie en een bijbehorende grafiek.

Een ander voorbeeld is het Cabri Géomètre (Balacheff & Sutherland, 1994; Falcade, Laborde, & Mariotti, 2007; Laborde, 2002). Het gaat hierbij om een microwereld waarin leerlingen op een directe manier geometrische basisobjecten kunnen manipuleren. Het is ook mogelijk om met menucommando's te werken, maar daarvoor is meer kennis, bijvoorbeeld over de sleutelbegrippen, vereist. Balacheff en Sutherland (1994) stellen dat voor leerlingen de woordenschat een andere inhoud krijgt van commando's in Cabri Géomètre naar betekenisvolle begrippen. In de omgeving zijn geen opdrachten, leerlingen moeten die bijvoorbeeld op werkbladen beantwoorden (Falcade et al., 2007). De terugkoppeling die het programma geeft, bestaat uit alleen de natuurlijke terugkoppeling (dat wil zeggen dat leerlingen in de microwereld de gevolgen van hun manipulaties kunnen zien).

Een laatste voorbeeld is PIE, de Probability Inquiry Environment (Vahey, Enyedy, & Gifford, 2000). Het wiskundige onderwerp van deze computeromgeving is kansrekening en combinatoriek. De omgeving bestaat uit leerling-gecontroleerde simulaties, dynamische representaties en gecontextualiseerde activiteiten. De steeds terugkerende vraag in het programma is of een kansspel 'eerlijk' is. De onderzoekscirkel bestond uit zes segmenten: spelregels, proberen, voorspellen, spelen, concluderen en principes. In elk segment zijn bijbehorende vragen en opdrachten ontworpen. In het laatste segment 'principes' is de vraag niet langer of het spel eerlijk is, maar welke generalisaties mogelijk zijn. Na de computersimulaties gaan de leerlingen aan de slag met kansspelen in de echte wereld, zoals het gooien van dobbelstenen. Naderhand worden de computeromgeving en de echte wereld met elkaar vergeleken. De controle die leerlingen hebben bestaat uit het starten en stoppen van simulaties en de snelheid waarmee gesimuleerd wordt.

De verschillende voorbeelden laten zien dat er op het gebied van wiskunde een groot aantal programma's ontwikkeld is op basis van de ontdekkende / onderzoekende benadering. Geen enkel voorbeeld had echter een hoge mate van interactiviteit, waarbij ook opdrachten en ondersteuning gegeven werd. Binnen de ontdekkende / onderzoekende benadering speelt dataverzameling en de daarbij horende evaluatie en interpretatie een grote rol.

3.5 Conclusie

De verschillende onderwijsbenaderingen lijken op veel punten overeen te komen. Zowel het heuristisch onderwijs als het realistisch onderwijs vraagt om open problemen, waarbij van te voren de aanpak niet direct duidelijk is. Bij wetenschappelijk ontdekkend/onderzoekend leren lijkt dit in mindere mate een vereiste te zijn. Bij deze onderwijsbenadering ligt sterk de nadruk op dataverzameling en toetsing van ideeën. Hier lijken activiteiten als evalueren en interpreteren een veel nadrukkelijker rol te krijgen. Bij de realistische onderwijsbenadering speelt abstraheren een belangrijke rol (horizontaal en verticaal mathematiseren). Binnen de heuristische onderwijsbenadering lijkt structureren (bijvoorbeeld de heuristische gedragingen: het uit de herinnering terugroepen van gerelateerde problemen en het exploreren van symmetrie) een relatief grote plaats in te nemen vergeleken met de andere twee benaderingen. Kortom binnen de verschillende onderwijsbenaderingen zijn de verschillende kernactiviteiten in meer of mindere mate belangrijk.

4 Bronnen

In het voorgaande deel hebben we de gewenste didactiek besproken om de in paragraaf 1.2 behandelde doelen zo goed mogelijk te halen. In dit gedeelte bespreken we de verschillende bronnen die ingezet kunnen worden voor het bereiken van de doelen. Eerst zullen we de verschillende bronnen in het wiskundeonderwijs in 4 VWO introduceren. Vervolgens zullen we een antwoord geven op de vraag hoe deze verschillende bronnen afwisselend dan wel naast elkaar ingezet dienen te worden. Tot slot zullen we kort ingaan op de voorwaarden aan de faciliteiten die gelden om de voorgestelde inzet van de bronnen mogelijk te maken.

4.1 De verschillende bronnen in het wiskundeonderwijs

In dit gedeelte bespreken we de verschillende bronnen zoals die in het wiskundeonderwijs in 4 VWO voorkomen. Eerst zullen we de verschillende bronnen identificeren. Daarna zullen we de kenmerken van de verschillende bronnen kort behandelen.

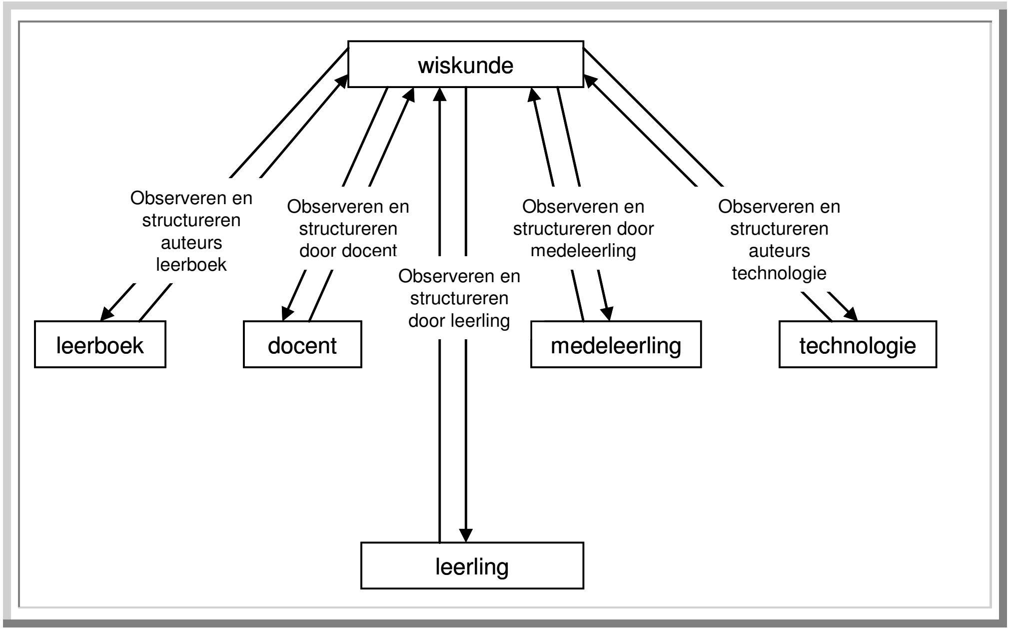
4.1.1 Welke verschillende bronnen zijn er?

Wanneer iemand iets wil leren over wiskunde dan kan hij zich afzonderen en nadenken over wiskunde. De leerling is geheel afhankelijk van de capaciteit en creativiteit van zijn eigen denkvermogen. In dit geval zal hij zelf proberen greep te krijgen op en samenhang te vinden in ‘de wiskunde’.

Het is ook mogelijk om te spreken met mensen die dit al eerder hebben gedaan of die op het zelfde moment over hetzelfde onderwerp iets leren. Op school zal de docent veelal tot de eerste categorie behoren en medeleerlingen tot de tweede categorie.

Het kan ook zijn dat een voorganger zijn bevindingen en overpeinzingen heeft opgeschreven of er een opdracht over gemaakt heeft. De producten van deze auteurs zijn dan door een leerling te raadplegen. Op school vallen de verschillende leermiddelen, zoals het leerboek en technologische middelen als computerprogramma’s en (grafische) rekenmachines, in deze categorie.

Ieder van deze personen of auteurs van leermiddelen interacteert met wiskunde (of met de ideeën van anderen over wiskunde). De verschillende personen zullen de wiskunde observeren en structureren. De verschillende personen hebben hun eigen ideeën over wiskunde en waarschijnlijk zullen ze die uitproberen en krijgen ze resultaten die hun ideeën bevestigen of weerleggen. Dit is weergegeven in het schema van figuur 4.1.



Figuur 4.1 *De interactie van de verschillende partijen en ontwerpers van leermiddelen met wiskunde*

4.1.2 Hoe verloopt de communicatie tussen de leerling en de verschillende bronnen?

Een leerling is dus niet alleen afhankelijk van wat hij zelf uitvindt over de wiskunde en zijn eigen capaciteiten, hij kan ook uit de bevindingen van anderen putten. De leerling kan via de docent, medeleerlingen, het leerboek of technologische middelen zijn kennis van de wiskunde uitbreiden. Deze bronnen moeten hun bevindingen dan wel aan de leerling overbrengen. Dit overbrengen kan door het geven van informatie, zonder uitwisselen van ideeën (eenzijdig), of door communicatie over en weer (tweezijdig). Bij eenzijdige communicatie geeft de bron informatie zonder dat de leerling over deze informatie met de bron van gedachten kan wisselen. Wanneer een bron bepaalde gegevens van een leerling vraagt en op basis daarvan een vaste inhoud levert, dan laten we dat ook vallen onder eenzijdige communicatie.

Bij het spreken met een docent of medeleerlingen is de communicatie tweezijdig. Ervaringen worden gedeeld. De leerling hoort de creativiteit en bevindingen van anderen en hij heeft de gelegenheid zijn eigen ideeën aan te scherpen door ze met anderen te delen.

Wanneer auteurs hun bevindingen in een boek hebben geplaatst, dan is de communicatie eenzijdig. De inhoud van de boodschap verandert niet door wat een leerling communiceert. Hooguit welke boodschap wordt overgebracht is beïnvloedbaar in het geval van moderne technologische middelen, zoals hyperteksten. Bij interactieve programma's is het onduidelijker of de communicatie eenzijdig of tweezijdig is. De programma's geven bij een bepaalde invoer een vooraf vastgelegde uitvoer. Invoer moet door het programma gecategoriseerd worden. Hoe beter dit gebeurt, hoe meer tweezijdig de communicatie lijkt.

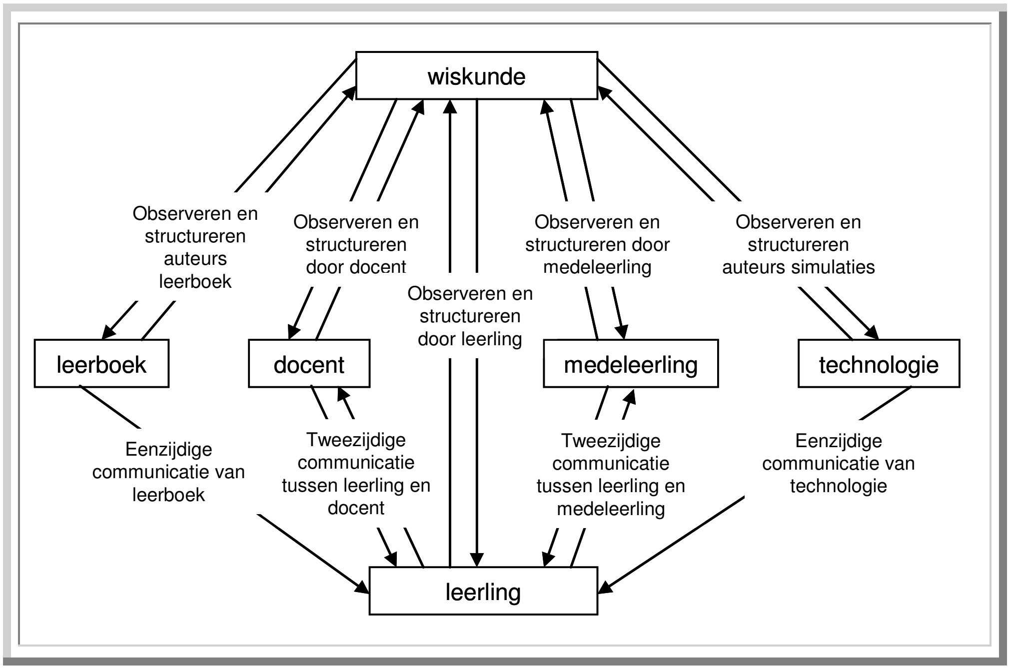
Op dit moment vindt veel onderwijskundig onderzoek plaats naar het ontwikkelen en inzetten van computerprogramma's op het niveau van het onderwijzen van probleem-oplosvaardigheden en het geven van feedback. Voor het geven van feedback moet de computer het gegeven antwoord gaan beoordelen. Alle mogelijke antwoorden moeten van te voren door de programmeurs geïnventariseerd worden. Vervolgens moeten zij programmeren bij welke antwoorden, welke feedback gegeven moet worden. Daarbij moet men in gedachten houden dat wanneer het goede antwoord bijvoorbeeld $\frac{5}{3}$ is, leerlingen allerlei verschillende vormen voor dit antwoord kunnen kiezen bij het intikken, zoals 5/3; -5/-3; 1 2/3; 10/6; 1,7; 1.7; 1,67 en vijf derde. Daarnaast kunnen zij (per ongeluk) beginnen met een spatie. Op het oog ziet men direct dat overal het (afgeronde) goede antwoord staat, maar voor elke andere vorm moet de computer verteld worden wat wel en wat niet goed is. Het geven van feedback in een open antwoord opdracht, vraagt een grote tijdsinvestering bij de ontwikkeling.

We hebben het nu alleen nog maar over het eindantwoord gehad. Feedback op het oplossingsproces is ook belangrijk. Omdat voor het probleemoplossen geen vastliggende oplossingsroute bestaat en bovendien vaak meerdere oplossingsroutes mogelijk zijn, treden er problemen op bij het geven van feedback. Een aantal auteurs stelt dat het niet mogelijk is om een computer voor dit soort feedback in te zetten. Freudenthal (1991) stelt bijvoorbeeld dat leren volgens de didactiek van herontdekken niet per computer kan vormgegeven worden, omdat computers het formalisme voor menselijke creativiteit missen. Ook Cheng (1999) noemt de problemen met het geven van feedback. Computers geven volgens hem geen ondersteuning aan

- het modeleren,
- de vertaling van essentiële informatie in gemakkelijk te gebruiken representaties,
- het genereren van expressies uit algemene formules of andersom en
- de interpretatie van resultaten.

Cheng (1999) concludeert dan ook dat, ook al kunnen computers een bijdrage leveren aan het onderwijs, zij met de huidige staat van de technologie niet de docent kunnen vervangen.

In feite is het programma degene die vraagt, en de leerling degene die antwoordt. Een uitwisseling van gedachten is nog niet gerealiseerd binnen de technologie. Om de hiervoor genoemde redenen kiezen we er bij de huidige stand van zaken voor om de communicatie tussen technologie en leerling eenzijdig te noemen. Het nieuwe schema staat in figuur 4.2.



Figuur 4.2 *Communicatie tussen de verschillende partijen en de leerling over wiskunde*

4.1.3 Interactie tussen de verschillende bronnen

Natuurlijk heeft niet alleen de leerling beschikking over bronnen, hetzelfde geldt voor medeleerlingen en de docent. In zekere zin hebben ook de auteurs van de boeken en technologische middelen geput uit de andere bronnen. Alleen omdat in de les de inhoud van de leerboeken en technologische middelen vast staat, laten we deze verbanden achterwege. De medeleerlingen en in mindere mate ook de docent zullen tijdens de lessen hun bevindingen en overpeinzingen aanpassen, puttend uit andere bronnen. De communicatie tussen de docent en de leerlingen gaat niet alleen over hun bevindingen met en overpeinzingen over ‘wiskunde’, maar ook over wat het leerboek en de technologische middelen hun vertellen.

4.1.4 Vervolg

Het uiteindelijke schema is een vrij complex schema. Het is dan ook niet moeilijk om te bedenken dat het hoe en het wanneer inzetten van verschillende bronnen een complex vraagstuk is. Voordat we iets over dit vraagstuk zeggen, zullen we ons eerst verdiepen in de kenmerken van de verschillende bronnen. We zullen ons bij deze bespreking vooral richten op de aspecten van de bron die te maken hebben met de in hoofdstuk 1.3 behandelde kernactiviteiten en voorgestelde vormen van ondersteuning.

4.2 Korte introductie van de verschillende bronnen

Zoals we in figuur 4.2 lieten zien, heeft een leerling verschillende bronnen tot zijn beschikking. In deze paragraaf zullen we één van deze bronnen, namelijk het leerboek, als uitgangspunt nemen. Het leerboek is concreet en gelijk in verschillende klassen, daar waar docenten en medeleerlingen verschillen. We zullen bespreken waar in onze ogen aanvulling op het leerboek wenselijk is en hoe en of deze aanvulling door het te ontwikkelen materiaal dan wel door de docent gegeven kan/dient te worden. We zullen deze bespreking aan de hand van de verschillende kernactiviteiten doen. Voorafgaand aan deze bespreking zullen we echter een korte introductie van de verschillende bronnen geven.

4.2.1 Het leerboek

Keuze voor methode Getal en Ruimte

In het Nederlandse wiskundeonderwijs worden verschillende leermethoden gebruikt. Eén van de meest gangbare wiskunde methoden is de methode Getal & Ruimte. Omdat methoden onderling verschillen, onder andere wat betreft de tijdstippen waarop verschillende onderwerpen worden behandeld, is er voor gekozen om in het onderzoek scholen te laten deelnemen, die met de methode Getal & Ruimte werken. In de bespreking van het leerboek, zullen we (vooral) het leerboek van de methode Getal & Ruimte bespreken.

Een boek heeft slechts beperkte ruimte. Lange teksten zal bijna geen enkele leerling lezen, kleinere stukken tekst lezen de meeste leerlingen ook niet. Het gevolg daarvan is dat een boek keuzes moet maken in waar het zich op richt in stukken tekst. Daarom zal een boek bij voorbaat al niet alle ondersteuning bieden, die we in hoofdstuk 1.3 hebben voorgesteld. Om al deze punten namelijk te behandelen is veel verklarende tekst nodig. In dit gedeelte zullen we bespreken welke keuzes de samenstellers van Getal en Ruimte gemaakt lijken te hebben.

Differentiatie

Een boek dat de leerling in handen krijgt, is voor elke leerling hetzelfde, de inhoud verandert niet. Verschillende leerlingen krijgen met eenzelfde boek te maken. De leerlingen kunnen er zelf voor kiezen extra opgaven te maken uit de gemengde opgaven in het boek of uit de diagnostische toets (al staat die laatste vaak wel op de studiewijzer ingepland). Ook staan er (alhoewel niet in hoofdstuk 1) differentiatie opgaven, die volgens de inleiding van het boek bedoeld zijn voor de leerlingen met wiskunde B. Maar binnen een opgave wordt er niet aan differentiatie gedaan door bijvoorbeeld voor de betere leerlingen dieper op het vraagstuk in te gaan of door te vragen naar de achterliggende wiskunde.

Gemaakte keuzes in het boek

Een eerste punt waarop keuzes gemaakt moeten worden, is het tonen of het zelf ontdekken van kennis. In het boek wordt vrijwel direct de theorie geïntroduceerd. Bij de theorie worden uitgewerkte voorbeelden gegeven. Met de verschillende opgaven, die op de theorie volgen, worden de leerlingen geacht zelf aan de slag te gaan. Zij kunnen daarbij de voorbeelden gebruiken om de opgave te maken. Het is aan de leerling om te ontdekken waarin de nieuwe opgave verschilt van het voorbeeld. Een verdere beschrijving is te vinden in bijlage B.2.

De auteurs van het boek doen in het boek zelf geen uitspraak over welk doel zij voor ogen hebben:
- een diep inzicht in de wiskunde of
- vooral het kunnen gebruiken van de stof (oefenen van technieken).

Het boek biedt zowel aangeklede opgaven als kale rijtjes aan. Deze kale rijtjes zijn geschikt voor het inoefenen van technieken. Wanneer we kijken naar de aandacht die bij de aangeklede opgaven aan het werken met die context wordt besteed (zie o.a. ook de gedeelten abstraheren en structureren), dan lijkt het boek beperkte aandacht aan diep inzicht te besteden en vooral uit te zijn op het kunnen toepassen van technieken. Dit idee wordt versterkt wanneer we kijken naar de introductie van werkschema's die oplosschema's voor standaardproblemen zijn (zie ook onderstaand voorbeeld in figuur 4.3).

In het volgende overzicht staan alle manieren om kwadratische vergelijkingen algebraïsch op te lossen.

Het oplossen van kwadratische vergelijkingen

1 Het type x^2 = getal.

Bijvoorbeeld

∨ betekent of

a $x^2 = 5$ geeft $x = \sqrt{5} \vee x = -\sqrt{5}$

b $x^2 = -16$ heeft geen oplossingen — *Een kwadraat is niet negatief.*

c $(x-1)^2 = 9$
$x - 1 = 3 \vee x - 1 = -3$
$x = 4 \vee x = -2$

De schaduwvergelijking is $p^2 = 9$.
$p^2 = 9$ *geeft* $p = 3 \vee p = -3$

2 Met ontbinden in factoren.

- Maak het rechterlid nul door alle termen naar het linkerlid te brengen.
- Ontbind het linkerlid in factoren.
- Pas toe $A \cdot B = 0$ geeft $A = 0 \vee B = 0$.

3 De *abc*-formule.

- Maak het rechterlid nul door alle termen naar het linkerlid te brengen.
- Je kunt het linkerlid van $ax^2 + bx + c = 0$ niet ontbinden in factoren.

Gebruik dan de *abc*-formule $x = \dfrac{-b - \sqrt{D}}{2a} \vee x = \dfrac{-b + \sqrt{D}}{2a}$

met $D = b^2 - 4ac$.

Aan de **discriminant** D is te zien hoeveel oplossingen er zijn:
- voor $D < 0$ zijn er geen oplossingen
- voor $D = 0$ is er één oplossing
- voor $D > 0$ zijn er twee oplossingen.

(Reichard et al., 2002) blz. 21, hoofdstuk 1, voorbeeld

Figuur 4.3 *Voorbeeld van een oplosschema uit het leerboek*

Ook de geslotenheid van opdrachten en het vragen naar een getal als antwoord en daar niet verder bij stilstaan (ook niet in het antwoordenboek) ondersteunt deze gedachte verder. We zullen in het vervolg van deze paragraaf zien, dat in het boek tal van mogelijkheden zijn om met de andere bronnen de kernactiviteiten inzichtelijk (beter) te ondersteunen.

4.2.2 Technologie

Technologie is een heel brede noemer waaronder veel verschillende middelen vallen, zoals webpagina's, rekenmachines, GR's, applets (zoals te vinden op de webpagina van het Freudenthal instituut), maar ook programma's als WiskHint, Maple, enz. De inzet van technologische middelen is relatief nieuw in het onderwijs. Pakweg een halve eeuw geleden bestonden deze technologische (hulp)middelen eenvoudigweg nog niet. In het wiskundeonderwijs is de laatste 50 jaar behoorlijk wat veranderd door de invoering van technologische middelen (zie ook Vonk & Doorman, 2000). Eerst kwam de rekenmachine, met als gevolg dat allerlei regels voor het hoofdrekenen niet meer geleerd hoefden te worden. Daarna volgde de GR en allerlei computerprogramma's. De GR wordt in de bovenbouw volop gebruikt en mag ook bij het centrale eindexamen gebruikt worden. Computerprogramma's worden steeds vaker ingezet. Het maken van het centrale examen op de computer bevindt zich op dit moment van schrijven (2008) nog in de test fase.

Hoewel op scholen maar mondjesmaat computer programma's worden gebruikt (vooral wanneer we het internet als informatiebron buiten beschouwing laten) is er wel veel onderzoek naar het gebruik van computer programma's gedaan. Dit gebruik kan heel veel verschillende vormen aannemen. Een specificatie van het soort computerprogramma's en het gebruik daarvan is gewenst. Harskamp et al (1996) maken een indeling in de opbouw van de didactische functie van computergebruik:

1. Als basisfunctie kan de computer ingezet worden om berekeningen uit te voeren en antwoorden te controleren. Een voorbeeld hiervan is de inzet van de rekenmachine in het onderwijs of computerprogramma's met gelijkwaardige mogelijkheden.
2. Een stap verder gaat het gebruiken van de computer voor het tekenen en verkennen van grafieken. Een voorbeeld hiervan is het gebruik van de GR in het onderwijs. Een ander voorbeeld zijn applets waarbij je de waarden van de variabelen in formules kunt veranderen, waarna de computer de nieuwe grafiek tekent, zonder dat de computer nog verdere informatie geeft.
3. De volgende stap is het onderwijzen van probleemoplosvaardigheden met behulp van de computer en het geven van feedback.
4. Op het hoogste niveau komt de didactiek van de computeromgeving volledig overeen met de didactiek van het studieboek. In hun publicatie komen de auteurs tot de conclusie dat op dat moment er geen computeromgeving was die dit hoogste niveau bereikt had. De meeste omgevingen voerden slechts berekeningen uit zonder de leerling hierbij te betrekken.

De discussies over wat er als gevolg van het inzetten van de GR en computers niet langer geleerd hoeft te worden en wat noodzakelijk blijft om te leren, zijn volop aanwezig. Ook over het moment van inzetten lopen de meningen uiteen. Kunnen leerlingen goed werken met rekenmachines, GR's en computerprogramma's wanneer de achterliggende theorie (nog) niet behandeld is? Het is volgens Drijvers (2002) zaak om te zorgen dat de lerende de techniek die in de computeromgeving gebruikt wordt, doorziet op basis van de pen-en-papier ervaring die de lerende al heeft. Buchberger (1989) suggereert dat studenten alleen van computeralgebra gebruik dienen te maken, wanneer ze in staat zijn om de bewerkingen met de hand uit te voeren. De praktijk op het VWO is op dit moment echter anders. Zo gebruiken de leerlingen in 4 VWO de GR om maxima te bepalen, maar kunnen zij dit niet (voor alle soorten tweedegraads functies) met de hand. De gedachte is dat leerlingen niet hoeven te begrijpen hoe het antwoord bereikt is, de GR berekent dit immers voor hen, ze hoeven alleen nog te leren wat ze met dit antwoord kunnen. Daarmee zijn we terug bij de discussie over wat er wel en niet geleerd hoeft te worden als een nieuwe technologie ingezet wordt.

Telkens als een nieuw technologisch middel in het onderwijs ingevoerd wordt, vindt onderzoek plaats naar de mogelijkheden, beperkingen en gevolgen van de inzet van dit middel. Uit de discussies en conclusies van het onderzoek naar en de ervaring met de inzet van de GR, kunnen allerlei lessen geleerd worden wat betreft de inzet van andere computerprogramma's. Een goed voorbeeld hiervan zijn de onderzoeksvragen, die Harskamp et al. (1996) zich hebben gesteld in hun onderzoek naar de invloed van het gebruik van de GR op het begrip en de wiskundige vaardigheden van leerlingen:

- Gebruiken leerlingen die met het nieuwe materiaal werken vaker een visuele strategie om problemen op te lossen dan leerlingen die er niet mee werken?

- Behalen leerlingen die het nieuwe materiaal gebruiken betere resultaten bij het oplossen van wiskunde problemen dan leerlingen die uitsluitend met het bestaande materiaal werken?
- Welke knelpunten stellen docenten vast in de leerstofuitlijning en de opgaven van het lesmateriaal?
- Geven docenten die met het nieuwe materiaal werken meer probleem gericht onderwijs en krijgen de leerlingen meer gelegenheid tot zelfwerkzaamheid dan in andere situaties en welke organisatorische problemen doen zich voor bij gebruik van het nieuwe materiaal?

We herkennen hier veel huidige onderzoeksvragen van het onderzoek naar de inzet van computerprogramma's, zelfs enkele vragen die we in dit proefschrift hopen te beantwoorden.

Bij de aspecten waarvan wij vinden dat het boek aangevuld dient te worden, zullen we dan ook trachten, op basis van reeds uitgevoerd onderzoek naar technologieën, het te ontwikkelen materiaal daarvoor in te zetten.

In hoofdstuk 3 concludeerden we dat onderzoekend leren een veelbelovende didactiek is. Om deze vorm van leren te realiseren ligt de inzet van technologie voor de hand. Wanneer we technologie inzetten om leerlingen experimenten te laten doen en data te laten verzamelen, dan betekent dit dat er nog een extra vorm van ondersteuning gegeven dient te worden. Reid, Zhang en Chen (2003) onderscheiden drie soorten ondersteuning bij het doen van onderzoek:

- interpretatieve ondersteuning,
- experimentele ondersteuning en
- reflectieve ondersteuning.

Interpretatieve ondersteuning dient volgens deze auteurs om leerlingen te helpen bij het verkrijgen van de juiste betekenis van de begrippen en het genereren van beantwoordbare onderzoeksvragen. Experimentele ondersteuning dient om leerlingen te helpen bij het opstellen en doen van experimenten op een systematische en logische manier en het trekken van juiste conclusies uit de resultaten van de experimenten. Reflectieve ondersteuning dient om leerlingen te helpen de nieuw verworven kennis te integreren met de bestaande kennis en het zelfbewustzijn tijdens en van het leerproces te vergrootten.

4.2.3 De docent

Bij de bespreking van de ondersteuning van het leren van de kernactiviteiten, zullen er zaken zijn waarvoor noch het boek, noch de technologische middelen (voldoende) ondersteuning (kunnen) bieden voor leerlingen. Het is daarom wenselijk dat de overige twee bronnen, namelijk de medeleerlingen en de docent, deze nog ontbrekende ondersteuning kunnen bieden. Deze twee bronnen hebben beide het voordeel dat tweezijdige communicatie mogelijk is en dat ze de mogelijkheid hebben (mits ze in staat zijn de informatiebehoefte van de leerling juist te bepalen) om de keuze van de informatie die ze doorspelen heel nauw af te kunnen stemmen op de behoefte van de leerling, met andere woorden ze zijn heel flexibele bronnen.

Een belangrijke karakteristiek van de docent is de mogelijkheid van tweezijdige communicatie. Een docent is vaak een prettige informatiebron voor de leerling. Moet bij technische hulpmiddelen een vast protocol gevolgd worden om de gewenste informatie op het scherm te krijgen, een docent is veel flexibeler. In tegenstelling tot medeleerlingen heeft de docent grondige kennis van het vakgebied. Dit kan nadelig zijn als het de docent belemmert om aansluiting te vinden bij de leerlingen. Het is echter ook voordelig. Deze flexibele vakkennis maakt het mogelijk om precies te balanceren tussen het tonen en zelf ontdekken. De docent kan zijn beheersing van de stof uitbaten door het volgen van de redenering van de leerling om vervolgens aan te sluiten aan de leerling en hem een stapje verder te helpen. Zijn kennis, maar ook zijn ervaring, kan de docent benutten om precies op het punt van de zone van nabije ontwikkeling[1] te komen.

[1] Hiermee wordt bedoeld dat de docent de leerling uitdaagt door net voorbij het punt te gaan, tot waar de leerling de stof beheerst, door bijvoorbeeld een opdracht te geven die net iets moeilijker is dan de opdracht die de leerling al heeft opgelost.

4.2.4 Medeleerlingen

Mede dankzij het sociaal-constructivisme is er ruime(re) aandacht voor samenwerken gekomen (Verloop & Lowyck, 2003). Een voordeel van samenwerking tussen leerlingen is dat ze elkaars taal spreken (Noddings, 1985), daar waar er communicatieproblemen kunnen optreden tussen docent en leerling (Korthagen & Lagerwerf, 1995). Het is echter niet zo dat leerlingen per definitie elkaars taal spreken. Sfard (2001) vindt bijvoorbeeld dat leerlingen elkaar soms ook misverstaan. Volgens de auteur moet er meer aandacht komen voor zaken die tot dan toe als irrelevant gezien werden en dat zijn er volgens haar veel. Op een aantal gaat ze in haar artikel in, zoals intenties (het wel of niet erop uit zijn om ideeën uit te wisselen), en vertrouwen in eigen kunnen (bijvoorbeeld voor het wel of niet beginnen van een eigen denklijn).

Over het algemeen biedt onderzoek naar samenwerkend leren een positief beeld, mede doordat leerlingen een probleem vanuit verschillende gezichtspunten leren zien en met verschillende interpretaties geconfronteerd worden (Kreijns, Kirschner, & Jochems, 2003; Verloop & Lowyck, 2003). Er zijn echter ook andere geluiden, waarbij samenwerken een negatieve invloed heeft op de leerresultaten (zie o.a. Kreijns et al., 2003; Leidner & Fuller, 1997; Rogers et al., 2000). Het is dus nodig om te bepalen onder welke omstandigheden het samenwerken een positieve invloed op het leren heeft. Onderzoek richt zich onder andere op welke leerlingen het beste kunnen samenwerken (o.a. Johnson & Johnson, 1987; Wang & Lin, 2007; Webb & Palinscar, 1996) en hoe deze samenwerking (het beste) vorm gegeven kan worden (o.a. Dewiyanti, 2005; Gijlers, 2005; Kreijns et al., 2003; Leidner & Fuller, 1997; Slavin, 1996; Webb & Palinscar, 1996).

Onderzoek naar samenwerken op een informele wijze waarbij leerlingen tijdens individueel werken een medeleerling zelf om samenwerking kunnen vragen is er weinig (Slavin, 1996). In dit onderzoek laten we de keuze aan de docent (en leerlingen zelf) om te bepalen of en hoe er samengewerkt wordt.

4.3 Ondersteuning van de activiteiten door het boek

Om te kunnen bepalen op welke punten het boek aangevuld moet worden, gaan we eerst na in hoeverre de kernactiviteiten in het boek ondersteund worden. In deze paragraaf beschrijven we daarom het leerboek aan de hand van de kernactiviteiten.

4.3.1 Abstraheren

Abstraheren is het ontdoen van het concrete. Bij abstraheren wordt de situatie ontdaan van situatiegebonden aspecten om in meer algemenere termen weergegeven te worden. Freudenthal (1991) betoogt dat leerlingen moeten leren om problemen/vraagstukken op de juiste manier te mathematiseren. Hij gebruikt de term horizontaal mathematiseren voor het vertalen van de rijke tekst naar een wiskundige beschrijving. Biedt het boek (voldoende) ondersteuning voor het (leren van) horizontaal mathematiseren, voor het leren ontdoen van situatiegebonden aspecten? Biedt het boek ondersteuning voor het leren zien van overeenkomsten en verschillen tussen concrete contexten en geabstraheerde vormen?

Belevingswereld en focus

In het boek van Getal en Ruimte worden contextrijke opdrachten afgewisseld met kale rijtjes sommen. Contextrijk wil in het geval van het boek zeggen dat de opgave met een situatie aangekleed is. De situaties zijn uit de beroepspraktijk (het loon van iemand berekenen wanneer dit bestaat uit een vast en flexibel deel), vaak uit de economie (de gasrekening, een autoverhuurbedrijf, aantal klanten in een supermarkt of dierentuin) en uit wat meer exacte (het leeglopen van een vat) en biologisch (het kweken van bacteriën) onderzoek. De situaties komen meestal niet uit de belevingswereld van de leerling. In zijn gesprekken met vrienden zal een leerling het niet over het kweken van bacteriën, het aantal klanten of het leeg laten lopen van een vat hebben. Hoewel de situaties niet uit de belevingswereld van de leerling komen, kan hij zich er waarschijnlijk wel een voorstelling van maken.

Het voorstellen van de situatie is vaak niet eenvoudig omdat de beschrijving van de situatie in het boek beperkt is tot 3 à 4 zinnen. Een voorbeeld van het introductieverhaaltje van een opgave is gegeven in figuur 4.4.

> Een ijscoman weet uit ervaring dat hij op een zonnige dag bij een prijs van 130 cent per ijsje 700 stuks verkoopt. Bij elke 10 cent prijsverhoging verkoopt hij er 50 minder. Er bestaat een lineair verband tussen de prijs p en het aantal verkochte ijsjes q.
>
> (Reichard et al., 2002) blz. 34, hoofdstuk 1, opgave 50

Figuur 4.4 *Voorbeeld van een introductietekst van een opgave uit het leerboek*

De context is gereduceerd tot een kort verhaaltje. De situatie die wordt geschetst is die van een ijscoman die ijsjes verkoopt op een zonnige dag. Meer wordt er niet genoemd. In de schets van de situatie wordt niets gezegd over bijvoorbeeld de klanten of de plaats waar de ijscoman zijn waren verkoopt. Er wordt geen informatie gegeven over de kinderen die hun ouders proberen over te halen een ijsje te kopen. Hoe lekker zij ijs vinden en hoe graag de ouders de wensen van hun kinderen willen inwilligen, maar rekening houden met allerlei zaken als de inhoud van hun portemonnee en de hoeveelheid ijs die de kinderen al hebben gehad. Er staat ook niets geschreven over de klant die een keus moet maken uit het aanbod van de ijscoman. Bekende overwegingen als ‘welke neem jij?’, een vraag die toch voor veel mensen bij het kopen van ijs hoort, blijven ongenoemd. Als we het introductie verhaal lezen dan lijkt het of alle ijsjes even duur zijn, namelijk 130 cent. Maar de ervaring van de leerlingen is een andere; de grootste en populairste ijsjes zijn vaak duurder dan de kleine ‘gewone’ ijsjes. De plaats waar de ijscoman met zijn kar staat is ook belangrijk. Hoeveel concurrenten heeft hij en hoever staan die bij hem uit de buurt? Als de leerling aan een ijscoman die ijsjes verkoopt denkt, zal hij allerlei andere associaties hebben die in dit verhaal niet zijn genoemd. De leerling kan zich wel een voorstelling maken, maar is dit wel een voorstelling die hem helpt de opdracht beter te begrijpen en op te lossen?

Zoals beschreven is veel ‘overbodige’ informatie weggelaten in de introductie tekst van de situatie. Alleen de informatie, die voor de gewenste uit te voeren berekening nodig is, wordt vermeld. Er is geselecteerd welke informatie gegeven wordt. Het focussen heeft deels al plaats gevonden. Daarnaast is er versimpeld. Zoals we zagen, hebben of alle soorten ijsjes dezelfde prijs of wordt er slechts naar één soort ijsje gekeken. De eerste vertaalslag van de complexe context naar een abstract wiskundig model is al gemaakt en niet door de leerling. In zijn betoog over wat er vaak mis gaat bij het gebruik van contexten door ontwerpers van leermaterialen, noemt Petraglia (1998b) dit punt ook. Petraglia (1998b) vraagt zich terecht af wiens rijkheid van context het eigenlijk is. Hij merkt op dat de informatie die beschikbaar is, niet de informatie is die verstrekt wordt door de echte wereld, maar gegenereerd is door de ideeën van de ontwerpers/auteurs (ideeën over welke informatie de echte wereld zou verstrekken en hoe die informatie eruit zou zien). Dat er informatie uit een situatie uit het dagelijks leven wordt gegeven, betekent dus niet dat er dan per definitie sprake is van een authentieke, contextrijke opdracht. Er heeft al simplificatie en selectie plaats gevonden.

Hoe zit het met de overige opdrachten in het boek? Wat zijn de algemene conclusies met betrekking tot het gebruik van contexten, de belevingswereld en de eerste abstracties? Zoals we bij de voorbeelden van de keuze van contexten zagen (zie vorige pagina) gaat het in het algemeen om situaties die niet direct uit het dagelijkse leven van de leerling komen, maar die wel voor te stellen zijn door de leerling (zie voor twee extra voorbeelden figuur 4.5). Telkens gaat het om korte situatieschetsen van een zin of vier. Noodzakelijkerwijs is de informatie die gegeven wordt geselecteerd. Vaak is de complexe situatie uit het dagelijkse leven gesimplificeerd. De eerste stappen in het abstractieproces van de situatie uit het dagelijkse leven zijn door de auteurs gemaakt.

Na het innemen van een medicijn hangt de concentratie C in mg/liter van het geneesmiddel in het bloed af van de tijd die verlopen is sinds het innemen. Hierbij hoort de formule $C = -0{,}0004t^3 + 0{,}04t^2 + 0{,}28t$ met t in minuten.

(Reichard et al., 2002) blz. 34, hoofdstuk 1, opgave 21

Het jongerenblad POPcollage start een reclamecampagne om de losse verkoop te verhogen. De campagne zal enkele maanden duren. De uitgever van het blad hanteert voor het jaar na de start van de reclamecampagne het model

$$A = 9 + \frac{5}{(0{,}05t - 2)^2 + 1}.$$

Hierin is A het aantal wekelijks verkochte exemplaren in duizendtallen en t de tijd in weken met t = 0 op het moment dat de campagne begint.

(Reichard et al., 2002) blz. 34, hoofdstuk 1, opgave 23

Een voetballer trapt de bal de lucht in. De hoogte h van de bal als functie van de tijd t kan beschreven worden door de formule $h = -5t^2 + 15t$. Hierbij is h in meters en de tijd t in seconden.

(Reichard et al., 2002) blz. 34, hoofdstuk 1, opgave 42

Figuur 4.5 *Voorbeelden van simplificatie van situaties uit het dagelijks leven*

Positie en bijbehorende vraag

Behalve dat situaties vaak niet direct uit de belevingswereld van de leerling komen, zijn ze ook niet vanuit de positie van de leerling geschreven. Dit geldt ook voor het voorbeeld van figuur 4.4. Een leerling heeft waarschijnlijk zelf alleen ijsjes gekocht en niet verkocht. De leerling moet zich verplaatsen in de positie van de ijscoman.

Met het zich verplaatsen in de positie van een ijscoman, moet de leerling zich ook vragen gaan stellen, die hij zich bij zijn dagelijkse bezigheden niet snel zal stellen. Een ijscoman moet de prijs van de ijsjes bepalen. De vraag is nu welke bedrag de ijscoman voor de ijsjes wil vragen. Dit is iets nieuws voor een leerling; het is niet gemakkelijk om zich deze vraag en het beantwoorden daarvan voor te stellen. De omschrijving en informatie gaat over een vraag, die een leerling zichzelf niet automatisch zal stellen. We zullen dit in het volgende gedeelte nog iets verder uitwerken.

Voor veel opdrachten in het boek geldt dat de situatieschets niet vanuit de positie van de leerling is geschreven. Vaak wordt er geschreven vanuit de positie van een econoom of specialist (bijvoorbeeld bij de groei van bacteriën of de afname van de concentratie medicijn in het bloed). Bij veel opdrachten moet de leerling daarom redeneren vanuit een perspectief wat normaal gesproken niet het zijne is.

De variabelen, de waarden van deze variabelen en relaties/verbanden tussen deze variabelen

Kan een leerling zich helemaal geen voorstelling maken over het vraagstuk van het verband tussen de prijs en het verkochte aantal? Met wat dieper nadenken kan de leerling wel tot een eerste voorstelling van het verband tussen beide komen. Een leerling weet van zichzelf wel dat hij een ijsje dat 100 euro kost niet koopt. Wanneer de ijsjes gratis zijn, eet hij er zoveel als hij op kan voor ze smelten en voordat hij misselijk wordt. Een leerling kan zich wel voorstellen dat prijs en aantal op een bepaalde manier van elkaar afhangen. Een ijsje van 100 euro koopt hij niet, van 10 euro ook niet, maar van twee euro misschien wel. Waar ligt de grens precies? Daar heeft een leerling vast niet vaak over nagedacht. Dat die grens bij hem op een andere plek ligt dan bij andere mensen, daar zal een leerling over het algemeen ook niet (heel erg diep) over nagedacht hebben. Het gaat hier dus om een globaal idee van het verband tussen prijs en aantal en de getalswaarde van de prijs en het aantal dat daar ongeveer bij verwacht kan worden.

Wanneer we nu kijken naar de informatie, die in de situatieschets gegeven worden, dan gaat deze informatie over het verband tussen en de getalswaarden van deze twee variabelen. Er is gegeven hoeveel ijsjes er bij een bepaalde prijs verkocht worden (getalswaarde) en hoe dit aantal verandert als de prijs verandert (verband). Er wordt zelfs expliciet genoemd dat het om een lineair verband gaat en dat de variabelen waar naar gekeken wordt de prijs en het aantal zijn. Deze variabelen zijn overigens een keus van de auteur, het had bijvoorbeeld ook de temperatuur en het aantal verkochte ijsjes kunnen zijn. Alleen in dat geval zou er geen sprake zijn geweest van een optimaliseringvraagstuk (wat het in figuur 4.4 wel is). Het introducerende verhaal bevat voornamelijk informatie over de door de auteur (en voor de beoogde som) belangrijk gevonden variabelen, de relatie tussen die variabelen en de waarden van die variabelen.

Dit geldt in het algemeen voor de inhoud van de inleidende teksten. Deze bevatten vooral informatie over welke variabelen bekeken worden en hoe die variabelen met elkaar in verband staan. Over de waarden van de variabelen wordt alleen iets gezegd wanneer het verband niet expliciet in de vorm van een formule gegeven is.

Eerste samenvattende conclusie introductieteksten

In het leerboek is de context vaak een situatie die niet in het dagelijks leven van de leerling voorkomt omdat (1) de leerling zich niet in de positie bevindt van waaruit de context beschreven wordt en (2) de vragen die gesteld zijn geen vragen zijn waarmee de leerling in het dagelijks leven wordt geconfronteerd. De informatie die in deze inleidende teksten wordt gegeven heeft vooral betrekking op welke variabelen van belang zijn en hoe deze variabelen zich tot elkaar verhouden. Vóór het beschrijven van de situatie heeft selectie van informatie plaats gevonden. De eerste stappen in het abstractieproces van de complexe werkelijkheid naar een wiskundig vraagstuk zijn door de auteurs gemaakt.

Verschil in uitgangspunt

Zoals we hebben laten zien, is de schets van de situatie in figuur 4.4 er één vanuit de optiek van een optimaliseringvraagstuk. Hoewel er gebruik wordt gemaakt van een bekende context, moet de leerling toch met andere ogen naar deze context kijken. De leerling moet zelf de vertaalslag maken van zijn eigen ervaringen, naar de gegevens en de vraag in de opdracht, voordat hij/zij met de opdracht aan de slag kan. De leerling moet op het uitgangspunt komen waarvan de auteur uitgaat dat hij is na het lezen van de introductie tekst. De leerling moet de abstractiestappen die door de auteurs van de opgave zijn gemaakt, doorzien. Hij moet kunnen volgen en begrijpen wat er gebeurd is. Zijn uitgangspunt na het lezen van de tekst moet hetzelfde zijn als wanneer hij de vertaalslag zelf gemaakt had.

Het kan zijn dat de leerling deze vertaalslag niet maakt. Dat betekent dat er een gat gaapt tussen waar de leerling zich in het abstractieproces bevindt en waar hij geacht wordt zich te bevinden. De stap van de concrete situatie naar de geabstraheerde tussenvorm in de situatieomschrijving wordt niet gemaakt. In termen van Freudenthal: “de leerling wordt gedwongen mentale sprongen te nemen”. Met alle bijbehorende gevolgen.

Het vervolg van het abstractieproces

Hoewel de eerste abstractiestappen al hebben plaats gevonden, blijft nog een deel over voor de leerlingen om zelf te doen. In het voorbeeld uit figuur 4.4 is het verband tussen de prijs en het aantal in woorden geschetst. De leerlingen moeten vervolgens in de eerste opdracht deze informatie in de vorm van een formule schrijven (figuur 4.6).

a Geef de formule van p als functie van q.
b Druk de dagopbrengst R uit in q.
c Welke prijs moet de ijscoman voor een ijsje vragen om een maximale dagopbrengst te verkrijgen?

(Reichard et al., 2002) blz. 34, hoofdstuk 1, opgave 50

Figuur 4.6 *De eerste drie opdrachten die volgen op de inleidende tekst uit figuur 4.4 deel 1 hoofdstuk 4*

Er is een grote kans dat de leerling in de oriëntatie alleen een globaal idee heeft van het verband tussen beide. De leerling moet, voordat hij een formule op kan stellen, het verband tussen de prijs en het aantal precies beschrijven. De leerling moet van de formulering ‘als het ijsje duurder wordt, verkoopt de ijscoman minder ijsjes’ naar ‘als het ijsje 10 cent duurder wordt, verkoopt hij 50 ijsjes minder’. Hij moet van het globale idee, naar specifieke getallen. Dat is een volgende stap in het abstractieproces. De daaropvolgende stap is om te weten hoe de basisvorm van de formule eruit ziet. In dit geval is dat $p = a \cdot q + b$. Daarna moet de leerling de waarden van de variabelen a en b berekenen. Om dit te doen moet de leerling weten hoe hij de getallen hiervoor kan gebruiken. Bovendien geldt dat de leerling, om te weten dat hij a en b moet berekenen, een goed begrip moet hebben van de algemene vorm van de formule. Kortom er blijven diverse moeilijkheden en stappen in het abstractieproces voor de leerling over.

Van het kopen van een ijsje op een zonnige middag wordt overgegaan naar het cijferen met getallen en het werken met variabelen. Een ingewikkeld abstractieproces met veel deelstappen. Sommige daarvan zijn al door de auteurs van de opgave gemaakt. De rest moet door de leerlingen gemaakt worden.

Omgekeerd abstraheren

Met de geabstraheerde vorm van het verhaal (na het beantwoorden van opdracht a en b) is het makkelijker om opdracht c uit te voeren. De leerling moet dan wel de vraag vertalen naar de wiskundige vraag “bij welke q is R maximaal?” (dit is niet alleen een vorm van abstractie, maar ook een vorm van communicatie die de leerlingen onder de knie moeten krijgen). Het antwoord van de wiskundige berekening moet de leerling vervolgens gebruiken om de vraag in de opdracht in ‘gewone’ taal te beantwoorden. Hier wordt in feite het proces van abstraheren omgedraaid; de wiskundige berekening wordt omgekeerd geabstraheerd in een talig antwoord. Het abstracte antwoord wordt vertaald naar een antwoord op de contextvraag.

4.3.2 Structureren

In dit gedeelte bespreken we onder andere de manier waarop het boek ingedeeld is. In deze paragraaf belichten we telkens verschillende onderdelen van deze indeling. Het totaalbeeld van de indeling van het boek is beschreven in bijlage B.2.

Het is de bedoeling dat het lesmateriaal, waaronder het boek, in het begin voor leerlingen structuur aanbrengt. Op welke manier brengt het boek structuur aan in het lesmateriaal? We zullen in dit kader de volgende zaken van het boek bespreken:

- structuur door middel van de indeling van het boek
- structuur door verwijzingen binnen het hoofdstuk
- structuur door middel van een totaal overzicht
- structuur door het verwijzen naar voorkennis
- structuur door symbolen bij opdrachten

De indeling van het boek

Het boek is volgens een bepaalde structuur ingedeeld. Hoofdstuk 1 is onderverdeeld in vier paragrafen, namelijk de paragrafen lineaire formules, functies onderzoeken, vergelijkingen en ongelijkheden, en als laatste toepassingen van functies. Ook de paragrafen zijn weer opgedeeld in stukjes. Zo is de paragraaf vergelijkingen en ongelijkheden opgedeeld in een deel vergelijkingen en een deel ongelijkheden.

In het boek staan in hoofdstuk 1 in totaal 56 opdrachten. In een algemene uitleg voor in het boek wordt het werkschema (zie figuur 4.3) geïntroduceerd met de volgende woorden: “sommige problemen vragen om een standaard aanpak in de vorm van een werkschema”. Nadat een dergelijk werkschema is geïntroduceerd, wordt in het boek een voorbeeld gegeven en vervolgens staat een aantal opgaven waar het werken met dit schema mee geoefend kan worden. Door deze manier van indelen is het nauwelijks meer een vraag welke oplossingsstrategie gebruikt moet worden, maar meer hoe die strategie toegepast kan worden. Het boek kiest er voor het aantal problemen waar de leerling tegelijkertijd mee geconfronteerd wordt te beperken door een duidelijke indeling van typen problemen bij elkaar. Achter in het boek staat voor elk hoofdstuk een paragraaf met gemengde opgaven. Daar staan de opgaven meer door elkaar en is er bij een context ook sprake van meerdere soorten vragen.

Verwijzen binnen een hoofdstuk

Hoewel paragrafen in vormgeving een scherpe scheiding aanbrengen doen ze dat inhoudelijk niet even scherp. Er zijn veel verbanden tussen de stof uit de verschillende (sub)paragrafen en er is vaak ook ten dele overlap. In de paragraaf ‘functies onderzoeken’ komt bijvoorbeeld het onderdeel modelleren aan bod. Modelleren ligt dicht tegen toepassingen van functies aan. Bij het toepassen van wiskundige formules voor het oplossen van contextrijke problemen is een van de (moeilijkste) stappen het modelleren van de rijke context in wiskundige formules.

Op meer gebieden liggen de inhouden van de paragrafen dicht tegen elkaar aan. Een gevolg hiervan is dat in het boek terloops in verschillende paragrafen een aantal met elkaar verband houdende begrippen worden geïntroduceerd. Zo wordt in de paragraaf ‘toepassingen van functies’ de notatie van een oneindig interval geïntroduceerd, terwijl de rest van de bespreking van domein en bereik al in de paragraaf ‘functies onderzoeken’ heeft plaats gevonden. Een ander voorbeeld is dat in de paragraaf ‘toepassingen van functies’ de verticale lijn wordt geïntroduceerd, terwijl in de paragraaf ‘lineaire formules’ de horizontale lijn is geïntroduceerd. Kortom begrippen die inhoudelijk dicht bij elkaar staan, staan topografisch/optisch op erg verschillende plaatsen.

De vraag is echter of het mogelijk is om in een boek alle met elkaar verband houdende begrippen ook topografisch bij elkaar te zetten, wanneer de verschillende begrippen nog geleerd dienen te worden. Dit lijkt niet mogelijk te zijn in een één-dimensionale structuur. Als voor een bepaalde indeling wordt gekozen, kan het zijn dat niet alle met elkaar in verband staande onderwerpen onder hetzelfde kopje vallen. Zou er geschoven worden zodat deze onderwerpen wel bij elkaar staan, dan is er grote kans dat andere onderwerpen topografisch gezien weer (te) ver bij elkaar vandaan staan. Er moet gekozen worden voor een bepaalde indeling en dat heeft tot gevolg dat bepaalde inhoudelijk dicht bij elkaar liggende begrippen, topografisch ver bij elkaar vandaan in het boek terecht kunnen komen.

Het totaal overzicht

Een andere mogelijkheid om de nadelen van de topografische/optische afstand te overbruggen en verbinding te leggen is om deze verbinding weer te geven in een leerstofoverzicht. In het boek staat aan het einde van het hoofdstuk een totaaloverzicht. Omdat dit overzicht zich aan de paragraafindeling houdt, staan de begrippen ook hier optisch/topografisch los van elkaar.

Verwijzen naar voorkennis

Er is in het boek aandacht voor de benodigde voorkennis. Achter in het boek is een onderdeel voorkennis. Hierin kan een gedeelte van de stof uit de voorgaande jaren herhaald worden. Dit gedeelte is niet ingedeeld per hoofdstuk maar per onderwerp. Het zijn maar twee onderwerpen, namelijk lineaire vergelijkingen en ontbinden in factoren. In totaal beslaat dit gedeelte drie pagina's.

In hoofdstuk 1 staat in de paragraaf 'vergelijkingen en ongelijkheden' een toets voorkennis (zie figuur 4.7).

Toets voorkennis

1 Los algebraïsch op.
- a $7x - 5 = 9$
- b $3 - 4(x + 2) = x$
- c $3(x - 2) + 5x = 4 - 7x$

2 Ontbind in factoren.
- a $2x^2 - 7x$
- b $x^2 - 8x - 20$
- c $x^2 + x - 6$

(Reichard et al., 2002) blz. 21, hoofdstuk 1, toets voorkennis

Figuur 4.7 *De voorkennistoets van hoofdstuk 1 uit het leerboek*

Leerlingen worden aangespoord deze toets te maken en het voorkennis gedeelte door te werken. In het geval de toets niet goed gaat, wordt de leerlingen aangeraden het voorkennis gedeelte achter in het boek door te werken. Alleen voor dit onderwerp is in het boek extra aandacht voor de benodigde voorkennis. Over het opstellen van lineaire formules hebben de leerlingen bijvoorbeeld in eerdere jaren ook al het één en ander geleerd, maar dit is in dit boek in ieder geval niet terug te vinden. Er wordt geen expliciete aandacht aan besteed.

Als we kijken naar de voortoets en de uitwerking van de voorkennis achter in het boek, dan ligt de aandacht vooral op het herhalen van procedurele kennis. Weet een leerling nog welke stappen hij moet nemen om een vergelijking op te lossen of te ontbinden in factoren. Conceptueel, begripsmatig wordt er niet herhaald.

Symbolen bij opdrachten

In het leerboek wordt een vaste volgorde van indeling binnen paragrafen aangehouden. De moeilijkheidsgraad van de verschillende opdrachten neemt in de loop van de paragraaf toe. Bovendien staat door middel van tekens aangegeven of een opdracht een oriënterende opgave, een gewone opgave, een afsluitende opdracht of een differentiatie-opgave is (zie bijlage B.2 voor de omschrijving van de verschillende opdrachtsoorten). Doordat leerlingen en docent gewend zijn aan de lesmethode, is het voor hen aan de hand van de structuur redelijk eenvoudig in te schatten hoe moeilijk een opdracht is. Ze kunnen aan de opbouw van het hoofdstuk en aan de symbolen zien of de kans groot is dat opgaven aan elkaar gerelateerd zijn en/of bij een volgende opgave gebruik gemaakt kan worden van de eerder gemaakte opgave.

4.3.3 Evalueren

Feedback van het antwoordenboek

Het lijkt in het antwoordenboek om het goede getal als antwoord te draaien en alleen dat getal staat gegeven. Er wordt niet vanuit gegaan dat alleen het antwoord niet voldoende is. Er lijkt geen aandacht te worden geschonken aan zaken als evalueren en interpreteren.

Evaluatie in uitgewerkte voorbeelden

Wanneer het boek een voorbeelduitwerking geeft, dan stopt het antwoord als het gevraagde getal is berekend. Zo ook in onderstaand voorbeeld in figuur 4.8.

Voorbeeld

Een marktkoopman verkoopt T-shirts. De ervaring leert dat hij bij een prijs van 5 euro per week 90 T-shirts verkoopt. Maar bij een prijs van 8 euro is de weekverkoop nog maar 30 stuks.
Geef de formule van de weekverkoop q als functie van de prijs p in euro.
Ga uit van een lineair verband.

Uitwerking

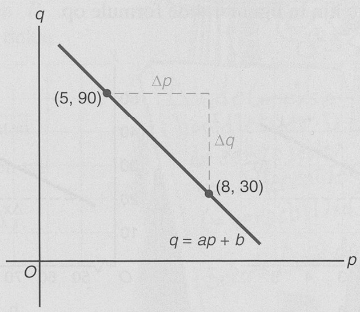
$q = ap + b$ met $a = \dfrac{\Delta q}{\Delta p}$

$$\left.\begin{array}{l} \text{Bij } p = 5 \text{ hoort } q = 90 \\ \text{Bij } p = 8 \text{ hoort } q = 30 \end{array}\right\}$$

$$a = \frac{\Delta q}{\Delta p} = \frac{30 - 90}{8 - 5} = \frac{-60}{3} = -20$$

$$\left.\begin{array}{l} \text{Dus } q = -20p + b \\ p = 5 \text{ en } q = 90 \end{array}\right\} \begin{array}{l} 90 = -20 \cdot 5 + b \\ 90 = -100 + b \\ 190 = b \end{array}$$

Dus $q = -20p + 190$



(Reichard et al., 2002) blz. 10, hoofdstuk 1, voorbeeld

Figuur 4.8 *Voorbeeld van een uitwerking in het leerboek*

Er moet een richtingscoëfficiënt (a) en een snijpunt met de y-as (b) berekend worden. Om het getal te berekenen kan de formule gebruikt worden zoals in het voorbeeld is gedaan. Nadat het boek heeft voorgerekend dat a = -20, gaat men gelijk door met het berekenen van de waarde van b. Er wordt niet geëvalueerd of dit getal wel kan kloppen (zie ook het gedeelte over abstraheren). Evaluerende opmerkingen zijn echter wel mogelijk. Een waarde van -20, betekent een negatieve richtingscoëfficiënt. We kunnen in de getekende grafiek zien dat het een dalende lijn is. Het klopt dat we voor a een negatief getal gevonden hebben. Daarnaast betekent een negatieve richtingscoëfficiënt dat hoe hoger de prijs is, hoe kleiner het aantal is dat verkocht wordt. Vanuit deze interpretatie van het eindantwoord, is het eindantwoord redelijk, en er geldt inderdaad: 'Het klopt dat we voor a een negatief getal gevonden hebben.'

Zoals gezegd gaat het boek direct door met het berekenen van de waarde van b. Opnieuw worden, wanneer deze waarde berekend is, geen evaluerende opmerkingen gemaakt. De reden hiervoor kan in ieder geval niet zijn, dat er geen evaluerende opmerkingen mogelijk zijn. Hoewel het snijpunt met de y-as in de figuur niet getekend is, kunnen we wel extrapoleren dat de grafiek de y-as boven de oorsprong zal snijden. De waarde van het snijpunt met de y-as is gelijk aan b. Het klopt dus dat we voor b een positief getal uit de berekening krijgen. We kunnen zelfs iets preciezer zijn over de waarde die b zou kunnen hebben. b moet niet alleen een positieve waarde hebben, maar deze waarde moet ook groter zijn dan 90, omdat in de grafiek het punt (5,90) gegeven is.

Kortom er zijn evaluerende opmerkingen mogelijk bij deze antwoorden, maar in het boek worden ze niet gemaakt.

4.3.4 Interpreteren

Wanneer een opdracht wordt afgesloten nadat het gevraagde gegeven is, zoals in het boek, dan wordt ook weinig aandacht aan de interpretatie (van het antwoord) besteed. Kijken we nog even terug naar het voorbeeld van de ijscoman (figuur 4.6) dan zien we dat voor het beantwoorden van sommige vragen wel interpretatie nodig is.

Het antwoord van deelvraag b is een kwadratische formule, de grafiek hiervan is een bergparabool. Een leerling zou de gevonden formule op kunnen schrijven en dan stoppen met denken. Maar wat zegt het eigenlijk dat het antwoord een kwadratische formule is? Dit betekent dat er een maximale R (van het Engelse revenue), dat wil zeggen een maximale dagopbrengst is. Hoe komt dat? Waarom is het niet zo dat hoe duurder je het ijsje maakt, hoe meer de opbrengst wordt? De interpretatie van het antwoord is belangrijk. Het interpreteren is in dit geval de eindfase van het omgekeerde abstraheren. De wiskundige oplossing heeft als gevolg dat de leerling nu weet dat er een prijs is, waarbij de dagopbrengst maximaal is.

In deelvraag c wordt vervolgens gevraagd om die maximale dagopbrengst te berekenen. Om deze vraag te begrijpen en in te zien dat het een vervolgvraag op de deelvraag b is, moet een leerling de conclusie getrokken hebben dat er een maximum bestaat. Voor een goed begrip en voor het kunnen oplossen van deze vraag is interpretatie van de uitkomst van deelvraag b van belang.

4.3.5 Bewijzen/beredeneren/aantonen

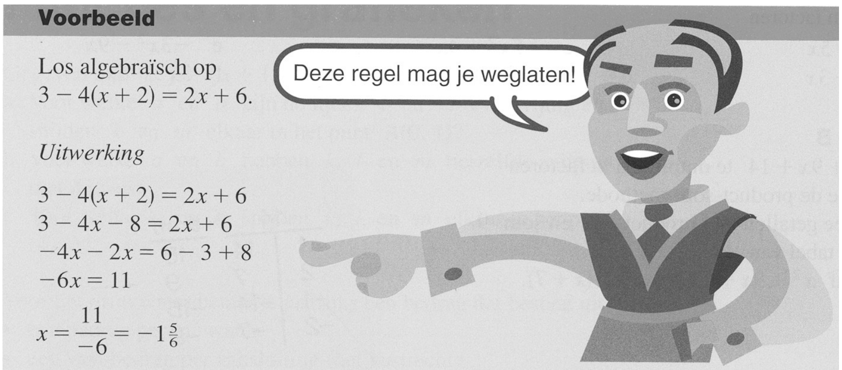
In het hele hoofdstuk komt slechts één opgave voor die vraagt: 'wat weet je van' en de opmerking maakt 'licht je antwoord toe met schetsen en voorbeelden'. Hier en daar wordt gevraagd om iets aan te tonen. In deze beide gevallen wordt gevraagd aan te tonen dat de formule is zoals die in de opdracht gegeven staat. Kortom aan bewijzen / aantonen wordt slechts beperkt aandacht besteed.

Berekeningen zijn het onderwerp van vrijwel iedere opgave. Wat dat betreft wordt in het boek veel aandacht besteed aan deze activiteit. Dataverzameling is weer iets dat minder in het boek voorkomt. Daardoor komt deze activiteit minder aan bod als het om het bewijzen/beredeneren/aantonen van ideeën op basis van verzamelde data gaat.

4.3.6 Presenteren en communiceren

In het boek wordt een groot aantal termen geïntroduceerd. Het boek besteedt ruimschoots aandacht aan de wiskundige terminologie (wiskundetaal). In de stukjes theorie worden opmerkingen gemaakt hoe bepaalde zaken genoteerd dienen te worden. Nieuwe wiskundige terminologie is rood gedrukt.

Het boek geeft ook voorbeelden van uitwerkingen en laat stappen zien, zodat de leerling zich een beeld kan vormen hoe hij zijn oplossing moet presenteren. Het boek maakt zelfs opmerkingen over welke stappen niet noodzakelijkerwijs opgeschreven hoeven te worden (zie bijvoorbeeld figuur 4.9).



(Reichard et al., 2002) blz. 171, voorkennis, voorbeeld

Figuur 4.9 *Voorbeeld van een expliciete aanwijzing in het boek over de gewenste notatie*

In een algemene inleiding aan het begin van het boek staat over de voorbeelden vermeld: “In een voorbeeld is de theorie verwerkt in een opgave met aanpak en uitwerking. Hier zie je hoe je de uitwerking moet noteren.”.

4.3.7 Conclusie

In het onderstaande overzicht (tabel 4.1) staan de voorgaande besproken onderdelen samengevat.

Tabel 4.1 *Overzicht van de mate waarin het boek de verschillende activiteiten ondersteunt*

activiteit	ondersteuning door boek
Abstraheren	--
Structureren	+/-
Evalueren	--
Interpreteren	--
Bewijzen / beredeneren / aantonen	-
Presenteren / communiceren	++

In het voorgaande hebben we verschillende mogelijkheden aangegeven, waar de docent en/of technologie ondersteuning kan bieden bij het verwerven van vaardigheden op het gebied van de kernactiviteiten van tabel 2.3. In het boek zijn wegens ruimtegebrek (en gebrek aan belangstelling van leerlingen voor lange teksten) keuzes gemaakt waar wel en waar niet aandacht aan besteed wordt. Bij het te ontwikkelen materiaal zullen ook keuzes gemaakt moeten worden. Een docent is flexibeler en kan afhankelijk van de situatie kiezen waar hij welke accenten legt. Een docent kan zijn keuzes baseren op de leerlingen en de moeilijkheden waar die tegen aan lopen. Maar ook de docent zal wegens tijdgebrek keuzes moeten maken aan welke activiteit hij op een gegeven moment veel of juist weinig aandacht besteed. Kortom uiteindelijk geldt voor alle bronnen dat keuzes gemaakt moeten worden. Geen enkele bron zal elke activiteit maximaal ondersteunen. Het is een doel van ons onderzoek om een optimale keuze te maken tussen verschillende bronnen.

4.4 Hoe en wanneer zouden technologie en/of de docent het boek aan kunnen vullen?

4.4.1 Invloed van de afzonderlijke bronnen: ligt met de keuze van een eerste bron direct alles vast?

Wanneer verschillende bronnen naast elkaar ingezet worden, kan het zijn dat deze verschillende bronnen aan de hand van verschillende didactische overtuigingen vorm gegeven zijn. De vraag is of dit erg is. Ligt met een keuze voor een bepaalde didactiek voor één bron direct vast dat de andere bronnen op dezelfde didactische aanpak gebaseerd moeten zijn? In ons onderzoek willen we zowel het leerboek als aanvullend materiaal inzetten. Alhoewel er ideaal gesproken een volledige aanpassing van al het lesmateriaal zou moeten plaatsvinden was het praktisch niet mogelijk om van het boek af te wijken, dit hebben we dus als uitgangspunt voor de ontwikkeling van ander materiaal genomen. Een leerboek is volgens een bepaalde filosofie geschreven. Omdat wij in dit onderzoek te maken hebben met een bestaande methode, zal het leerboek van de in paragraaf 1.3 voorgestelde didactiek afwijken. Kunnen we het aanvullende materiaal wel ontwerpen op basis van de in paragraaf 1.3 voorgestelde didactische aanpak of is dit niet mogelijk omdat het boek volgens een andere filosofie is opgezet? Op de eerste plaats mogen we verwachten dat er enige flexibiliteit zit in de actualisering van didactische aanpakken in de klas. Uit een onderzoek van Gravemeijer et al. (1993) blijkt dat wanneer methoden volgens een bepaalde filosofie ontwikkeld zijn, dit niet altijd terug te herkennen is in het karakter van de lessen die gegeven worden. Docenten kunnen dus in de klas de strekking van het boek meer in de richting van de door ons voorgestelde didactiek buigen. We verwachten dan ook niet dat het boek verhindert om aanvullend materiaal te ontwikkelen volgens de in hoofdstuk 1.3 voorgestelde didactiek. Het blijkt ook dat er meer dient te gebeuren dan alleen het gebruik van materiaal, ontwikkeld op basis van een bepaalde filosofie, om het karakter van lessen te veranderen. De resultaten van onze vooronderzoeken en het later uitgevoerde grootschalig onderzoek moeten uitwijzen of deze veronderstelling correct is. Met de resultaten van dit onderzoek hopen we meer over het samenspel tussen de verschillende bronnen en de invloed van individuele bronnen op het karakter van de lessen te kunnen zeggen, zodat we voorwaarden voor een goede implementatie kunnen geven. We willen achterhalen hoe de inzet van materiaal dat volgens een bepaalde filosofie ontwikkeld is ook daadwerkelijk leidt tot lessen met een karakter dat aansluit op die filosofie.

4.4.2 In welke bron wordt het te ontwikkelen materiaal ontworpen?

In hoofdstuk 2 noemden we de doelen van het wiskundeonderwijs. We zagen in paragraaf 4.3 dat het leerboek voor (het leren uitvoeren van) veel kernactiviteiten slechts geringe ondersteuning biedt. We willen materiaal ontwikkelen waarin meer aandacht voor deze kernactiviteiten is. In hoofdstuk 3 concludeerden we dat een didactiek waarin onderzoekend leren centraal staat een veelbelovende didactiek is. Bij deze vorm van leren kan technologie een belangrijke rol spelen; met behulp van technologie kunnen leerlingen experimenten doen en data verzamelen. We hebben daarom besloten om het materiaal in een ICT-omgeving gebaseerd op de idee van onderzoekend leren vorm te geven. De auteursomgeving SimQuest (Van Joolingen & De Jong, 2003) biedt de mogelijkheid dergelijke ICT-omgevingen te creëren. In deel 2 zullen we dit nader beschrijven.

4.4.3 Welke bron, wanneer?

Een onderliggende overweging

Bij elke vorm van ondersteuning moet een keuze gemaakt worden of deze ondersteuning het beste door het computerprogramma of door de docent geboden kan worden. Nu heeft een keuze in de didactiek gevolgen voor de vereiste flexibiliteit van de ondersteuning. We hebben ervoor gekozen om de opdrachten (in eerste instantie) een open karakter te geven; leerlingen voeren hun eigen onderzoek uit en we willen dat niet te sterk sturen en beperken. Dit betekent dat de ondersteuning flexibel moet zijn om aan te sluiten op datgene wat de leerling doet en denkt. Om het mogelijk te maken met een computerprogramma te achterhalen wat een leerling denkt en als gevolg daarvan doet, is lastig. Manipulaties alleen geven onvoldoende informatie. Een reactie hierop zou kunnen zijn om de opdrachten meer sturend te maken, zodat de ontwerper beter weet welk doel de leerling voor ogen heeft bij het manipuleren. Een voorbeeld van een sturende opdracht is bijvoorbeeld ‘wat is de invloed van het vergroten van invoervariabele 1 op de waarde van uitvoer y’, waarmee vast is gelegd welke invoervariabele veranderd moet worden, dat deze vergroot moet worden en naar welke uitvoervariabele gekeken moet worden. Wanneer de leerling nu een andere invoervariabele manipuleert, kan de computeromgeving hier feedback op geven. Echter, zulke sturende opdrachten passen minder goed in de voorgestelde didactiek. Hierdoor vallen veel mogelijkheden voor specifieke ondersteuning op het juiste moment door de computer weg. Ondersteuning door een docent (of medeleerlingen) is flexibeler en kan wellicht wel geboden worden. Bij de bespreking van de resultaten zullen we specifiek op dit aspect terugkomen en rapporteren hoe de ondersteuning zich in de loop van de ontwikkeling van onze SimQuest-applicaties ontwikkeld heeft.

Technologie

Op welke punten verwachten we een positieve bijdrage aan de ondersteuning van de activiteiten door de inzet van computerprogramma’s? Op welke punten verwachten we dat de inzet van computerprogramma’s geen (grote) extra aanvulling kunnen leveren? We zullen dit voor de verschillende activiteiten in deze paragraaf bespreken.

Abstraheren

De verwachting is dat wat abstraheren betreft, dezelfde nadelen zullen opspelen bij computerprogramma’s als in het leerboek (zie paragraaf 4.2.1). Ook bij computerprogramma’s zijn de eerste stappen in het abstractieproces al gemaakt.

Een ander nadeel van computerprogramma’s kan zijn dat de omgeving van invloed is op de redenering van leerlingen (door bijvoorbeeld bepaalde waarden van variabelen te weigeren, opdrachten niet uit te voeren of informatie op een bepaalde manier te presenteren). Niet iedere leerling zal zich afvragen wat de achterliggende reden hiervan is (McArthur & Lewis, 1991). Dit zal misschien zelfs sterker spelen dan bij een boek, omdat een boek bijvoorbeeld geen waarden weigert.

Structureren

Cheng (1999) meldt dat de manier waarop representaties gemaakt en gebruikt worden invloed heeft op de effecten van het computerprogramma. Een goede representatie laat verschillen op de laagste niveaus en overeenkomsten op de hoogste niveaus zien. Ook stelt Cheng (1999) dat het belangrijk is dat de relatie tussen concepten en representaties duidelijk zijn voor de leerlingen. Een representatie, zo concludeert hij, moet verschillende niveaus van abstractie ondersteunen en de verschillende perspectieven zoveel mogelijk integreren.

Het kan mogelijk zijn om met een computerprogramma het structureren (verder) te ondersteunen. In computerprogramma's hoeft men zich immers vaak niet te houden aan de lineaire manier van presenteren. Wellicht zijn er voordelen bij het structureren te behalen door extra mogelijkheden in de indeling op te nemen.

Evalueren, interpreteren en beredeneren

We zagen dat in het boek onder andere weinig aandacht besteed wordt aan evalueren en interpreteren. Met computerprogramma's kunnen snel veel data gegenereerd worden. Data die geëvalueerd en geïnterpreteerd dienen te worden. Is het terecht om te verwachten dat met de inzet van technologie deze punten sterker benadrukt zullen worden? Er zitten enkele addertjes onder het gras.

Een eerste gevaar heeft te maken met wat de leerlingen als einddoel zien van de opdrachten in een computeromgeving. Wiskunde is in de ogen van een deel van de mensen het leren van de juiste trucs. Het vinden van de formule is het doel in plaats van het oplossen van een vraagstuk uit het dagelijks leven (Freudenthal, 1991). In computeromgevingen is het voor de lerende gemakkelijk om formules algoritmisch te manipuleren. Dit kan volgens Cheng (1999) een gevaar van computeromgevingen zijn. Omdat het interpreteren en begrijpen van de resultaten door de mogelijkheid van manipulatie niet eenvoudiger gemaakt wordt, kunnen lerenden gefocust raken op het produceren van formules als einddoel.

Een tweede gevaar heeft te maken met waar leerlingen hun vertrouwen op stellen. Steinberg (2000) waarschuwt dat lerenden vertrouwen op het door de computer gegenereerde antwoord, zonder zelf te proberen de antwoorden op te bouwen. De lerenden zien geen noodzaak om de antwoorden van de computer te begrijpen, verifiëren of uit te dagen. Zodoende kan het gebruik van computers leiden tot een vorm van leren die opnieuw passief is aldus Steinberg.

De genoemde gevaren van de inzet van computeromgevingen zijn reëel. Uit onderzoek zijn een aantal nadelen van het gebruik van computers, onder andere bij wiskunde, op het gebied van evalueren, interpreteren en beredeneren bekend. Drijvers (2002) noemt een aantal problemen, dat optreedt bij het gebruik van een computer algebra systeem (CAS) door leerlingen. Deze problemen zijn ook te verwachten bij het gebruik van in SimQuest ontwikkelde applicaties.

- Eén van de problemen die hij bijvoorbeeld signaleert, is dat leerlingen moeite hebben met het interpreteren van de uitvoer van het CAS.
- Een ander voorbeeld heeft betrekking op het evalueren van de uitkomsten van een computerprogramma. Dit evalueren vraagt van de leerling het verschil te overbruggen tussen de algebraïsche voorstelling die de computeralgebra omgeving geeft en de vorm die de leerling verwacht en als eenvoudigst beschouwd. Leerlingen hebben hier moeite mee.
- Het laatste voorbeeld dat we hier noemen, ook op het gebied van evalueren, heeft te maken met de manier waarop de computer een oplossing berekent. Veel computerprogramma's (en overigens ook de GR) geven numerieke oplossingen. Dit kan een klein verschil in uitkomst opleveren met de exacte uitkomst. Deze oplossingsmethode blijft impliciet en dit levert volgens Drijvers (2002) problemen op voor leerlingen.

Het is binnen SimQuest-applicaties voor eenvoudige wiskunde mogelijk om exacte waarden uit te rekenen. Wanneer deze uitkomsten echter vergeleken worden met die van de GR, kan dit dus kleine verschillen opleveren. Voor ingewikkelder problemen geldt dat in SimQuest ontwikkelde applicaties numerieke oplossingen geleverd worden.

Kortom computerprogramma's kunnen snel veel data leveren wat zowel een positieve als een negatieve eigenschap is. De positieve kanten kunnen benut worden om activiteiten als evalueren, interpreteren en wellicht beredeneren te ondersteunen door ze meer aan bod te laten komen. De negatieve kanten moeten zoveel mogelijk ondervangen worden.

Communiceren

De moeilijkheid in veel programma's is om zaken op de juiste manier te noteren. In sommige ICT-programma's kunnen bekende notatieregels toegepast worden. Maar dit behoort over het algemeen niet tot de basis van meer algemene programma's. We verwachten dus dat wat deze activiteit betreft de inzet van technologie weinig extra ondersteuning zal bieden.

De docent

Eén van de kenmerken van docenten is hun grote flexibiliteit. Het is daarom te verwachten dat docenten de gaten die het boek en de toegepaste technologie open laten, kunnen vullen. We zullen voor de verschillende activiteiten onze verwachting hierover bespreken.

Abstraheren

Zowel voor het boek als voor technologische middelen geldt, dat de eerste stappen in het abstractieproces al zijn gemaakt. Een docent heeft de mogelijkheid een probleem in te leiden, zonder van te voren de deels geabstraheerde versie al aan te bieden. Wanneer een docent eerst een klassengesprek aangaat, voordat hij het boek opent of het programma opstart, dan kan hij in dit gesprek samen met de leerlingen de eerste stappen in het abstractieproces maken.

Structureren

Het verband tussen de verschillende onderdelen van het boek, de verschillende onderdelen in het programma en de verbanden tussen onderdelen van het boek en onderdelen van het programma kan een docent bespreken in de les. Waar geen ruimte is om deze verbanden allemaal te noemen in het boek of in het programma, kan de docent deze aanvulling maken als daar aanleiding voor is.

Evalueren

We zagen in het boek dat in voorbeelden wordt gestopt zodra een getal als antwoord is berekend. De docent kan deze voorbeelden aanvullen door te evalueren of dit antwoord kan kloppen en rekening houdt met randvoorwaarden.

Interpreteren

Eén van de vormen van ondersteuning die een docent vaak kan bieden is het stellen van vragen. Ook bij het stellen van vragen spelen overtuigingen van de docent een belangrijke rol. Wanneer een docent alleen een antwoord beoordeelt op de juistheid ervan zal een verschuiving moeten plaats vinden van de focus op een juist/onjuist antwoord naar de mathematische betekenis in termen van interpretatie van een antwoord (Browers & Doerr, 2001). De docent moet de waarde van het gebruiken van de onjuiste verklaringen van leerlingen in (gaan) zien.

Beredeneren

Wanneer een leerling denkt te weten hoe het zit, kan een docent door middel van vragen, de leerling aanzetten om zijn ideeën te herzien, aan te vullen of aan te scherpen. De docent kan de andere partij zijn, die de leerling moet zien te overtuigen. De docent kan ook een voorbeeld zijn door bijvoorbeeld met behulp van resultaten (bv. verkregen met behulp van technologie) zijn ideeën te onderbouwen.

Communiceren
De docent kan de manier van presenteren en communiceren ondersteunen door:
- tijdens het uitwerken van voorbeelden op het bord hier opmerkingen over te maken,
- tijdens het inzien van de notities van de leerlingen hierop te corrigeren en
- opmerkingen te maken over de onvolkomenheden van notatie in een programma (met de huidige stand van zaken).

4.4.4 Vervolg

In dit hoofdstuk hebben we besproken hoe de ideeën over de didactiek uit hoofdstuk 3 met de verschillende bronnen gerealiseerd zouden kunnen worden. In deel 2 bespreken we de ontwikkeling van materiaal op basis van deze hoofdstukken.

Deel 2

Vooronderzoeken

Deel 2, de vooronderzoeken

1 Inleiding op de vooronderzoeken

In deel 1 hoofdstuk 2 beschreven we de doelen van het wiskundeonderwijs. We gaven aan dat het verwerven van onderzoeksvaardigheden en de kernactiviteiten abstraheren, structureren, evalueren, interpreteren, beredeneren en communiceren tot deze doelen behoren. In hoofdstuk 3 schetsten we enkele didactieken. Een veel belovende didactiek waar speciaal deze doelen goed tot hun recht zouden kunnen komen is die van het onderzoekend leren met behulp van interactieve programma's. In hoofdstuk 4 lieten we zien dat het huidige leerboek op die punten aanvulling kan gebruiken. Een dergelijke aanvulling hebben we tijdens dit onderzoek ontworpen. We hebben dit gedaan door het uitvoeren van drie vooronderzoeken. Deze vooronderzoeken staan in dit deel beschreven.

2 Het eerste vooronderzoek: de ontwikkeling van lesmateriaal voor wiskunde en een onderzoek naar de bruikbaarheid daarvan

Het eerste vooronderzoek had twee doelen. Het eerste doel was het ontwikkelen van lesmateriaal voor wiskunde binnen een ICT-omgeving. We beschrijven eerst de algemene opbouw van een belangrijk onderdeel van dit materiaal, namelijk de leerling-omgevingen van SimQuest. Het betreft hier het interactieve deel en het instructie deel. In de beschrijving van de ontwikkeling van de leerlingomgevingen (applicaties) 'het benefiet concert' en 'het Zwitserleven' richten we de aandacht vooral op de afstemming met de inhoud van een hoofdstuk uit het leerboek. Ook bespreken we de invulling van het interactieve deel en het ontwerpen van opdrachten als onderdeel van het instructiedeel in deze applicaties.

Het tweede doel was het testen van de bruikbaarheid van dit materiaal. In een beknopt bruikbaarheidonderzoek is naar de technische – en inhoudelijke bruikbaarheid, en het navigatiegemak van de applicaties gekeken. Zeven leerlingen zijn tijdens het werken met de applicaties gelogd en geobserveerd. Na afloop is naar hun bevindingen gevraagd. De resultaten uit het onderzoek worden gerapporteerd. Het hoofdstuk wordt afgesloten met een interpretatie van de resultaten en gevolgtrekkingen voor verdere materiaalontwikkeling. Voor een aantal aspecten van inhoudelijke bruikbaarheid (zoals oriënterende handelingen, het heropenen van opdrachten, het gebruik van interactieve gedeelten, de specifiekheid van redeneringen en het gebruik van jargon) bespreken we de bevindingen, veronderstelde oorzaken van zwakke punten, en mogelijke oplossingen.

2.1 Het ontwikkelen van het lesmateriaal

In deel 1 (hoofdstukken 3 en 4) hebben we een aantal theoretische uitgangspunten besproken voor het ontwikkelen van lesmateriaal. Deze uitgangspunten laten nog veel mogelijkheden over voor de vertaling naar concrete uitwerkingen. Het lesmateriaal is ontwikkeld met het programma SimQuest. In het volgende gedeelte zullen we eerst het programma SimQuest introduceren. Bij het ontwikkelen moest een vertaling worden gemaakt van de uitgangspunten naar concreet materiaal. Daarom zullen we, na een bespreking van het resultaat van de materiaalontwikkeling, enkele ontwerpkeuzen en uitgangspunten bespreken.

2.1.1 SimQuest

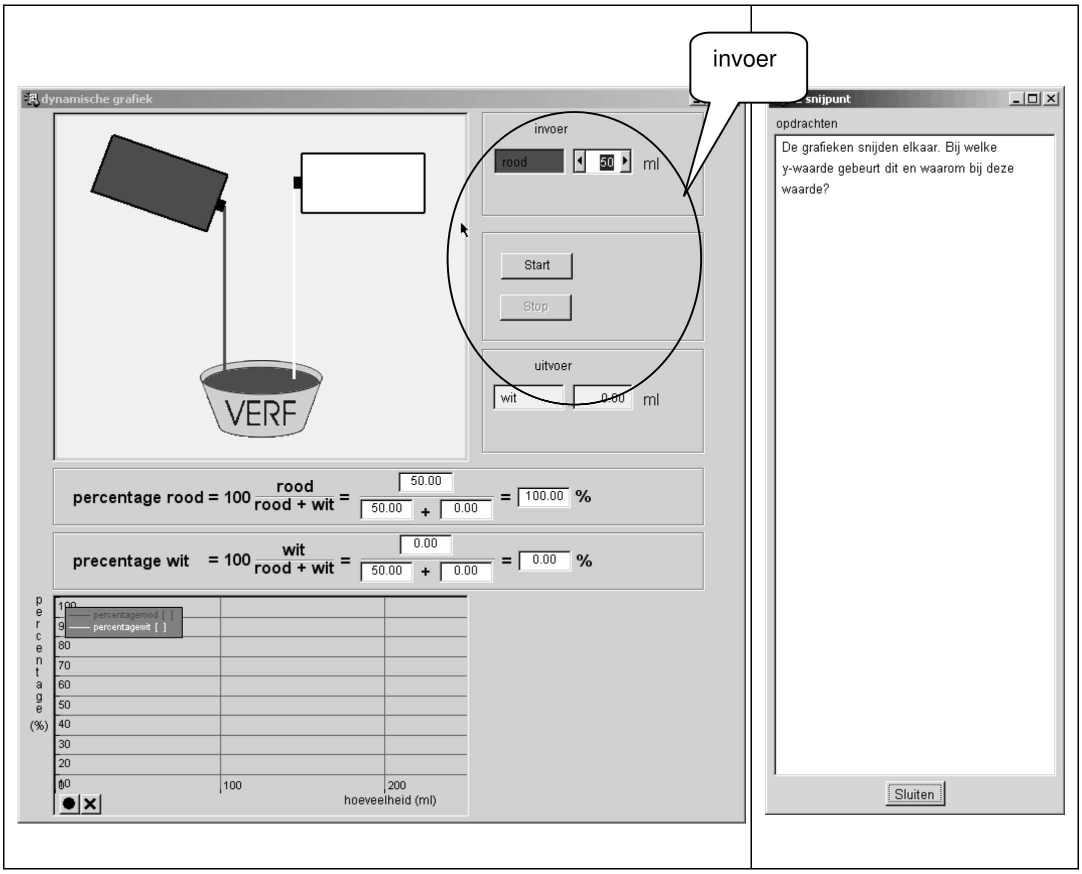
Voor het eerste vooronderzoek is een tweetal applicaties ontwikkeld met SimQuest, een auteursomgeving voor het ontwikkelen van computer simulaties[1] (zie bijvoorbeeld Van Joolingen & De Jong, 2003). De computersimulaties zijn ingebed in een instructieomgeving. Deze instructieomgeving heeft de mogelijkheid tot het bieden van ondersteuning aan de leerlingen door middel van opdrachten, verklarende teksten en model progressie.

Het programma bestaat uit twee omgevingen: een auteursomgeving en een leerling-omgeving. In de auteursomgeving kan de ontwerper vorm geven aan de leerling-omgeving. In dit verslag bespreken we alleen de leerling-omgeving.

---

[1] Met simulatie bedoelen we in dit proefschrift het doorrekenen van modellen door applicaties in het programma SimQuest. In tegenstelling tot gewoonlijk gaat het hierbij soms niet om contextrijke situaties uit het dagelijks leven, maar om wiskundige contexten.

Een voorbeeld van wat de leerling in de voor dit onderzoek ontwikkelde applicaties ziet, is gegeven in figuur 2.1. Er zijn twee gedeelten: een interactiedeel (het linker gedeelte in figuur 2.1) en een instructiedeel (het rechter gedeelte in figuur 2.1).



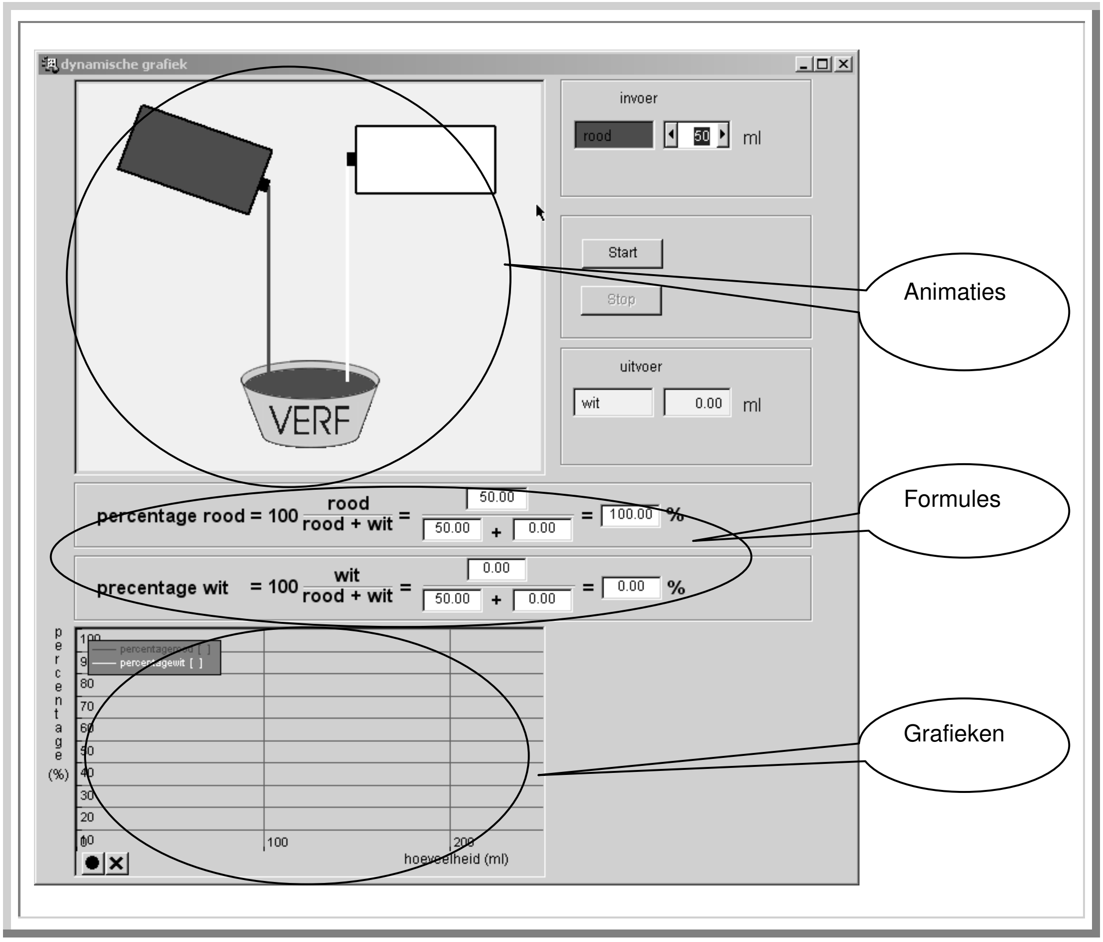
Figuur 2.1 *Voorbeeld van een opdracht (rechts) met een interactiedeel (links)*

In het rechterdeel van figuur 2.1 is een voorbeeld gegeven van een opdracht. De leerling krijgt hier aanwijzingen om met de simulatie te werken. In het gedeelte 'Het instructiegedeelte' zullen we verder op de inhoud van de opdrachten ingaan.

Het interactieve gedeelte

In het interactieve gedeelte kunnen leerlingen variabelen veranderen en de gevolgen daarvan observeren in verschillende onderdelen. Het in figuur 2.1 omcirkelde stuk is het belangrijkste doe-deel. Hierin kunnen bij *Invoer* waarden worden ingevuld. Met een druk op *Start* wordt de simulatie gestart en mengen zich de kleuren in de verfbak.

De interactieve gedeelten zijn in de ontwikkelde applicaties volgens een vaste opzet vorm gegeven. Aan de rechterzijde van het interactieve deel bevindt zich vrijwel altijd een deel waar de leerlingen zelf de invoerwaarden kunnen bepalen. Het linkergedeelte van het interactieve scherm bestaat uit één, twee of drie componenten die er vooral zijn om geobserveerd te worden (zie figuur 2.2). In *Animaties* wordt een concept of verband visueel weergegeven en geconcretiseerd. Bij een verandering in invoerwaarde verandert in dit geval de stand van de verfbussen en het kleurmengsel in de opvangbak. Hetzelfde gebeurt wanneer de waarde van een variabele verandert nadat de simulatie gestart is. In *Formules* staat aangegeven met welke formule gerekend wordt. Zowel de naam, als de waarde van de variabelen staan aangegeven. Deze waarden veranderen mee als invoerwaarden veranderd worden of als de simulatie loopt nadat op start gedrukt is. In *Grafieken* zijn twee variabelen tegen elkaar uitgezet. Gegenereerde grafieken kunnen bewaard en verwijderd worden. Ook kan er in- en uitgezoomd worden op de grafiek.



Figuur 2.2 *Voorbeeld van de visualisatie delen*

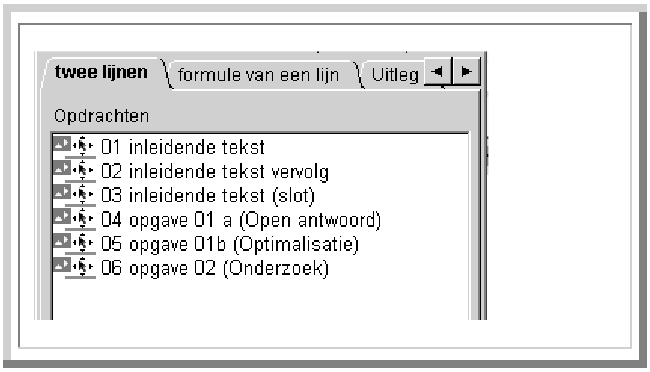
In elke omgeving is een onderliggend model gedefinieerd. Er zijn twee typen modellen: dynamische en statische modellen. In een dynamisch model is er een variabele die verandert van waarde. In veel simulaties is dit de variabele 'tijd'. In het voorbeeld uit figuur 2.2 is dit de hoeveelheid witte verf. De hoeveelheid witte verf start met 0 ml en loopt op naar 250 ml. In de grafiek wordt dan ook langs de x-as de hoeveelheid witte verf (de veranderende variabele) uitgezet.

Bij een dynamisch model veranderen enkele onderdelen pas na het starten van de simulatie. In figuur 2.2 zijn dit de stand van de witte verfbus in de animatie, de grafiek en de waarde van wit in beide formules en in de uitvoer. Enkele andere variabelen veranderen direct. Als bijvoorbeeld de waarde van invoer ‘rood’ verandert, veranderen ook de stand van de rode verfbus en de waarden van rood in beide formules.

In een statisch model is er geen lopende variabele. Er zijn bij statische modellen twee mogelijkheden: een continu doorberekend statisch model en een discontinu doorberekend statisch model. Bij een discontinu doorberekend statisch model moet eerst een knop aangeklikt worden, waarna pas met de nieuwe waarde het model wordt doorgerekend. In het ontwikkelde materiaal is geen discontinu doorberekend statisch model gebruikt. Bij een continu doorberekend statisch model zien leerlingen direct wat de waarden van uitvoervariabelen worden (net zoals bij het veranderen van de variabele ‘rood’ in het voorbeeld van figuur 2.2). Bij een statisch model is het niet mogelijk het programma een grafiek te laten tekenen. In de interactieve gedeelten van statische modellen ontbreken dan ook grafieken uit de standaardindeling van figuur 2.2. Een direct verschil dat de leerlingen merken is, dat bij continu doorberekende statische modellen de animatie en uitvoervelden direct mee veranderen, met het veranderen van waarden van de invoervariabelen.

Het instructiegedeelte

In SimQuest-applicaties bestaat het instructie gedeelte uit verschillende onderdelen, die te herkennen zijn aan tabbladen. Er zijn tabbladen voor opdrachten en uitleg. Tabbladen voor *opdrachten* zijn vaak onderverdeeld in thema’s. Deze thema’s zijn gebaseerd op de aspecten van de context die toegepast wordt in een applicatie in combinatie met de achterliggende wiskunde. In figuur 2.3 is voor de applicatie mobieltjes onderscheid gemaakt in de thema’s twee lijnen en formule van een lijn. In elk thema wordt altijd begonnen met een lijst van opdrachten, dit is ook te zien in figuur 2.3 waarin de lijst bestaat uit zes opdrachten. Leerlingen kiezen uit deze lijst een opdracht waaraan ze willen werken.



Figuur 2.3 *Voorbeeld van hetgeen de leerling ziet in het overzicht van de opdrachten in het instructiedeel*

In de ontwikkelde applicaties begint de eerste en misschien de tweede en derde opdracht van een applicatie altijd met een inleidende tekst. Deze tekst schetst de context, stelt de hoofdvraag en introduceert het interactieve gedeelte. Het is afhankelijk van de applicatie hoe deze gepresenteerd worden. In figuur 2.4 ziet de leerling eerst een context plus hoofdvraag op één scherm. In het volgende scherm volgt dan een schets van het interactieve gedeelte en een opdracht om zelf uit te proberen (zie figuur 2.5).

Christa wil dit jaar tijdens haar zomervakantie graag naar de Oekraïne om daar samen met een groep vrienden te helpen bij het bouwen van een school. Om de te bouwen school in staat te stellen lesmateriaal te kopen organiseren Christa en haar vrienden een benefiet concert, waarvan de opbrengst naar deze school gaat.

Boer Harm heeft een vierkant stuk weiland van 80 bij 80 meter, dat Christa mag gebruiken voor het benefietconcert. In dit weiland wil Christa graag een gedeelte afzetten, zodat het zicht van buiten op het feestterrein belemmerd wordt. Het afzetten gebeurt door met behulp van afzethekken een rechthoek te maken. Helaas heeft Christa maar een beperkt aantal meters afzethek tot haar beschikking.

Christa denkt nu na over hoe zij het beste de lengte en breedte van het afgezette stuk weiland kan kiezen, zodat er zoveel mogelijk bezoekers naar het concert kunnen komen.

Figuur 2.4 *Voorbeeld van inleidende tekst met schets context en hoofdvraag*

In de figuur hiernaast is het weiland van boer Harm getekend. De rode rechthoek geeft het afgezette stuk terrein aan. De lengte en de omtrek van de rechthoek zijn instelbaar. Met de omtrek wordt het totaal aantal meters afzethek wat Christa nodig heeft bedoeld.

In deze opdracht zullen we bekijken welke lengte Christa het beste kan kiezen bij een gegeven aantal meters afzethek. Tijdens het werken met de simulaties zullen begrippen als lineaire functies, stijgende grafieken, richtingscoëfficiënten en wiskundige modellen aan de orde komen.

De simulatie is als volgt opgebouwd:
Je kunt de waarde van de lengte van het terrein en het aantal meters afzethek (of te wel de omtrek) bepalen. Dit kan door bij de invoer parameters (rechts bovenaan) met behulp van het schuiven van de balk.
De computer tekent vervolgens het feestterrein en berekent de breedte en de oppervlakte.
Door op Reset te drukken maak je de in- en uitvoerparameters weer gelijk aan hun beginwaarde. De knop plot heb je pas nodig wanneer je grafieken gaat maken.

Probeer zelf de verschillende knoppen uit en bekijk wat er gebeurt.

Figuur 2.5 *Voorbeeld van inleidende tekst met introductie van het interactieve gedeelte*

Naast een indeling in thema's zijn de opdrachten ook ingedeeld in moeilijkheidsgraad. De thema's zijn voor de leerlingen direct zichtbaar, de moeilijkheidsgraad niet. We hebben een grove tweedeling gemaakt in eenvoudige en complexe opdrachten. Dit onderscheid is vooral gebaseerd in complexiteit in het werken met het interactieve gedeelte.

Een opdracht werd als *eenvoudig* aangeduid als:
- er slechts naar één uitvoerparameter hoeft te worden gekeken om antwoord te geven
- de uitvoerparameter waar het om gaat direct in één van de uitvoervelden is af te lezen
- de andere parameters die in de vraag genoemd worden allemaal direct als invoerparameter zijn in te stellen
- er geen vertaalslag tussen de waarde van de parameter en het antwoord op de vraag nodig is. Zo is er bijvoorbeeld voor het aantonen of iets wel of niet een lineair verband is, wel een vertaalslag nodig. Namelijk van de waarden van parameter naar het lineair zijn.

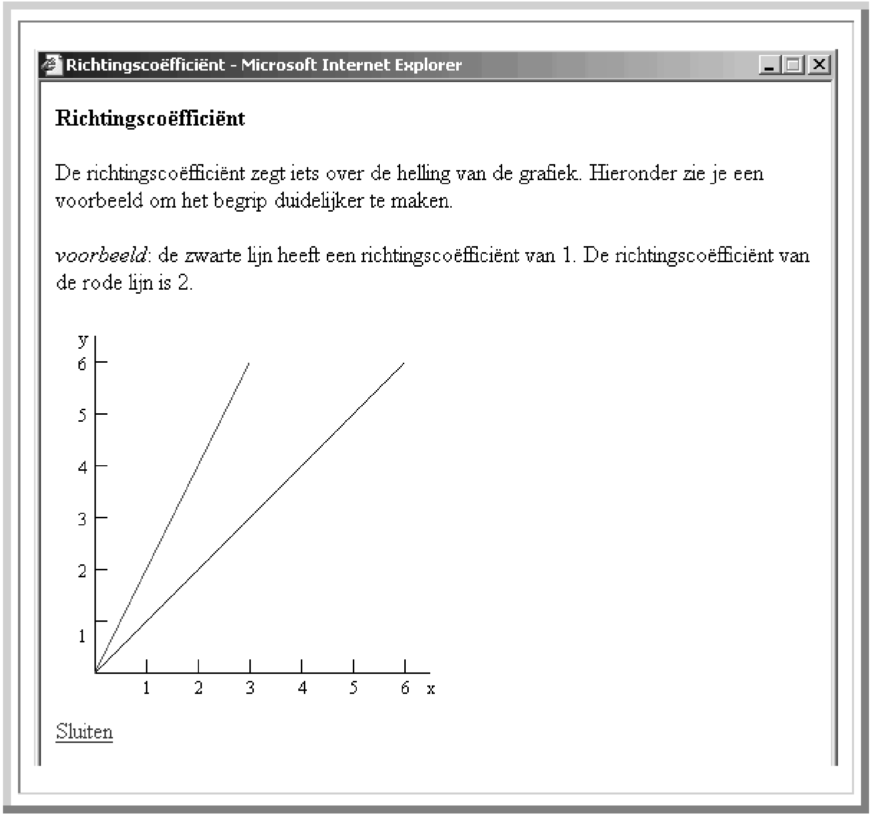
Complexe opdrachten voldoen niet aan één of meerdere van de vier bovengenoemde punten. In grote lijn neemt de complexiteit toe naarmate er van meer van de vier punten afgeweken wordt. Bij complexe opdrachten moeten leerlingen:

- eraan denken dat meerdere parameters aan een eis moeten voldoen. Het kan zijn dat één parameter aan de eisen uit de vraag voldoet, maar de andere parameter(s) nog niet.
- een grafiek of tabel interpreteren. Ze kunnen de waarde niet simpel aflezen van een uitvoerveld.
- bedenken op welke wijze ze de parameters, anders dan de parameter waar ze iets over moeten zeggen, op de juiste waarde krijgen. Bijvoorbeeld een vraag in een opdracht is: 'Christa kiest de breedte van het feestterrein gelijk aan 40 meter. Hoe groot wordt de lengte van het feestterrein?' De breedte is niet direct in te stellen. Leerlingen moeten beseffen dat een keuze van de waarde van de lengte ook de waarde van de breedte bepaalt.
- een vertaalslag maken van de uitkomsten. Een voorbeeld is het aantonen van lineariteit. Leerlingen moeten daarvoor waarden van parameters aflezen in het interactieve gedeelte en vervolgens de verschillen tussen de waarden berekenen en de uitkomsten met elkaar vergelijken om iets over het lineair zijn te kunnen concluderen. Kortom na het aflezen is een bewerking (vertaalslag) nodig voordat er antwoord gegeven kan worden.

Via het tabblad met *Uitleg* kunnen studenten informatie krijgen over begrippen. Als een leerling op de HTML-link klikt verschijnt een begrippenlijst (zie figuur 2.6) waarin weer verder doorgeklikt kan worden (figuur 2.7). Uiteindelijk verschijnt een scherm waarop het begrip wordt uitgelegd en geïllustreerd (figuur 2.8).

Figuur 2.6 *Voorbeeld van tabblad uitleg*

Figuur 2.7 *Voorbeeld van een lijst met termen in de uitleg*



Figuur 2.8 *Voorbeeld van een uitleg*

2.1.2 Ontwikkeling van twee applicaties in SimQuest

In het eerste vooronderzoek zijn twee verschillende applicaties ontwikkeld, namelijk 'het benefiet concert' en 'het Zwitserleven'. In deel 1, hoofdstuk 3 schreven we dat een relevante context belangrijk is. Zoals aan de naamgeving te zien is, hebben we een context gekozen waarvan we verwachten dat hij relevant is en voorkennis activeert. Hieronder volgt een beschrijving van beide applicaties.[2]

Het benefiet concert

Onderwerpen en relatie met het boek

In 'het benefiet concert' komen meerdere onderwerpen uit het boek aanbod. Er is aandacht voor richtingscoëfficiënten, modelvorming, vergelijkingen en ongelijkheden, toepassingen van functies, vierdegraadsfuncties en het veranderen van grafieken. In tabel 2.1 is aangegeven welke onderwerpen in het boek en in SimQuest behandeld worden. Er is in deze tabel geen onderscheid gemaakt in de mate van diepte waarin een onderwerp behandeld wordt; regelmatig wordt in SimQuest dieper op onderwerpen ingegaan dan in het boek gebeurt.

[2] We gebruiken de term SimQuest voor de applicaties

Tabel 2.1 *Aanwezigheid van onderwerpen uit het benefietconcert in het boek en in SimQuest*

hoofdonderwerp	**subonderwerp**	**boek hoofd-stuk 1**	**het benefiet-concert**
lineaire formules	notatiebegrip	√	X
	evenwijdige lijnen	√	X
	formules van horizontale en verticale lijnen	√	√
	het tekenen van een grafiek aan de hand van een formule	√	X
	het geven van een formule bij gegeven één punt en de richtingscoëfficiënt	√	X
	het geven van een formule bij twee gegeven punten van een grafiek	√	X
functies onderzoeken	notatiebegrip	√	X
	interval notatie	√	X
	domein en bereik	√	X
	minima en maxima	√	√
	eigenschappen 2^{e}-graads functie	√	X
	het plotten van grafieken op de GR	√	X
	berekeningen uitvoeren aan grafieken op de GR	√	X
vergelijkingen en ongelijkheden oplossen	oplossen van 1^{e}-graads vergelijkingen	√	√
	oplossen van 2^{e}-graads vergelijkingen	√	√
	oplossen van ongelijkheden met behulp van GR	√	X
	oplossen van ongelijkheden met SimQuest		√
toepassingen	modelleren van praktisch probleem naar wiskundig model	√	√
	het economische model	√	√
hogere machts wortels	4^{e}-graads functies	X[1]	√
grafieken veranderen	translatie	X[1]	√

[1] Deze onderwerpen komen in het boek in hoofdstuk 3 aan de orde

Taak en context

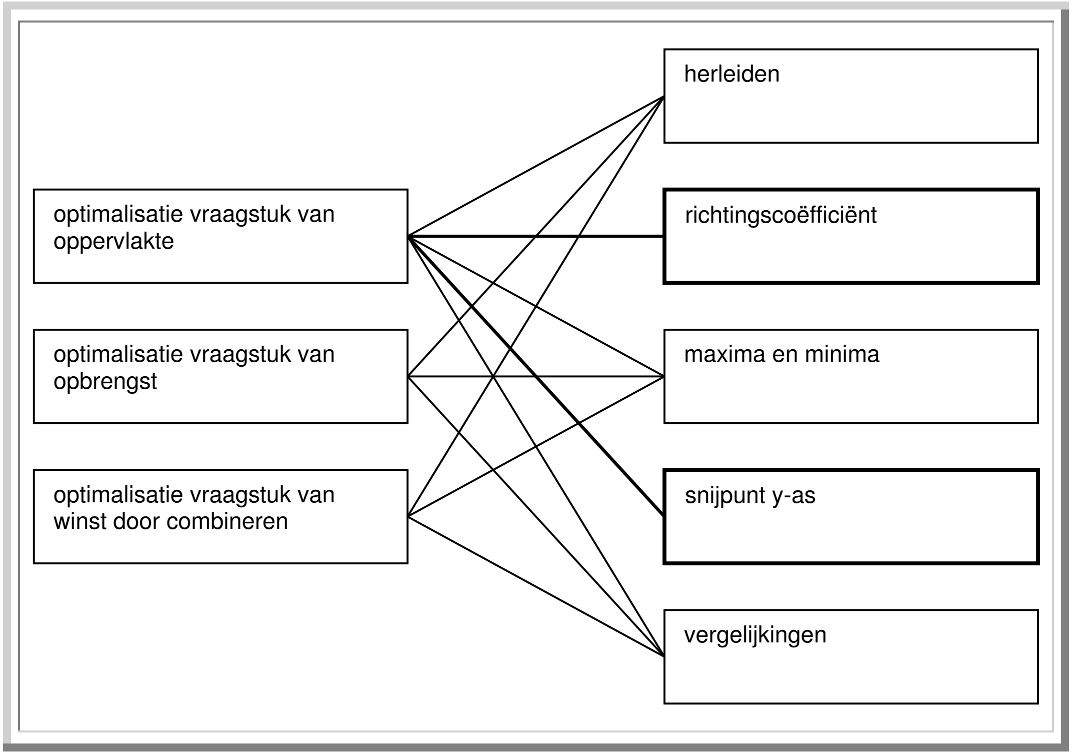
De inhoud wordt gepresenteerd in de context van de organisatie van een benefietconcert. Bij het organiseren van een dergelijk evenement moeten de organisatoren tal van beslissingen nemen, zoals over de vraag of een concert kan doorgaan gezien de kosten ervan. Met wiskundige modellen kunnen dat soort beslissingen goed ondersteund worden. Van tevoren kan men wel nadenken over de grootte van het terrein en de prijs van het toegangskaartje, maar het is onbekend hoeveel bezoekers bij een bepaalde toegangsprijs zullen komen. Een opdracht bij het benefietconcert is dan ook om een formule voor een verband tussen de prijs van het toegangskaartje en het aantal bezoekers op te stellen. Een andere opdracht is om de formule voor het verband tussen de lengte en de oppervlakte van het terrein op te stellen. De belangrijkste, te manipuleren invoervariabelen in deze applicatie zijn (a) de lengte van het terrein en (b) de prijs van het toegangskaartje.

Op twee beslissingen gaan we in, namelijk de keuze van de afmetingen van het terrein en de prijs van het toegangskaartje. Wiskundig gezien zijn er twee afzonderlijke deelproblemen: (1) een deel over het optimaliseren van de oppervlakte van het terrein en (2) een deel over het optimaliseren van de opbrengst van de kaartverkoop. Na het bestuderen van deze deelproblemen kunnen de resultaten van beide deelgebieden gecombineerd worden en dat gebeurt in (3) een deel waarin beide voorgaande delen samenkomen. Voor een bepaald aantal bezoekers is een bepaalde afmeting van het terrein nodig. Maar een groter terrein brengt ook hogere kosten met zich mee. Beide afzonderlijke onderdelen worden nu verbonden met elkaar door de variabele ‘het aantal bezoekers’. In dit combinatiedeel beantwoorden de leerlingen de centrale vraag ‘hoe kan de grootste winst worden bereikt?’. Zij hebben daarvoor kennis uit de beide andere delen nodig. Een betere beslissing levert een hogere opbrengst op.

In het benefietconcert is het doel dat leerlingen weten hoe verworven wiskundige concepten kunnen worden toegepast. Leerlingen kennen tweedegraads functies. Ze hebben in voorgaande lessen geleerd hoe ze met de GR het maximum of minimum van dergelijke functies kunnen bepalen. Nu gaat het er om deze kennis in te zetten bij concrete vragen. Optimalisatievraagstukken worden in verschillende concrete situaties bestudeerd. Daarbij zijn de wiskundige kennis en technieken, horend bij optimalisatie, die toegepast worden telkens gelijk.

Tijdens het werken met de simulatie kunnen nieuwe of bekende wiskundige begrippen de revue passeren. Variaties in de situatie van het feestterrein, zoals het toevoegen van een extra afscheidingswand, leveren variaties van bijvoorbeeld de richtingscoëfficiënt op. Ingaan op dit verschil kan leiden tot het ontwikkelen van een beter begrip van dat abstracte begrip.

Kortom binnen een context is het mogelijk meerdere wiskundige onderwerpen en begrippen te behandelen. Voordeel hiervan is dat eerder verworven begrippen herhaald worden en worden uitgebreid met een concrete uitwerking. Wanneer we in een schema aan de ene kant de verschillende onderdelen van de context zetten en aan de andere kant de verschillende wiskundige onderwerpen dan is dit geen duidelijke één op één verhouding. Een mogelijk schema is bijvoorbeeld het schema uit figuur 2.9.



Figuur 2.9 *Voorbeeldschema (benefietconcert) verband onderdelen van de vraagstelling in de context (links) en onderdelen uit de wiskunde (rechts)*

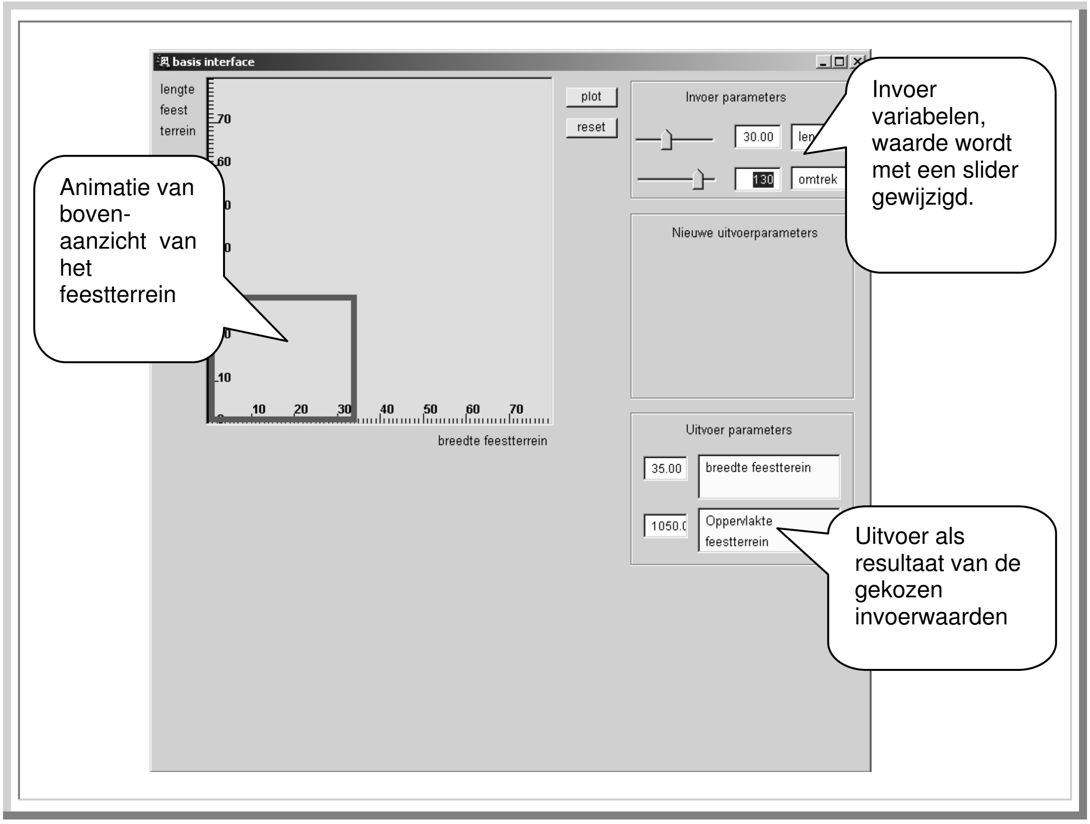
Tot slot geven we in tabel 2.2 een overzicht van het aantal inleidende teksten en opdrachten en de verdeling van de verschillende opdrachten over de drie niveaus. In dit stadium had de applicatie nog geen tabblad uitleg met daarin een begrippenlijst.

Tabel 2.2 *Overzicht van de opdrachten in het benefietconcert*

niveau	aantal inleidende teksten	aantal opdrachten
basismodel benefietconcert	2	31
prijsbepaling	1	13
combinatie	1	5
totaal	4	49

Interactieve gedeelte

Een voorbeeld van het interactieve gedeelte uit het benefietconcert is gegeven in figuur 2.10. Het interactieve gedeelte bestaat uit een animatie van het bovenaanzicht van een feestterrein, invoervelden en uitvoervelden. Wanneer de leerling bijvoorbeeld de invoervariabele 'lengte' verandert, dan veranderen ook het bovenaanzicht in de animatie en de uitvoervelden 'breedte feestterrein' en 'Oppervlakte feestterrein'. Het is een continu doorberekende statische simulatie.



Figuur 2.10 *Een voorbeeld van het interactieve gedeelte uit'het benefietconcert'*

Het Zwitserleven

Onderwerpen en relatie met het boek

In de applicatie 'het Zwitserleven' komen meerdere onderwerpen aan bod. Er is aandacht voor richtingscoëfficiënten, modelvorming, vergelijkingen en ongelijkheden en toepassingen van functies. In tabel 2.3 is aangegeven welke onderwerpen in het boek en in SimQuest behandeld worden. Hierbij is opnieuw geen onderscheid gemaakt in de mate van diepte waarin een onderwerp behandeld wordt.

Tabel 2.3 *Aanwezigheid van onderwerpen uit het Zwitserleven in het boek en in SimQuest*

hoofdonderwerp	subonderwerp	boek hoofd-stuk 1	het Zwitser-leven
lineaire formules	notatiebegrip	√	X
	evenwijdige lijnen	√	√
	formules van horizontale en verticale lijnen	√	√
	het tekenen van een grafiek aan de hand van een formule	√	√
	het geven van een formule bij gegeven één punt en	√	√

	de richtingscoëfficiënt		
	het geven van een formule bij twee gegeven punten van een grafiek	√	√
functies onderzoeken	notatiebegrip	√	X
	interval notatie	√	X
	domein en bereik	√	X
	minima en maxima	√	X
	eigenschappen 2^e-graads functie	√	X
	het plotten van grafieken op de GR	√	X
	berekeningen uitvoeren aan grafieken op de GR	√	X
vergelijkingen en ongelijkheden oplossen	oplossen van 1^e-graads vergelijkingen	√	√
	oplossen van 2^e-graads vergelijkingen	√	X
	oplossen van ongelijkheden met behulp van GR	√	X
	oplossen van ongelijkheden met SimQuest	X	√
toepassingen	modelleren van praktisch probleem naar wiskundig model	√	√
	het economische model	√	X
hogere machts wortels	4^e-graads functies	X[1]	X
grafieken veranderen	translatie	X[1]	√

[1] Deze onderwerpen komen in het boek in hoofdstuk 3 aan de orde

Taak en context

De inhoud wordt gepresenteerd in de context van het vinden van de snelste route. Een familie is aan het kamperen in Zwitserland (vandaar de naam Zwitserleven) en heeft op een dag een stad bezocht. Ze willen nu, na een lange dag, zo snel mogelijk terug naar de camping. De familieleden hebben verschillende ideeën over de snelste route. In de inleiding op het onderwerp worden de leerlingen geconfronteerd met het feit dat verschillende personen met alternatieven voor de te volgen route komen. De vraag rijst: 'wie heeft er gelijk en waarom?'.

Bij het maken van de opdrachten zien de leerlingen welke variabelen van invloed zijn op de totale reistijd. De leerlingen ontdekken dat de kortste route niet gelijk aan de snelste route hoeft te zijn. Aan het einde van de simulatie wordt de leerlingen gevraagd de optimale route te bepalen en de regels die ze daarvoor gebruiken op te schrijven.

Niet alleen het vinden van de route is een doel, ook het leren over begrippen als richtingscoëfficiënt en het opstellen van formules zijn doelen. Bij steilere bergen is de richtingscoëfficiënt groter. Routes bestaan uit afstanden en richtingen. Routes zouden beschreven kunnen worden met formules. Het opstellen van routes en het berekenen/vinden van de waarden van de parameters 'a' (de richtingscoëfficiënt) en 'b' (het snijpunt van de grafiek met de y-as) zijn taken waarmee de leerlingen in Zwitserleven worden geconfronteerd.

Zwitserleven is te onderscheiden in drie delen. In het eerste deel is er slechts een start- en eindpunt en zijn bergen nog niet aanwezig. In het tweede deel komt het berggebied erbij en wordt een uitstapje naar de overeenkomst tussen een steilere berghelling en een grotere richtingscoëfficiënt gemaakt. In het derde deel komt er een knikpunt bij. Dit knikpunt deelt de route in tweeën. Beide gedeelten kunnen verschillen in lengte en richtingscoëfficiënt.

De leerlingen kunnen in Zwitserleven veel parameters zelf instellen. Ze kunnen de ligging van het start-, knik- en eindpunt bepalen, de ligging van de rechthoek waarbinnen de bergen liggen en de gemiddelde snelheid van zowel binnen als buiten de bergen.

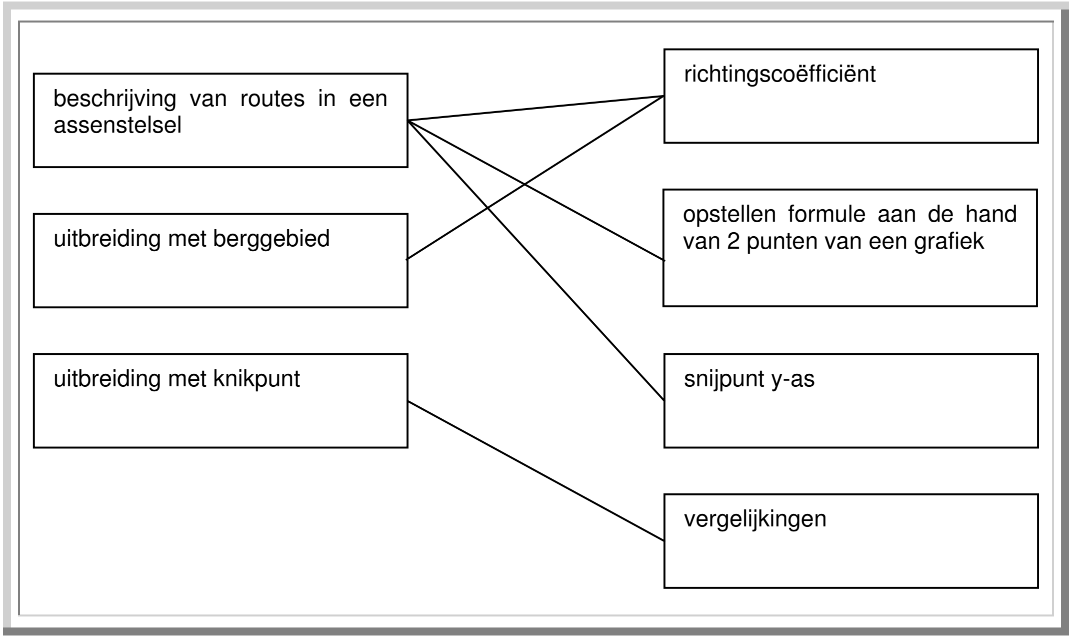
In slotopdrachten wordt de leerlingen gevraagd hun conclusies samen te vatten in algemene regels voor het bepalen van de route. In deze opdrachten wordt duidelijk of de leerlingen de voorgaande opdrachten daadwerkelijk begrepen hebben en in staat zijn om hun conclusies te generaliseren.

In het eerste deel komt voornamelijk de beschrijving van de route aan bod. Wiskundige onderwerpen als de richtingscoëfficiënt, het snijpunt van de grafiek met de y-as en de relatie van deze beide met een formule worden bestudeerd. Leerlingen kunnen hier zelf de ligging van routes bepalen en daarmee ook zelf direct de richtingscoëfficiënt veranderen. Hierdoor kan een onderwerp als het opstellen van de formule aan de hand van twee punten in een grafiek bestudeerd worden. Het gaat hier in eerste instantie om de introductie van deze onderwerpen. In Zwitserleven moet vanuit de concrete situatie een wiskundig begrip geabstraheerd worden.

In het tweede onderdeel gaan we in op een verandering van richtingscoëfficiënt in de grafiek in gebieden waarin de parameter snelheid een andere waarde heeft. In de animatie van de route kunnen leerlingen direct de plaats van de lijn in het assenstelsel manipuleren. In de grafiek waarin de afgelegde afstand is afgezet tegen de tijd, kunnen ze dat niet. Ze kunnen alleen kijken naar een richtingscoëfficiënt door de waarden van invoervariabelen te veranderen.

In het derde deel wordt een wiskundig vraagstuk behandeld dat eigenlijk buiten het 4 VWO curriculum valt. Het gaat om een complex verband tussen veranderende afstanden en hogere of lagere snelheden die leiden tot meer of minder tijdwinst. De leerlingen moeten hierin met name inzien dat de totale tijd om een afstand af te leggen afneemt tot een bepaald punt en daarna weer toeneemt. In de beginfase van ons onderzoek vonden we het niet belangrijk dat leerlingen voor deze problematiek ook berekeningen zouden uitvoeren.

Het aantal verschillende onderwerpen is relatief klein. Dit komt omdat het Zwitserleven belooft inzicht te realiseren in een beperkt aantal, met elkaar verband houdende, abstracte, wiskundige begrippen.



Figuur 2.11 *Voorbeeldschema (Zwiterleven) verband onderdelen van de vraagstelling in de context (links) en onderdelen uit de wiskunde (rechts)*

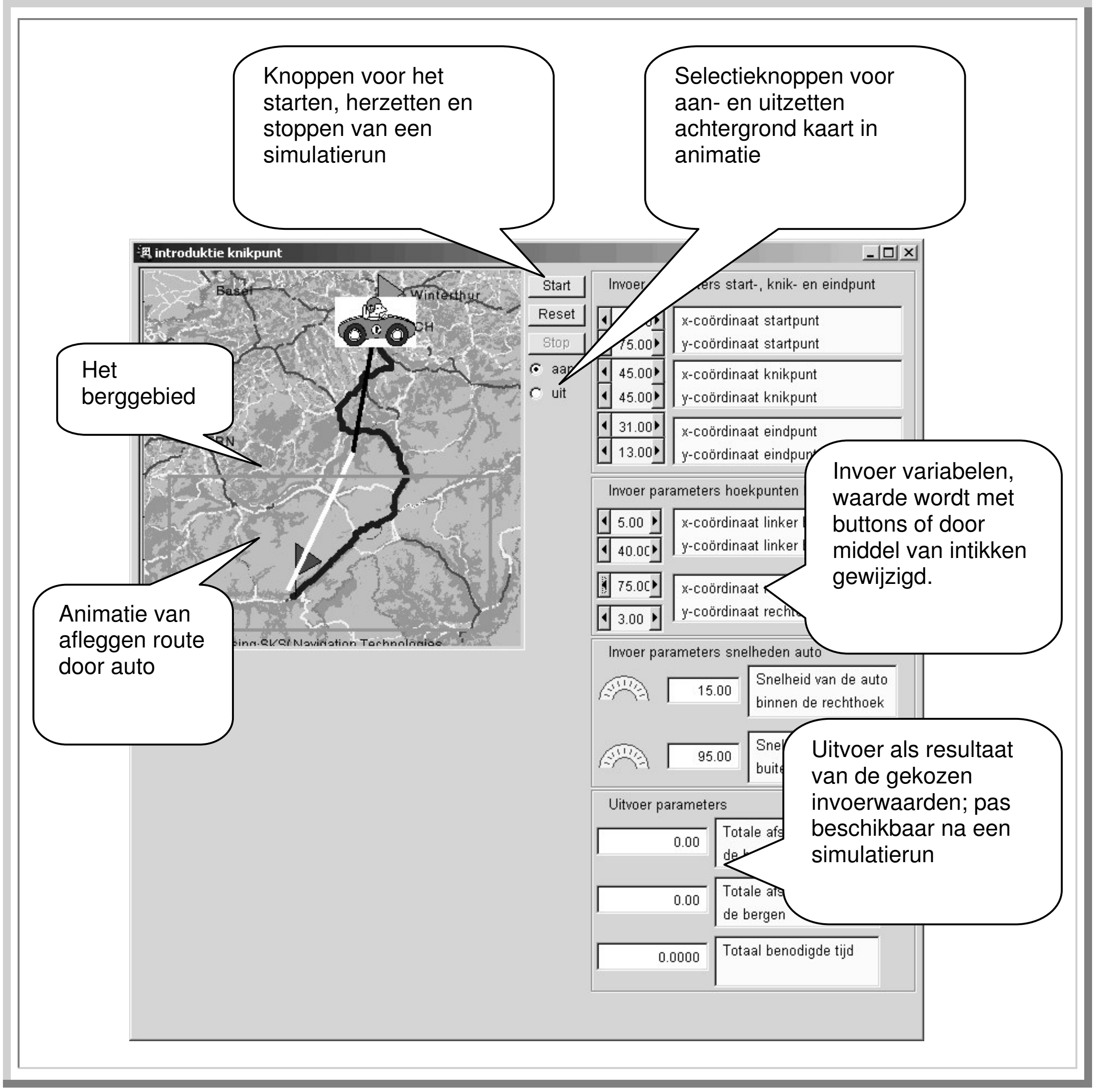
Tot slot geven we in tabel 2.4 een overzicht van het aantal inleidende teksten en opdrachten. In dit stadium had de applicatie nog geen tabblad uitleg met daarin een begrippenlijst.

Tabel 2.4 *Overzicht van de opdrachten in het Zwitserleven*

niveau	aantal inleidende teksten	aantal opdrachten
met knikpunt	7	34

Het interactieve gedeelte

Een voorbeeld van het interactieve gedeelte staat in figuur 2.12. Op de kaart is een route getekend die van een beginpunt via een knikpunt naar een eindpunt loopt. Het eerste deel van de route is zwart, het tweede deel is wit. Wanneer er op start gedrukt wordt, rijdt een auto van het beginpunt over de route naar het eindpunt. Het onderste gedeelte van de animatie (de rechthoek) geeft het berggebied aan. De grenzen van dit gebied kunnen aan de rechterkant van het interactieve gedeelte (bij invoer parameters hoekpunten berggebied) door de leerlingen bepaald worden.



Figuur 2.12 *Een voorbeeld van een interactief gedeelte uit het Zwitserleven*

2.1.3 Uitgangspunten bij het ontwerpen van opdrachten

Een gangbare manier waarop het ontdekkend leren wordt uitgewerkt in SimQuest is om leerlingen onderliggende modellen door het doen van experimenten te laten ontdekken (o.a. De Jong & Van Joolingen, 1998; Van Joolingen, 1993). De leerlingen worden in hun zoektocht naar de karakteristieken van het model ondersteund door opdrachten. In dit onderzoek zijn wij met deze gangbare uitwerking begonnen. We wilden leerlingen enkele wiskundige concepten zelf laten opstellen (ontdekken). Er werd vooraf geen introductie of uitleg op de concepten gegeven. Leerlingen moesten door het doen van experimenten zelf de karakteristieken van deze concepten achterhalen. De leerlingen werden aangezet tot experimenteren door opdrachten.

Hoe zijn de opdrachten ontworpen? Het idee was om leerlingen langzamerhand steeds specifieker naar concepten of formules te vragen. Aan de hand van een typering van de taak ‘het leren van de concepten richtingscoëfficiënt (a) en snijpunt van de grafiek met de y-as (b) en de formule van een lineair verband’ beschrijven we nu de opdrachtontwikkeling.

Eerst wordt in oriëntatieopdrachten de aandacht van de leerling gericht op de verkenning van concepten. Opdracht 1c (zie tabel 2.5) vraagt bijvoorbeeld de leerling zelf een punt te kiezen en vervolgens de ligging van dat punt te beschrijven. Vervolgens richten de opdrachten de aandacht op effecten van waardeveranderingen van variabelen. Een voorbeeld hiervan is opdracht 1d. Daarna worden de leerlingen geconfronteerd met opdrachten waarin een bepaalde toestand vooraf was vastgelegd en de leerlingen variabelen moesten manipuleren om die toestand te bereiken (zie opdracht 3a en 3b). Ten slotte wordt naar formules gevraagd (zie opdracht 3d), en wordt ingegaan op implicaties zoals geïllustreerd in opdracht 4d.

Tabel 2.5 *Beschrijving van de mogelijkheden tot ontdekken van de bepaling van ‘a’ (richtingscoëfficiënt) uit ‘het Zwitserleven’*

opdracht	**activiteit leerling**	**wat zou leerling kunnen ontdekken?**
Opdracht 1a Bij welke (x,y)-waarden van het eindpunt is de lengte van de route 10? Schrijf hieronder minimaal 5 mogelijke (x,y)-waarden van het eindpunt op.	De leerling verandert het eindpunt zo dat de lengte tien wordt. De leerling herhaalt dit vijf maal. Er zijn tal van mogelijke antwoorden.	De leerling ontdekt dat niet alleen afstand belangrijk is, maar ook richting.
Opdracht 1b De familie Berends wil uiteindelijk weer terug naar Brig (plaats bij de rode vlag). Brig heeft de coördinaten (31,13). Bij het openen van de opgave is Brig het eindpunt. Kies de (x,y)-waarden van het eindpunt opnieuw zo dat de route een lengte 10 heeft. Een extra eis is nu dat dit eindpunt op de rechte lijn van Zürich naar Brig ligt. Druk vervolgens op start om te controleren of je de ligging van het eindpunt juist gekozen hebt.	De leerling verandert het eindpunt zo dat de lengte tien wordt en de richting van de lijn juist is. Als ondersteuning voor de laatste eis is in de animatie een paarse lijn van Brig naar Zürich getekend.	De leerling ontdekt dat de richting van de lijn een berekeningsfactor is.
Opdracht 1c Kies een willekeurig punt op de kaart. Maak een beschrijving van de ligging van dit punt ten opzichte van Zürich. De beschrijving "de (x,y)-waarde van het eindpunt is (..,..)" is niet toegestaan. Laat iemand anders aan de hand van jouw beschrijving dit punt op de kaart aanwijzen.	De leerling moet een punt kiezen. Vervolgens moet de leerling de ligging van dit punt zo formuleren, dat het eenduidig is om welk punt het gaat.	De leerling kan ontdekken dat een richting als schuin omhoog niet heel specifiek is. Er is een specifiekere omschrijving voor een richting nodig.
Opdracht 1d Stel je wilt de positie van een punt ten opzichte van een ander punt beschrijven. Welke gegevens heb je hiervoor op zijn	In deze opdracht wordt de leerling gevraagd samen te vatten wat hij tot nu toe opgemerkt heeft.	Voor zover één van bovenstaande conclusies nog niet getrokken is, kan dat nu gebeuren.

minst nodig?		Bovendien worden de conclusies hier expliciet gemaakt.
…………………………………………	…………………………..	…………………………
Opdracht 3a Op de kaart is de route van Zürich naar Brig getekend. De standaard manier om een dergelijke rechte lijn in een assenstelsel te beschrijven is in de formulevorm: y = a x + b. Op de kaart is een tweede lijn (geel) getekend. De 'a' en 'b' van deze tweede lijn kun je variëren via de invoer parameters onder de kaart. Probeer de waarden voor de 'a' en de 'b' zo te kiezen dat deze tweede (gele) lijn over de eerste lijn van Zürich naar Brig valt. Druk pas op 'start' nadat je de gele lijn op de juiste plaats hebt gelegd.	Er wordt nu over gegaan van het variëren van het eindpunt naar het variëren van de concepten ‘a’ en ‘b’. De leerling moet in deze opdracht de ‘a’ en ‘b’ veranderen zodanig dat een lijn bovenop een andere lijn komt te liggen.	De leerling kan hier concluderen dat door het veranderen van ‘a’ de richting verandert en door het veranderen van ‘b’ de lijn verschuift. Waarschijnlijk zal een leerling niet veel specifieker worden, zoals dat ‘b’ het snijpunt van de grafiek met de y-as is.
Opdracht 3b In deze opgave is weer een lijn getekend met de formule y = a * x + b, waarbij je de 'a' en 'b' kunt variëren. Varieer nu de ligging van zowel het begin- als het eindpunt. Probeer telkens de 'a' en 'b' zo te kiezen dat de lijn over de route valt.	Doordat de leerling nu zelf de ligging van de lijn kan bepalen met het begin- en eindpunt kan de leerling nu systematischer onderzoeken hoe ‘a’ en ‘b’ bepaald kunnen worden. Het is de bedoeling dat de leerling meerdere varianten bekijkt.	De leerling krijgt nu gevoel voor het verband tussen twee bekende punten op een lijn en de bijbehorende formule.
…………………………………………	…………………………..	…………………………
Opdracht 3d Een lineaire lijn gaat door twee punten. Het eerste punt heeft de ligging (x1, y1) en het tweede punt heeft de ligging (x2, y2). Met behulp van de coördinaten van deze twee punten is de richtingscoëfficiënt van de lineaire lijn te berekenen. Stel de formule hiervoor op.	De leerling wordt nu gevraagd om te rekenen in plaats van te proberen. De leerling moet nu systematisch makkelijke getallen kiezen om deze formule te kunnen ontdekken.	$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$
…………………………………………	…………………………..	…………………………
Opdracht 4d Stel de lijn $y_1 = a_1 x + b_1$ en de lijn $y_2 = a_2 x + b_2$ gaan beide door Brig of te wel door het punt (31, 13). Ten hoogte van Zürich, of te wel het punt (50, 75), ligt de eerste lijn links van dit punt. De tweede lijn ligt rechts van Zürich. Is de volgende bewering waar? $a_1 > a_2$	De leerling weet nu de formule en waarvan de waarde van ‘a’ afhangt. Om deze opdracht op te lossen kan de leerling de waarde van a voor beide gevallen berekenen of proberen. Maar de leerling kan ook beredeneren of de stelling waar zal zijn op basis van het inzicht in de formule.	De leerling leert redeneren met schattingen zonder precies de waarde van ‘a’ te hoeven berekenen.
…………………………………………	…………………………..	…………………………

Dit is, kort samengevat, de lijn die gevolgd werd bij het ontwerpen van de opdrachten voor de applicaties. Het basisuitgangspunt was dat leerlingen de concepten en bijbehorende formule(s) zelf, maar zeer geleid, moesten opstellen. We gingen ervan uit dat een uitgebreide oriëntatie belangrijk was en dat het moment waarop leerlingen ontdekkingen zouden doen verschillend zou zijn. Het kunnen opstellen van de formule was vaak het eindpunt.

2.2 Bruikbaarheidonderzoek

Het ontwikkelde materiaal is in het eerste vooronderzoek getoetst op bruikbaarheid. Hierbij lag de focus vooral op de mate waarin leerlingen het ontwikkelde materiaal gebruikten. In de latere vooronderzoeken is de inhoudelijke bruikbaarheid steeds verder verfijnd.

Bij de bruikbaarheid van een programma kan naar verschillende aspecten van de applicatie gekeken worden (o.a. Abran, Khelifi, Suryn, & Seffah, 2003; Bevan, 2001). Dit komt onder andere tot uiting in definities van organisaties die beogen standaardisatie te realiseren, zoals ISO en IEEE (zie figuur 2.13).

"The capability of the software product to be understood, learned, used and attractive to the user, when used under specified conditions." (ISO/IEC 9126-1, 2000)
"The extent to which a product can be used by specified users to achieve specified goals with effectiveness, efficiency and satisfaction in a specified context of use." (ISO 9241-11, 1998)
"The ease with which a user can learn to operate, prepare inputs for, and interpret outputs of a system or component." (IEEE Std. 610.12-1990)

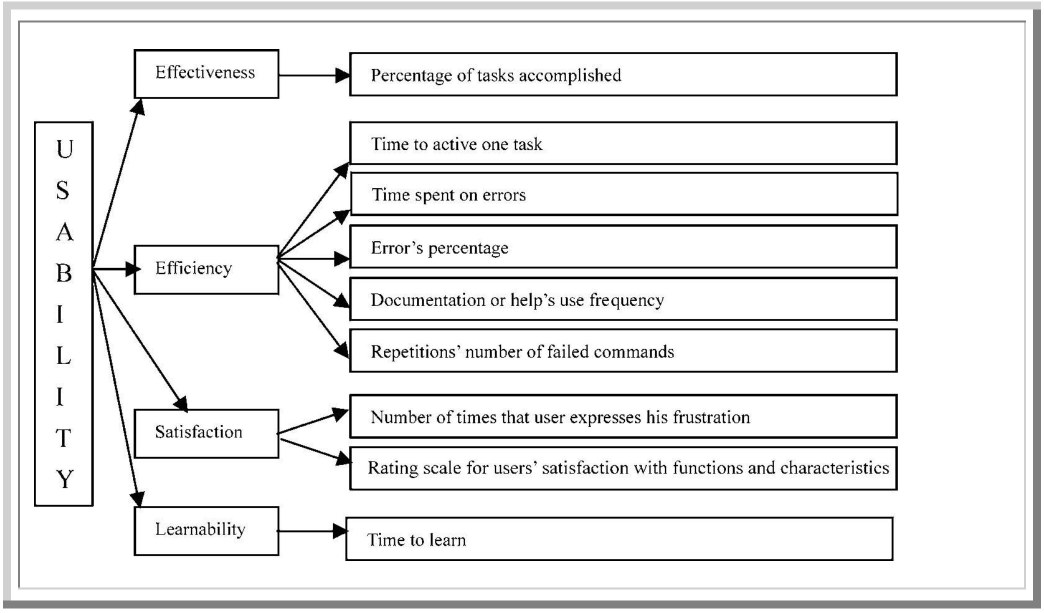
Figuur 2.13 *Definities van bruikbaarheid (Abran et al., 2003, p. 326)*

Facetten als begrijpelijkheid, leerbaarheid, opereerbaarheid, aantrekkelijkheid en gebruiksflexibiliteit zoals genoemd in deze definities zijn echter globaal en niet direct meetbaar. Vandaar dat ze zijn vertaald naar meetbare grootheden. Een voorbeeld van zo'n vertaling is het model van Nielsen (1994) (zie figuur 2.14).

Nielsen (1994) stelt voor zaken te meten, zoals de hoeveelheid tijd, het percentage fouten en de hoeveelheid volbrachte taken. Gebruikelijk is om bij een eerste onderzoek naar de bruikbaarheid vooral de technische kanten van het programma door te lichten. Ook in dit vooronderzoek hebben wij de technische bruikbaarheid onderzocht.

Daarnaast hebben we gekeken naar de inhoudelijke bruikbaarheid. Aspecten als 'het gemak waarmee de gebruiker de uitkomsten van het systeem kan interpreteren' hangen niet alleen af van hoe het technisch is weergegeven in het interactieve gedeelte, maar bijvoorbeeld ook van de verwachtingen en/of domeinkennis van de leerling. De vertaling van Nielsen (1994) is in dat opzicht een eenzijdige uitwerking richting technische bruikbaarheid. Voor de inhoudelijke bruikbaarheid hebben we daarom andere meeteenheden.

De inhoudelijke bruikbaarheid heeft betrekking op de doelen zoals in deel 1, hoofdstuk 3 gedefinieerd. De centrale vraag is: heeft het materiaal de potentie om bruikbaar ingezet te worden om die doelen te realiseren?



Figuur 2.14 *Model van bruikbaarheid van Nielsen (1994)*

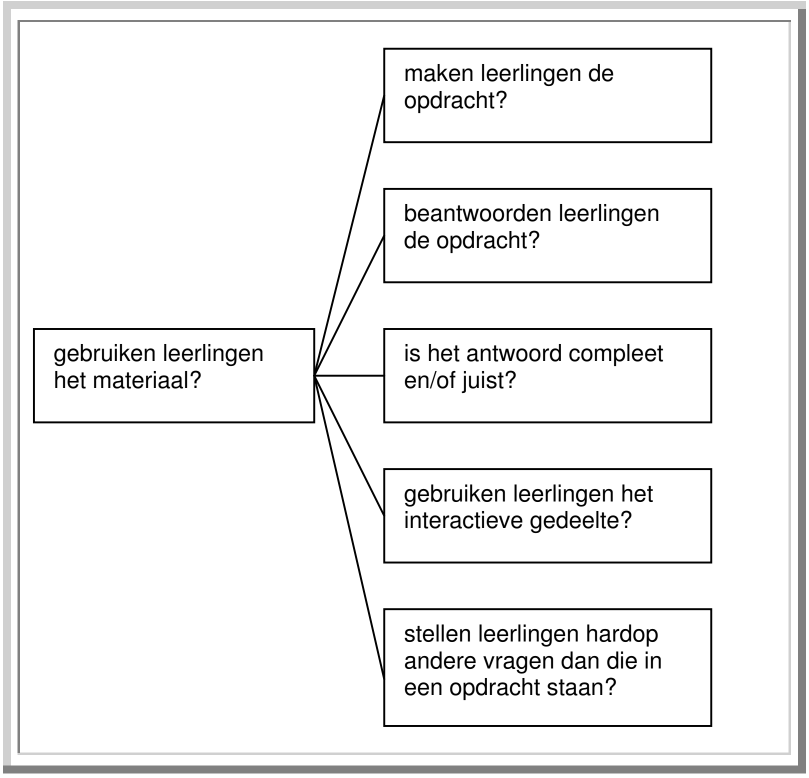
De inhoudelijke bruikbaarheid zullen we steeds verder verfijnen in de loop van de verschillende deelonderzoeken. De vraag wordt dan ook steeds meer of leerlingen laten zien met wiskundige begrippen en activiteiten bezig te zijn. In tabel 2.6 staan de vragen uit de vooronderzoeken gegeven.

Tabel 2.6 *Bruikbaarheid in de verschillende deelonderzoeken*

onderzoek	aspect van bruikbaarheid
Vooronderzoek 1	(a) Worden de verschillende onderdelen gebruikt? (b) Hoe worden de verschillende onderdelen gebruikt?
Vooronderzoek 2	In hoeverre komen de verschillende wiskundige begrippen en activiteiten aan de orde? Waardoor komen de wiskundige begrippen en activiteiten onvoldoende aan de orde?
Vooronderzoek 3	In hoeverre is het materiaal bruikbaar in een reële klassensituatie?
Grootschalig onderzoek	In hoeverre is het materiaal bruikbaar bij afwezigheid van de ontwikkelaars en met adviezen voor de inbedding?

Een eerste vereiste is dat leerlingen met het materiaal aan de slag gaan. We meten daarom een aantal aspecten die te maken hebben met het gebruik van opdrachten en het interactieve gedeelte. In het eerste vooronderzoek zijn de twee centrale vragen dan ook:
(1) worden de verschillende onderdelen gebruikt en
(2) hoe worden de verschillende onderdelen gebruikt?

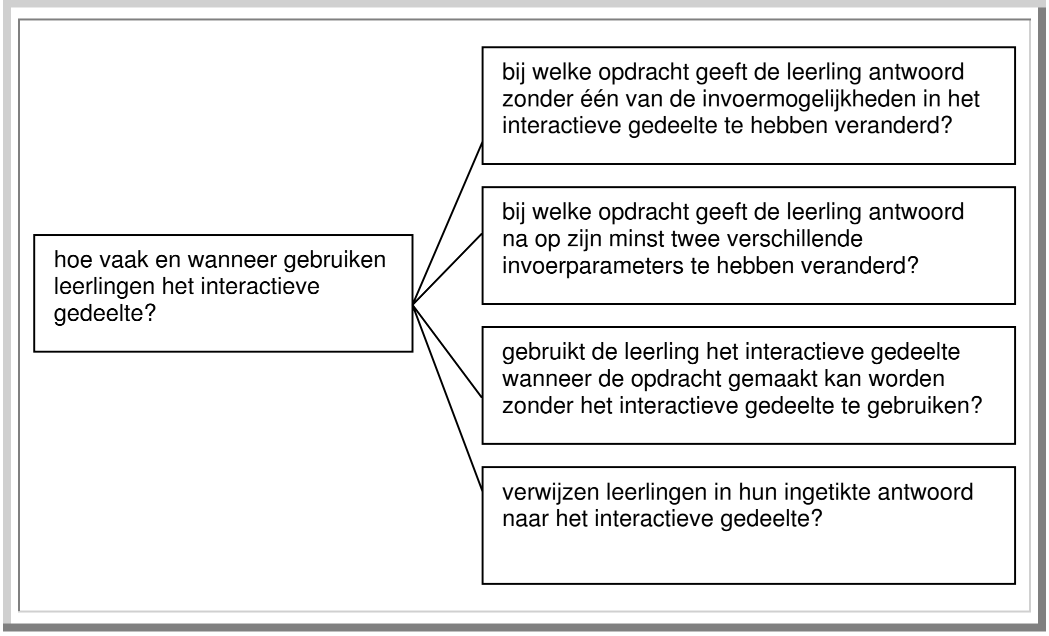
Wat bedoelen we precies met de vraag 'worden de verschillende onderdelen gebruikt'? We richten ons op aspecten zoals de mate waarin leerlingen met de opdrachten aan de slag gaan, of ze het interactieve gedeelte gebruiken en of leerlingen zich (daarbij) meer afvragen dan hetgeen in de opdracht aan de orde komt (zie figuur 2.15). Een leerling kan verder gaan dan de opdracht gaat, door zelf dingen uit te zoeken. Leerlingen kunnen naar aanleiding van het materiaal eigen vragen hebben en proberen die met behulp van het interactieve gedeelte te beantwoorden. Het materiaal geeft dan aanleiding tot het stellen van vragen.



Figuur 2.15 *Inhoudelijke bruikbaarheid bekeken in het eerste vooronderzoek*

Wat bedoelen we precies wanneer we het gaat om het 'hoe van het gebruik'? We richten ons op de manier waarop leerlingen met de applicaties omgaan en tegen welke problemen zij daarbij oplopen.

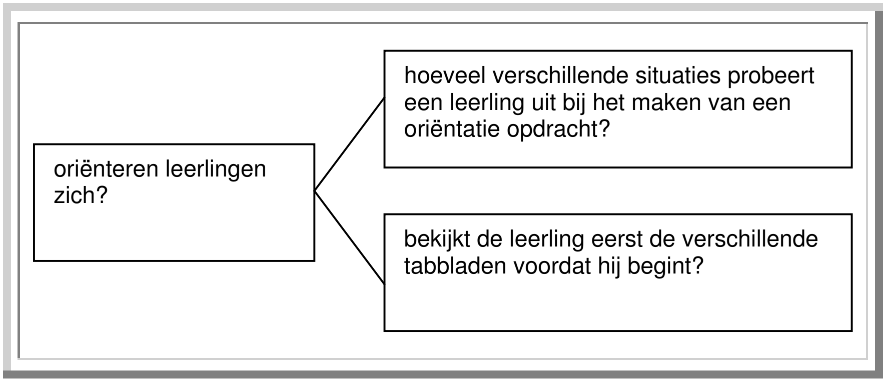
Eén aandachtspunt van de omgang met het programma is *de omgang met het interactieve gedeelte*. De gedachte was dat leerlingen vooral veelvuldig van het interactieve gedeelte gebruik zouden moeten maken, zoals vereist in het testen van hypothesen. De mate waarin het interactieve gedeelte wordt gebruikt, is mogelijk mede afhankelijk van de inhoud van de opdracht. We richten ons daarom op de vraag hoeveel variabelen bij een opdracht gemanipuleerd worden en of de leerlingen in hun antwoord verwijzen naar het interactieve gedeelte (zie figuur 2.16).



Figuur 2.16 *Vragen over interactieve gedeelte programma het eerste vooronderzoek*

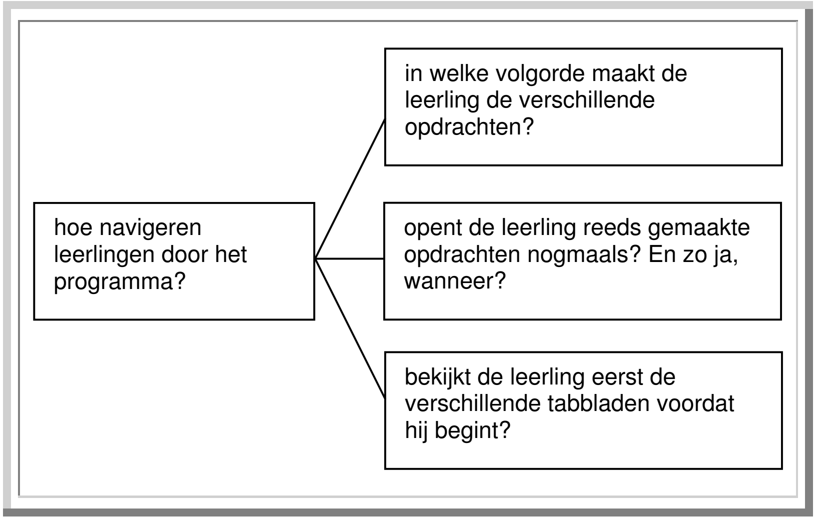
Een speciaal aandachtspunt is de verwerking van de inleidende teksten. Het is de bedoeling dat de leerlingen deze teksten lezen, het interactieve gedeelte exploreren en verbindingen leggen met hun voorkennis. Vanaf nu noemen we die activiteiten *oriënteren*. Dit oriënteren krijgt in de loop van het onderzoek een steeds sterker accent.

Het bruikbaarheidonderzoek richt zich met name op het exploratieve gedrag van de leerlingen. We richten ons op het aantal verschillende situaties die leerlingen uitproberen bij het maken van een inleidende tekst.



Figuur 2.17 *Vragen over de oriëntatie in het eerste vooronderzoek*

Een derde aandachtspunt in het eerste vooronderzoek betrof de *navigatie* (zie figuur 2.18). Er zijn twee hoofdaspecten van navigatie. Het ene punt heeft betrekking op het kiezen van opdrachten uit de lijst en het tweede punt heeft betrekking op het kiezen van een tabblad.



Figuur 2.18 *Vragen over de navigatie in het eerste vooronderzoek*

2.3 Methode

2.3.1 Deelnemers

Aan het vooronderzoek hebben zeven leerlingen (zes vrouwen en één man) vrijwillig tegen vergoeding deelgenomen. De leerlingen waren verdeeld in 3 groepen van twee en één leerling (de man) alleen. De leerlingen kwamen allen van dezelfde school, maar uit twee verschillende wiskundeklassen, en zaten in het vierde leerjaar van het VWO.

Het ontwikkelde programma is bedoeld voor leerlingen voor wie de wiskundige onderwerpen geheel nieuw zijn. In de klassen van de leerlingen was het hoofdstuk, waarbij het materiaal ontwikkeld is, al behandeld. De deelnemers hadden dus een ander startniveau van domeinkennis dan de doelgroep. Hierdoor konden de deelnemers zich op de nieuwe aspecten van het werken met SimQuest-applicaties, zoals bijvoorbeeld het bedenken en doen van experimenten, richten.

De ene helft van de groepen werkte met de applicatie 'het benefietconcert' en de andere helft met 'het Zwitserleven'. In de tabel 2.7 hieronder zijn enkele gegevens van de groepen gegeven:

Tabel 2.7 *Enkele gegevens van de deelnemers van het eerste vooronderzoek*

	Profiel[1]	Rapportcijfer tussen ……	Applicatie
Groep 1	m / m	5,5 en 7,5 / 5,5 en 7,5	Het benefietconcert
Groep 2	m / n	5,5 en 7,5 / 7,5 en 8,5	Het benefietconcert
Groep 3	n / n	5,5 en 7,5 / 5,5 en 7,5	Het Zwitserleven
Groep 4	m	5,5 en 7,5	Het Zwitserleven

[1] m = economie & maatschappij of cultuur & maatschappij, n = natuur & gezondheid of natuur & techniek

2.3.2 Procedure

De vier sessies, waarin telkens een andere groep met het programma werkte, vonden in een periode van twee weken plaats. De sessies duurden twee uur. In tabel 2.8 is de chronologische tijdsbesteding beschreven. Tijdens de introductie werd de deelnemers verteld dat het onderzoek zich richtte op de bruikbaarheid van het programma. Dat deze echter nog fouten bevatte en dat ze daar niet te veel aandacht aan hoefden te besteden. Verder werd de leerlingen gezegd dat hun prestaties niet beoordeeld zouden worden.

Tabel 2.8 *De procedure van een sessie uit het eerste vooronderzoek*

Tijdsduur	Activiteit	Toelichting
2 minuten	uitleg doel vooronderzoek	Het doel van het vooronderzoek werd aan de leerlingen uitgelegd. Aanwijzingen voor een aantal algemene zaken, zoals het omgaan met onverwachte gebeurtenissen werd gegeven.
8 minuten	introductie SimQuest	Met behulp van een simulatie over een natuurkundig onderwerp werden de verschillende typen opdrachten getoond. Tijdens deze introductie voerden de leerlingen zelf de handelingen, zoals het openen, beantwoorden en sluiten van de opdrachten, uit.
1,5 uur	werken met de simulaties	De leerlingen wisten van te voren hoe lang zij voor dit deel kregen en dat het niet nodig was om binnen dit tijdsbestek alle opdrachten gedaan te hebben. Er was hun gevraagd om niet al hun tijd aan slechts één of twee opdrachten te besteden.
20 minuten	individueel invullen van vragenlijst	De onderwerpen van de vragenlijst waren de technische bruikbaarheid en de ervaringen. Deze vragenlijst verschilde voor de twee simulaties in zoverre dat bij specifieke vragen als 'weet je waar deze knop voor diende' er verschil zat in het bijgevoegde plaatje, maar de strekking van de vragen was in beide vragenlijsten gelijk.

Tijdens het werken met het programma was de onderzoekster aanwezig. Ze ging niet in op vragen van de leerlingen en gaf geen reactie op wat er gebeurde tijdens het werken met het programma. Alleen als het onduidelijk was of leerlingen zich aan het oriënteren waren of antwoord gaven, vroeg de onderzoekster hier opheldering over.

2.3.3 Materialen

In het vooronderzoek werden twee verschillende applicaties, namelijk 'het benefiet concert' en 'het Zwitserleven', gebruikt. Twee groepen werkten met de ene en twee groepen werkten met de andere applicatie. Omdat de applicaties nog in ontwikkeling waren, bevatten ze nog een aantal fouten en gebreken.

2.3.4 Instrumenten

De logfunctie van SimQuest

Een aantal gegevens zoals de tijdstippen waarop verschillende schermen werden geopend, de antwoorden en de waarden van de variabelen op bepaalde momenten worden in logbestanden door SimQuest opgeslagen. Het type simulatie bepaalt wanneer de waarden van variabelen opgeslagen worden. Bij continu doorberekende statische simulaties worden alleen bij het openen en sluiten van een opdracht de waarden van de variabelen opgeslagen. Bij dynamische simulaties worden bij iedere doorrekening van het model de waarden van de variabelen opgeslagen. Bij het analyseren spelen deze verschillen een rol. In de logbestanden van dynamische simulaties kan voor iedere keer dat een leerling op start drukt nagegaan worden welke waarden de variabelen hadden. Dit geeft een goed beeld van de verschillende situaties die leerlingen uitproberen. Bij continu statische simulaties kan dit niet in de logbestanden terug gevonden worden en is het niet mogelijk om op basis van de logbestanden te reconstrueren welke verschillende situaties leerlingen bekeken hebben.

Video-opnamen van scherm

Om ook bij continu doorberekende statische simulaties te kunnen reconstrueren wat leerlingen precies voor situaties bekeken hebben, hebben we video-opnamen van het computerscherm gemaakt. Dit had bovendien als voordeel dat datgene wat de leerlingen zeiden en wat ze aanwezen op het scherm ook werd opgenomen.

Vragenlijsten

Aan het einde van de sessie vulden leerlingen een vragenlijst in. Deze vragenlijst had vooral betrekking op de technische bruikbaarheid van het ontwikkelde materiaal. De leerlingen werd bijvoorbeeld gevraagd of ze wisten waar bepaalde knoppen in het interactieve gedeelte voor dienden en om hun functie te omschrijven. De leerlingen werd ook gevraagd of ze bij de verschillende typen opdrachten wisten hoe ze konden antwoorden en afsluiten.

De vragenlijst ging ook in op enkele inhoudelijke aspecten. Zo is onder andere gevraagd of het materiaal ook in de wiskundeles gebruikt zou kunnen worden, in hoeverre de opdrachten in het materiaal lijken op die in het boek en of het mogelijk is om met het materiaal problemen in de praktijk op te lossen.

Observatielijsten en aantekeningen

Tijdens het werken met het materiaal was de onderzoekster aanwezig en maakte notities. Daarnaast heeft zij deels tijdens het observeren, deels achteraf bij het bekijken van de video's observatielijsten voor de verschillende groepen ingevuld. Deze observatielijsten gingen bijvoorbeeld over hoe leerlingen door de verschillende lijsten met opdrachten gingen, of leerlingen opdrachten meerdere malen openden en zo ja hoe vaak en of leerlingen allerlei mogelijkheden, zoals voor het veranderen van de waarde van invoervariabelen, gebruikten. Kortom de observatielijsten richten zich op de manier waarop leerlingen met het programma werkten (los van het domein).

2.4 Resultaten

2.4.1 Technische bruikbaarheid

Tijdens het werken met het programma heeft de aanwezige onderzoekster aantekeningen gemaakt van technische fouten. Na afloop van het vooronderzoek zijn deze verholpen. In de bespreking van de technische bruikbaarheid zullen we daarom kort zijn.

Over het algemeen was de technische bruikbaarheid goed volgens de leerlingen. Daar waar dit niet of minder het geval was, zijn in het materiaal in het tweede vooronderzoek aanpassingen gedaan. In de vragenlijst was aan leerlingen gevraagd te omschrijven waar een knop volgens hen voor diende. Van een aantal knoppen wisten leerlingen de functie niet of was hun omschrijving daarvan onjuist. Het ging daarbij om knoppen over en in grafieken en een knop die te maken had met het aanpassen van een animatie door de achtergrond te laten verdwijnen en het assenstelsel te laten verschijnen (of andersom). Dat leerlingen niet alle mogelijkheden van grafieken weten, is nadelig voor het gemak waarmee bepaalde zaken uitgezocht kunnen worden. Als leerlingen bijvoorbeeld niet weten dat ze een grafiek kunnen bewaren en in het assenstelsel een nieuwe grafiek erbij in kunnen tekenen, dan wordt het vergelijken van twee grafieken een stuk lastiger.

Een bijzonder aspect van de technische bruikbaarheid, namelijk het maken van een grafiek met behulp van de computer, vraagt om wat meer aandacht. Dit omdat het een eerste voorbeeld is van de keuze voor het laten werken van leerlingen op papier in plaats van in het computerprogramma. In de loop van het onderzoek zal meerdere malen de keuze voor werken op papier gemaakt worden. De reden van dit eerste geval zijn wiskundige bezwaren tegen het gebruik van een tool in SimQuest (in dit geval een tool voor het tekenen van grafieken). Deze bezwaren zijn een gevolg van technische beperkingen van deze tool. In bijlage B.3 staat dit nader omschreven. We trekken uiteindelijk de conclusie dat in de volgende onderzoeken de eigen grafiek niet langer in de SimQuest-applicatie gemaakt moet worden maar op papier.

2.4.2 Inhoudelijke bruikbaarheid

In dit gedeelte worden de data gepresenteerd met betrekking tot de inhoudelijke bruikbaarheid. We gaan in paragraaf 2.5 in hoe we deze data interpreteren en wat de consequenties daarvan zijn op de verdere ontwikkeling in het tweede vooronderzoek.

Oriëntatie
Een aspect van het gebruik van opdrachten (en het interactieve gedeelte) is of leerlingen zich oriënteren. Oriënteren leerlingen zich bij inleidende teksten op het interactieve gedeelte? Om hier een idee van te krijgen kijken we naar hoe actief leerlingen bij de inleidende opdrachten het interactieve gedeelte manipuleren. Groep 1 verandert bij geen enkele inleidende opdracht variabelen. Groep 2, 3 en 4 veranderen wel variabelen bij deze opdrachten. Alleen voor groep 3 geldt dat dit alleen bij de eerste inleidende opdrachten gebeurt en daarna niet meer. De andere twee groepen zijn niet aan nieuwe inleidende teksten toegekomen en het is dus onbekend of zij daar wel of niet variabelen veranderd zouden hebben. Het lijkt erop dat op zijn minst een deel van de leerlingen zich nauwelijks oriënteert op het interactieve gedeelte en expliciete opdrachten in de inleidende teksten om de verschillende variabelen uit te proberen niet uitvoert.

Verwerking van het materiaal: de opdrachten
In tabel 2.9 staan de belangrijkste gegevens over de verwerking van de opdrachten. Opvallend is het verschil in tempo: het grootste aantal gemaakte opdrachten is drie maal het kleinste aantal gemaakte opdrachten. Een kleiner aantal gemaakte opdrachten betekent overigens niet dat een groep minder hard gewerkt heeft of meer moeite met de opdrachten had. Het verschil tussen de groepen wordt voornamelijk verklaard door een verschil in werkstijl blijkt uit onder andere het percentage beantwoorde opdrachten, de antwoorden van de leerlingen en hun uitspraken. In het gedeelte over stapgrootte in paragraaf 2.5.2 gaan we hier verder op in.

Tabel 2.9 *Enkele gegevens over de gemaakte opdrachten tijdens het eerste vooronderzoek*

	aantal gemaakte opdrachten[1]	aantal beantwoorde opdrachten[2]	percentage juist beantwoorde vragen[3]	gemiddelde tijds-besteding per opdracht[4]	standaard deviatie gemiddelde tijdsbesteding[4]
Groep 1	46	30	70 %	62 s	8 s
Groep 2	31	22	64 %	166 s	24 s
Groep 3	32	32	34 %	130 s	22 s
Groep 4	15	15	53 %	326 s	72 s

[1] Aantal gemaakte opdrachten is het aantal opdrachten dat leerlingen geopend en gelezen hebben (de opdrachten met inleidende teksten zijn niet meegeteld).
[2] Aantal beantwoorde opdrachten is het aantal gemaakte opdrachten die leerlingen in SimQuest hebben beantwoord.
[3] Let op, dit is het percentage van de vragen die beantwoord zijn. Het kan zijn dat leerlingen de 'moeilijke' opdrachten hebben overgeslagen en daarom een relatief hoog percentage scoren.
[4] Dit is de tijd die een opdracht volgens de gelogte gegevens geopend is geweest. Ook bij deze getallen is slechts naar de beantwoorde opdrachten gekeken.

Gebruik van het materiaal: het interactieve gedeelte
Opvallend zijn de grote verschillen tussen de groepen in de mate waarin het interactieve gedeelte wordt gebruikt (zie tabel 2.10). Hoewel alle leerlingen de opdrachten gebruiken, gebruiken maar twee groepen het interactieve gedeelte bij een groot aantal opdrachten.

Tabel 2.10 *Gebruik van interactieve gedeelte*

	percentage opdrachten waarbij interactieve deel is gebruikt[1]
Groep 1	10 %
Groep 2	95 %
Groep 3	18 %
Groep 4	62 %

[1] Let op, bij deze getallen is slechts naar de beantwoorde opdrachten gekeken.

Aan de hand van de logbestanden van SimQuest, de video-opnamen en de aantekeningen van de observaties is een overzicht gemaakt waarin voor iedere opdracht is aangegeven welke variabelen de leerlingen gemanipuleerd hebben. In tabel 2.10 is te zien dat twee groepen leerlingen bij slechts een gering aantal opdrachten het interactieve gedeelte gebruikten. Groep 2 en 4 gebruiken het interactieve gedeelte ook wanneer dat voor het beantwoorden van de opdracht niet nodig is. Dit gedrag lijkt te wijzen op een gedegen oriëntatie. Andere gegevens (in latere vooronderzoeken) ondersteunen dit.

Wanneer groepen het interactieve gedeelte gebruiken manipuleren ze vaak slechts één variabele. Groep 1 heeft bijvoorbeeld bij geen enkele opdracht meer dan één variabele gemanipuleerd, groep 2 slechts bij 3 opdrachten. Er lijkt een verband te zijn tussen complexiteit en hoeveelheid gemanipuleerde variabelen. Dat wil zeggen bij de meer complexe opdrachten van Zwitserleven worden meer variabelen gemanipuleerd. Dat verband dient in vervolgonderzoek verder te worden verkend.

In de vragenlijst is aan leerlingen gevraagd of zij dachten dat het voor het beantwoorden van de vragen nodig was om het interactieve gedeelte te gebruiken. De helft van de leerlingen dacht dat dit vaak nodig was en de andere helft dacht dat dit regelmatig nodig was. Kortom, volgens de leerlingen is het interactieve gedeelte nodig om een groot deel van de opdrachten te kunnen beantwoorden.

Gebruik van het materiaal: de invloed van de complexiteit van opdrachten
In paragraaf 2.1.1 (Het instructiegedeelte) beschreven we de indeling van opdrachten in complex en eenvoudig op basis van de complexiteit met het werken van het interactieve gedeelte. We hebben onderzocht in hoeverre de complexiteit van invloed is op het beantwoorden van opdrachten, de juistheid van die antwoorden en het gebruik van het interactieve gedeelte.

De complexiteit van een opdracht (zie tabel 2.11) blijkt niet samen te hangen met de beantwoording ervan (Pearsons chi-kwadraat toets χ^2 = 0,14 en p = 0,71). Gemiddeld genomen beantwoordden de leerlingen ongeveer 4 van de 5 opdrachten.

Tabel 2.11 *Verband tussen complexiteit opdracht en maken van opdracht*

Complex	aantal[1]	percentage opdrachten dat beantwoord is	standaard deviatie
complex	101	79 %	41 %
eenvoudig	23	83 %	39 %

[1] Het totale aantal is gelijk aan de som van het aantal gemaakte opdrachten van iedere groep, oftewel 101 + 23 = 46 + 31 + 32 + 15

Complexiteit (zie tabel 2.12) blijkt wel samen te hangen met de juistheid van het antwoord (Pearsons chi-kwadraat toets χ^2 = 11,57 en p = 0,00). Complexe opdrachten worden minder vaak juist beantwoord dan eenvoudige opdrachten. In het tweede vooronderzoek zullen we dieper ingaan op de relatie tussen complexiteit en juistheid van het antwoord.

Tabel 2.12 *Verband tussen complexiteit opdracht en juistheid antwoord*

Complex	aantal[1]	percentage antwoord juist	standaard deviatie antwoord juist
complex	80	46 %	50 %
eenvoudig	19	89 %	32 %

[1] Dit aantal is alleen het aantal beantwoorde opdrachten, oftewel 80 is 79 % van 101 en 19 is 83 % van 23

Complexiteit (tabel 2.13) blijkt weer niet samen te hangen met het gebruik van het interactieve gedeelte (Pearsons chi-kwadraat toets χ^2 = 0,08 en p = 0,78). Blijkbaar zijn er andere redenen die (sterker) bepalen of een interactief gedeelte wel of niet gebruikt wordt bij het beantwoorden van een opdracht.

Tabel 2.13 *Verband tussen complexiteit opdracht en gebruik interactief gedeelte*

Complex	aantal[1]	interactief gedeelte gebruikt	standaard deviatie interactief gedeelte gebruikt
complex	80	44 %	50 %
eenvoudig	19	47 %	51 %

[1] Ook hier zijn alleen de beantwoorde opdrachten meegenomen

Naast de gegevens uit de logbestanden over het wel of niet (juist) beantwoorden van een opdracht en het gebruik van het interactieve gedeelte, zijn er gegevens verzameld over de mening van de leerling over de opdrachten. Leerlingen is in de vragenlijst gevraagd om aan te geven welke opdrachten zij moeilijk, gemiddeld en makkelijk vonden. Bij het beantwoorden van deze vraag hadden zij beschikking over uitgeprinte opdrachten (zonder de bijbehorende interactieve gedeelten). Wanneer leerlingen een opdracht bij geen van de drie categorieën genoemd hebben, wordt deze opdracht in de categorie 'geen mening' geplaatst.

Vinden leerlingen de opdrachten die wij complex achten ook moeilijk? De uitkomst is bevestigend. Complexe opdrachten worden relatief vaak gezien als moeilijk en niet complexe opdrachten relatief vaak als makkelijk (spearman's rangcorrelatie, $n = 185$, $rho = 0{,}25$ en $p = 0{,}00$ [3]). In tabel 2.14 staan de meningen van de leerlingen over de complexe en eenvoudige opdrachten.

Tabel 2.14 *Mening van leerlingen (individueel) over complexe en eenvoudige opdrachten*

	complex	**eenvoudig**	**totaal**[1]
geen mening	31	15	46
moeilijk	58	4	61
gemiddeld	45	15	58
makkelijk	43	20	58
totaal	177	54	231

[1] De leerlingen hebben individueel een mening gegeven en daarom is het totale aantal toe genomen.

Wanneer we naar de getallen in tabel 2.14 kijken, dan lijkt het alsof het niveau van de opdrachten juist is wat betreft de moeilijkheidsgraad (succes ervaringen en uitdaging). Leerlingen vinden ongeveer evenveel opdrachten gemakkelijk, gemiddeld als moeilijk. Voor individuele leerlingen is deze verdeling gevarieerder (zie tabel 2.15), maar ook uit deze verdeling komt naar voren dat leerlingen de opdrachten niet als extreem moeilijk of makkelijk ervaren. Deze conclusie is alleen waar wanneer leerlingen de moeilijkheidsgraad van de opdracht, zowel qua aanpak als qua inhoud, juist inschatten. Maar er is meer aan de hand.

Tabel 2.15 *Enkele gegevens van de meningen van leerlingen (individueel) over de moeilijkheidsgraad van de opdrachten*

	geen mening	**moeilijk**	**gemiddeld**	**gemakkelijk**
Groep 1 leerling 1	14 (30,4 %)	14 (30,4 %)	2 (4,3 %)	16 (34,8 %)
Groep 1 leerling 2	1 (2,2 %)	17 (37,0 %)	12 (26,1 %)	16 (34,8 %)
Groep 2 leerling 1	1 (3,2 %)	7 (22,6 %)	17 (54,8 %)	6 (19,4 %)

[3] Dit is de correlatie tussen de complexiteit van de opdracht (hoog/laag) en de mening van de leerlingen over die opdracht (makkelijk, gemiddeld, moeilijk). Opdrachten waarover de leerling geen mening had, zijn niet in de berekening meegenomen.

Groep 2 leerling 2	25 (80,6 %)	6 (19,4 %)	0 (0,0 %)	0 (0,0 %)
Groep 3 leerling 1	0 (0,0 %)	6 (18,8 %)	23 (71,9 %)	3 (9,4 %)
Groep 3 leerling 2	5 (15,6 %)	8 (25,0 %)	0 (0,0 %)	19 (59,4 %)
Groep 4	0 (0,0 %)	5 (33,3 %)	7 (46,7 %)	3 (20,0 %)

Wanneer we kijken naar de mening van de leerlingen over opdrachten en de juistheid van het gegeven antwoord, dan blijkt er een verband te zijn: hoe moeilijker leerlingen de opdrachten vinden, hoe vaker ze een onjuist antwoord geven (spearman's rangcorrelatie, n = 150, rho = 0,17 en p = 0,04 [4]).

Tabel 2.16 *Enkele gegevens over de mening van leerlingen (individueel) over de moeilijkheid en de juistheid van het antwoord*

	onjuist	juist	totaal[1]
geen mening	16	17	33
moeilijk	19	16	35
gemiddeld	27	27	54
makkelijk	21	40	61
totaal	83	100	183

[1] Alleen de beantwoorde opdrachten zijn meegenomen.

Helaas is het niet zo dat leerlingen alle naar hun mening makkelijke opdrachten ook juist beantwoorden (zie tabel 2.16). Leerlingen beantwoorden 34 % van de opdrachten die ze makkelijk vinden onjuist. Hiervoor zijn meerdere verklaringen mogelijk: (1) het niveau van deze opdrachten is misschien toch pittiger dan de leerlingen denken of (2) de leerlingen vinden de opdrachten relatief makkelijk maar absoluut gezien best lastig. Dit laatste blijkt niet uit de uitingen van de leerlingen en de korte tijd die leerlingen aan een aantal opdrachten besteedt (zie tabel 2.17). Leerlingen besteden wel meer tijd aan opdrachten die ze moeilijker vinden (spearman's correlatie, n = 150, rho = -0,34 en p < 0,01).

Tabel 2.17 *Gegevens over mening moeilijkheidsgraad en gemiddelde tijd die leerlingen besteden*

	aantal[1]	gemiddelde	standaard deviatie
geen mening	33	133	91
moeilijk	35	192	216
gemiddeld	54	148	135
makkelijk	61	84	89
totaal	183	132	140

[1] alleen de beantwoorde opdrachten zijn meegenomen

[4] Dit is de correlatie tussen de juistheid van het antwoord van de opdracht (juist/onjuist) en de mening van de leerlingen over die opdracht (makkelijk, gemiddeld, moeilijk). Opdrachten waarover de leerling geen mening had en/of die de leerling niet beantwoord heeft, zijn niet in de berekening meegenomen.

Wanneer de moeilijkheidsgraad hoger is dan leerlingen denken, kunnen we ons afvragen of leerlingen wel goed in staat zijn om in te schatten van ofwel wat de bedoeling van de opdracht is ofwel hoe goed ze de opdracht beantwoorden. Het kan zijn dat leerlingen de complexiteit van de aanpak van de opdracht wel juist inschatten, maar dat de complexiteit van de achterliggende wiskunde hiermee niet evenredig is en de leerlingen dit laatste niet goed inschatten. Dit geeft het vermoeden dat wanneer leerlingen weten hoe ze een opdracht aan moeten pakken, ze denken dat de opdracht ook inhoudelijk eenvoudig is en dat ze hem begrijpen. Dit verdient in vervolgonderzoek verder te worden verkend.

Navigatie
Opdrachten staan niet los van elkaar maar bouwen op elkaar voort. Het is daarom aan te raden om als leerling vooraf een beeld te vormen hoe de lijn in de opdrachten is om te weten waar het geheel naar toe gaat. Met andere woorden vooraf oriënteren op de structuur is gewenst. Bekijken leerlingen de verschillende tabbladen voor ze beginnen? Drie van de vier groepen doen dit niet, maar beginnen direct met de opdrachten in het eerste tabblad. Groep 3 doet dit wel. Deze groep kijkt eerst naar het enige andere tabblad 'uitleg' en gaat dan vervolgens terug naar het eerste tabblad en opent de eerste opdracht. Kortom slechts één groep oriënteert zich adequaat door de verschillende tabbladen te bekijken.

Wanneer leerlingen eenmaal begonnen zijn, volgen ze de volgorde in de lijst met opdrachten. Er is een duidelijk patroon; de opdrachten worden systematisch met weinig 'terugval' gemaakt. In het algemeen is dit om iets terug te zoeken of om een eerder gegeven antwoord te wijzigen of aan te vullen.

2.5 Interpretatie van de resultaten (met gevolgtrekkingen voor verdere ontwikkeling)

In paragraaf 2.4.2 hebben we de uitkomsten besproken over inhoudelijke bruikbaarheid van de SimQuest-applicaties. We werken deze zaken nu verder uit, waarbij we zowel op de cognitieve als de motivationele aspecten ingaan. In dit stadium van het onderzoek hadden we nog onvoldoende kennis van het leerproces wat betreft de kernactiviteiten om onze resultaten in een kader rond de kernactiviteiten te plaatsen. We hebben daarom een aantal aspecten nader bestudeerd, waarmee we een eerste oriëntatie op het leerproces verkregen. We hebben naar de volgende aspecten van inhoudelijke bruikbaarheid gekeken: oriënterende handelingen, waarnemingen omtrent stapgrootte, vragen van leerlingen, het heropenen van opdrachten, het gebruik van interactieve gedeelten, de specifiekheid van redeneringen en het gebruik van jargon. De bespreking van ieder aspect wordt afgerond met een aantal ideeën over achterliggende redenen van bepaalde resultaten. Deze ideeën zijn vervolgens vertaald in standpunten en ontwerpdilemma's voor het verdere ontwerp van het materiaal.

2.5.1 Vertalen tussen realisme en abstractie; oriëntatie

Van de leerlingen wordt verwacht dat zij zich goed oriënteren op de opdracht en het interactieve gedeelte in SimQuest. Tijdens die oriëntatie moeten zij een verband leggen tussen de opdracht en de werkelijkheid, en moeten zij zich een beeld vormen van de belangrijkste variabelen, hun onderlinge verbanden en voorwaarden of condities (Ainsworth, 2006). Deze zaken vereisen een zekere mate van abstractie. Dat is lastig (zelfs experts zijn bijvoorbeeld in bepaalde situaties matig in staat om representaties van grafieken te begrijpen (Roth & Bowen, 2001)).

De eerste, belangrijke stap in het nadenken over de relatie tussen opdracht en realiteit en begripsvorming over representaties in het interactieve gedeelte wordt gezet tijdens de oriëntatie. Onder oriëntatie verstaan wij een fase van exploratief handelen waarin een leerling nog geen expliciete doel nastreeft of specifieke uitkomst verwacht. Enkele taken in de SimQuest-applicaties beginnen met een oriëntatie opdracht. Voor deze opdrachten bestuderen wij het gedrag van de leerlingen om te zien in hoeverre zij SimQuest in voldoende mate exploreren (en wellicht komen tot abstracties). Er zijn in

SimQuest ook enkele oriëntatieopdrachten die niet bij aanvang van een taak worden gegeven. Deze opdrachten stimuleren de leerlingen om tijdens de taakuitvoering de aandacht te richten op een nieuw onderdeel in het interactieve gedeelte.

Geobserveerde handelingen van leerlingen

De observaties van de handelingen bij initiële oriëntatieopdrachten lieten grote verschillen zien tussen en binnen groepen. Maar in het algemeen kwam toch het beeld naar voren dat de meeste leerlingen zich beperkt oriënteerden. De opdracht 'Probeer zelf de verschillende knoppen uit en bekijk wat er gebeurt' leidde bijvoorbeeld nauwelijks tot actieve exploratie. Wij veronderstellen daarom dat er (te) weinig abstractie plaatsvond en als gevolg ook de begripsvorming beperkt was. Dat laatste bleek uit het feit dat de leerlingen er soms niet in slaagden tijdens de taakuitvoering vragen te beantwoorden die een beroep deden op bij de oriëntatie verkregen inzichten. De leerlingen gaven overigens wel aan dat zij het nut inzagen van (uitgebreide) oriëntatie.

De observaties van de tussentijdse oriëntatieopdrachten gaven een vergelijkbaar beeld. We zagen bijvoorbeeld dat zo'n opdracht soms in zijn geheel werd overgeslagen en het antwoord op een gerelateerde opdracht vervolgens fout was. We vermoeden dan ook dat sommige leerlingen opdrachten niet konden beantwoorden door hun matige oriëntatie.

Mogelijke oorzaken gebrekkige oriëntatie

Wat zijn de mogelijke oorzaken van deze gebrekkige oriëntatie? Eén verklaring is dat er een sterke drang is om te doen. De leerlingen zijn eerder geneigd taken te proberen op te lossen dan zich actief te oriënteren op taakkenmerken. In onderzoek naar mens-computer interacties wordt deze 'need to act' vaak gesignaleerd (Carroll, 1990). Een andere verklaring is dat niet elke nieuwe taak voorzien is van een initiële oriëntatieopdracht. De aanwezigheid leek daardoor incidenteel in plaats van structureel. Dit kan bij leerlingen de indruk hebben gegeven dat oriëntatieopdrachten niet steevast een vitaal onderdeel vormen van een taak aanpak. Een derde verklaring heeft betrekking op de formulering van de oriëntatieopdrachten. Een formulering als 'Probeer zelf de verschillende knoppen uit en bekijk wat er gebeurt' kan enerzijds te vaag zijn gevonden, en anderzijds als te vrijblijvend zijn ervaren

Mogelijke aanpak van oriëntatieopdrachten

Wat kunnen we doen om leerlingen te stimuleren zich beter te oriënteren - en daarmee meer aan te zetten tot abstractieprocessen? Eén oplossing ligt in de *structurele inbedding* van oriëntatieopdrachten in het materiaal. Indien elke nieuwe interface, taak of opdracht waar dat relevant voor is, begint met een opdracht tot oriëntatie laat dat de leerlingen zien dat oriëntatie op een taak gebruikelijk is en altijd dient plaats te vinden. Het doel is de leerlingen aan te zetten tot verkennende handelingen. Ze zijn dan meer vertrouwd met het interactieve gedeelte en beter voorbereid op de opdrachten die volgen.

Een andere oplossing ligt in de aanpassing van de *formulering van de oriëntatieopdrachten*. Zoals boven aangegeven gaat het hier om twee facetten: duidelijkheid en mate van 'dwang'. We nemen aan dat er een verband is tussen beide zaken (explicietere opdrachten hebben een meer dwangmatig karakter) en zullen in mogelijke oplossingen beide zaken tegelijk bespreken. De belangrijke restrictie is dat in de (her)formulering een goede balans moet worden gevonden tussen sturen en vrij laten. Te weinig sturing, zoals in de huidige formulering, leidt tot te weinig acties. Te veel sturing ontneemt de leerling teveel initiatief.

De duidelijkheid en dwang van oriëntatieopdrachten kan vergroot worden door deze te formuleren als opdrachten waarin leerlingen bepaalde waarden moeten aflezen. Zo'n opdracht is bijvoorbeeld 'wat is de waarde van de prijs?'. Een andere optie is leerlingen uit te nodigen tot oriëntatie door een variabele of uitkomst een bepaalde waarde te geven, bijvoorbeeld 'maak de prijs gelijk aan 2'. Met dit soort formuleringen wordt sterker de nadruk gelegd op het bestuderen van een variabele of het resultaat van een combinatie van variabelen. Bij beide oplossingen vermindert het explorative karakter van de oriëntatieopdrachten.

Van een geheel andere orde is een *herformulering* van de oriëntatieopdracht die leerlingen *uitnodigt tot een vereenvoudiging of abstractie*. Zo'n opdracht kan leerlingen bijvoorbeeld vragen te omschrijven waar bepaalde waarden vandaan komen ('waar komt de variabele kosten vandaan?'). Een voordeel van dit soort herformulering is dat de leerling beter de oorsprong of constructie van de opdracht begrijpt en zo direct wordt gestimuleerd een belangrijk inzicht te ontwikkelen dat de oriëntatieopdracht beoogt te realiseren. Een nadeel is dat zo'n opdracht niet uitnodigt tot handelingen in de SimQuest-applicatie en de leerling daardoor ook geen feedback van het systeem ontvangt. We maken in het vervolg van dit onderzoek geen gebruik van deze optie om die reden, maar ook omdat we willen vermijden dat dit bij leerlingen de indruk kan wekken dat ze alleen dienen te vereenvoudigen of abstraheren als ze daartoe expliciet worden uitgenodigd.

Een geheel andere manier om te komen tot oriëntatie kan liggen in het beter benutten van *probleemmomenten* van de leerlingen. Uit onderzoek naar mens-machine interacties komt naar voren dat op dit soort momenten de behoefte aan extra informatie groot is, en daardoor de kans op (her)oriëntatie groot is (Carroll, 1990). Eén van de manieren waarop leerlingen kunnen worden aangezet tot (her)oriëntatie kan liggen in de opname van expliciete verwijzingen naar oriëntatieopdrachten tijdens de taakuitvoering. We maken in het vervolg van dit onderzoek geen gebruik van deze optie omdat dit een registratie vereist die op dit moment niet mogelijk is in SimQuest.

2.5.2 Opsplitsen bij complexiteit, vereenvoudigen: Stapgrootte tussen opdrachten

De meeste wiskundige taken in de SimQuest-applicaties zijn opgesplitst in opdrachten. De aanname is dat deze opsplitsing voor de leerlingen de complexiteit van een taak reduceert en zij stap voor stap de deelproblemen leren oplossen. Door de opdrachten uit te voeren, leren ze belangrijke oplossingsstrategieën met bijbehorende condities kennen.

Het is lastig om de juiste stapgrootte tussen opdrachten te bepalen. Een dilemma hierbij is in hoeverre er gestuurd en getoond moet worden. Wanneer de stapgrootte zo klein is dat leerlingen zonder nadenken een opdracht kunnen uitvoeren leren ze te weinig waardoor ze bij latere opdrachten een soortgelijk probleem niet kunnen oplossen (zie deel 1, paragraaf 4.3.1). Een te grote stapgrootte is ook onwenselijk omdat de leerlingen dan de denkprocessen niet kunnen maken die liggen tussen het praktijkvoorbeeld en het formeel abstract wiskundig redeneren.

Een optimale stapgrootte stimuleert de leerlingen te komen tot abstracties die hen in staat stellen een volgende opdracht op te lossen. We hebben in dit verband naar twee acties van leerlingen gekeken: (1) Hebben de leerlingen alle opdrachten van een taak gemaakt? (2) Hoe ervoeren zij de stapgrootte?

Geobserveerde handelingen van leerlingen

De leerlingen voeren niet alle opdrachten systematisch uit en slagen er regelmatig niet in een volgende opdracht correct uit te voeren (tabel 2.9). Eén speciaal type opdrachten valt hierbij op als extra problematisch, namelijk die waarin leerlingen wordt gevraagd een formule op te stellen (figuur 2.19).[5] Een aantal van de deelnemers gaf zelf na afloop ook aan dat ze de stappen tussen opdrachten soms te groot vonden.

[5] De figuren kunnen uitspraken van leerlingen of docenten bevatten, maar ook observaties van de onderzoekster. In deze figuur is bijvoorbeeld een observatie weergegeven.

> Vanaf een bepaald ogenblik slaan de leerlingen de opdrachten, waarin hun gevraagd wordt een formule op te stellen, over. Daarvoor hebben ze al nauwelijks geprobeerd om dit soort opdrachten op te lossen. Ze vragen slechts aan elkaar 'weet jij nog hoe dat moest?'. Wanneer blijkt dat ze geen van beiden meteen weten hoe ze de formule op moeten stellen, gaan ze zonder verder ook maar iets te proberen, meteen door naar de volgende opdracht. Toch bleek in sommige gevallen uit conversaties over andere opdrachten dat de leerlingen wel degelijk de formule hadden opgesteld. Ze gebruikten dan namelijk de formule om aan de ander uit te leggen welke waarde zij moest proberen.
>
> (groep 1, vooronderzoek 1)

Figuur 2.19 *Voorbeeld werkwijze van groep 1 in het eerste vooronderzoek*

Mogelijke oorzaken te grote stapgrootte

Het (deels) overslaan van opdrachten kan zijn veroorzaakt door onvoldoende begrip. Wanneer leerlingen moeite hebben met het werken met het interactieve gedeelte, of de relatie van de opdracht met de taak of realiteit niet zien, komen zij bij bepaalde deelproblemen in de problemen. Ze missen dan kennis en moeten te grote mentale sprongen nemen. Het gevolg is dat ook daarop volgende opdrachten worden overgeslagen omdat de leerlingen deze niet meer kunnen volgen (Freudenthal, 1991). Het maken van fouten in opdrachten kan zijn veroorzaakt doordat leerlingen eerdere opdrachten hebben overgeslagen, of bij een voorgaande opdracht niet die abstracties hebben gemaakt die noodzakelijk waren.

Van een geheel andere orde is de rol van motivatie in de taakuitvoering. Om opdrachten uit te willen voeren moeten leerlingen gemotiveerd zijn. Leerlingen moeten bereid zijn zich in te spannen voor de opdrachten. Het gaat hierbij dan om de wil om een opdracht te beginnen en de inspanning voort te zetten tot deze is voltooid (Palmer, 2005).[6] Het (deels) overslaan van opdrachten kan zijn veroorzaakt door onvoldoende motivatie. Er waren aanzienlijke verschillen in de manier waarop leerlingen reageerden op problemen in het beantwoorden van opdrachten (figuur 2.19 en figuur 2.20). In paragraaf 2.4 concludeerden we dat de groepen verschillend omgaan met het materiaal. Een deel van de leerlingen probeert elke opdracht te beantwoorden, ook als ze het antwoord niet weten, en neemt daar de tijd voor. Deze leerlingen vertonen de gewenste, voortdurende betrokkenheid. Een ander deel van de leerlingen lijkt zo snel mogelijk het programma te willen doorlopen. Ze vullen in wat ze al weten en slaan over wat ze niet (meer) weten.

> De leerlingen werkten de opdrachten in een laag tempo door. Door dit lagere tempo zijn ze alleen aan de opdrachten uit het eerste tabblad toegekomen. Deze groep gaf het beantwoorden van een opdracht veel minder snel op dan groep 1. Hoewel ook zij niet meteen wisten hoe ze de formule op moesten stellen, deden zij toch pogingen om met behulp van het

[6] Pintrich, Marx en Boyle (1993) wijzen op drie aandachtspunten, signalen van motivatie, waarop observaties gericht kunnen worden, te weten: (1) de keuze om zich bezig te houden met een taak, (2) het niveau van betrokkenheid, de mate waarin een leerling in een opdracht duikt en (3) de bereidvaardigheid om door te gaan met een opdracht. Aan het eerste facet, de algemene motivatie als beginvoorwaarde, lijkt te zijn voldaan door het SimQuest-materiaal. De leerlingen gingen immers na een volledige schooldag nog enthousiast aan de slag met het programma. Het wordt anders als we kijken naar de motivatie om gedurende het gehele proces inspanning te blijven leveren. Leerlingen maakten in beperkte mate gebruik van het interactieve gedeelte en stelden relatief weinig eigen vragen. Bovendien waren er aanzienlijke verschillen in de manier waarop leerlingen reageerden op problemen in het beantwoorden van opdrachten.

interactieve gedeelte de opdracht te beantwoordden. Ze gaven dit soort opdrachten niet bij voorbaat op zoals de eerste groep dat wel deed. Ondanks hun inspanningen en doorzetten lukte het toch niet altijd om tot een antwoord te komen. Ze werken wel lange tijd aan een opdracht, maar geven toch geen antwoord.

(groep 2, vooronderzoek 1)

Door hun hoge tempo heeft deze groep alle opdrachten in de simulatie geopend en ook allemaal beantwoord. Bij het beantwoorden van de opdrachten gebruikten de leerlingen slechts zelden het interactieve gedeelte. Zelfs wanneer er gevraagd werd naar een nieuw element in een interactief gedeelte, antwoordden de leerlingen zonder het interactieve gedeelte te gebruiken en gaven dien ten gevolge in deze opdracht een foutief antwoord.

(groep 3, vooronderzoek 1)

Deze scholier was heel gedreven om de antwoorden op de opdrachten te vinden. Zelfs wanneer de antwoordpogingen allemaal waren verbruikt, ging hij door met het manipuleren van de invoervariabelen in het interactieve gedeelte, totdat hij het antwoord had gevonden. Deze scholier heeft dan ook alle opdrachten, die hij heeft geopend, beantwoord, maar is slechts aan 1/3 deel van de opdrachten toegekomen.

(groep 4, vooronderzoek 1)

Figuur 2.20 *Enkele manieren waarop de verschillende groepen met opdrachten in SimQuest omgingen tijdens het eerste vooronderzoek*

Mogelijke aanpak bij de verdere ontwikkeling van materiaal

De *stapgrootte* kan worden verkleind met tussenliggende opdrachten. De keuze voor het maken van deze opdrachten zou aan de leerling overgelaten kunnen worden. Zo'n eigen keuze geeft ruimte aan eigen initiatief en maakt afstemming op de eigen behoefte mogelijk. Leerlingen kunnen zelf de afweging maken of ze de opdracht voldoende begrijpen en naar de volgende opdracht gaan of dat ze nog een extra (deel)opdracht over het onderwerp maken. Met tussenliggende opdrachten verhogen we de kans op succes wat belangrijk is voor de motivatie (Palmer, 2005).

2.5.3 Het stellen van eigen vragen

Het belang van het stellen van eigen vragen wordt benadrukt door Van Oers (2005) die ze ziet als rode draad voor kennisontwikkeling. Wij zien eigen vragen als signaal van abstractieprocessen. Ze komen voort uit een actief verwerken van informatie. In onderzoekend leren zouden leerlingen zelf hun eigen hypothesen moeten opstellen. Doen ze dat? En welke andere, eigen vragen treffen we aan in het onderzoek?

Geobserveerde handelingen van leerlingen

Er is onderscheid te maken in twee aanleidingen tot het stellen van eigen vragen. Ten eerste kunnen leerlingen door eigen interesse en de wil om iets te begrijpen vragen stellen. Ten tweede kan het zijn dat door het materiaal bij leerlingen vragen opgeroepen worden.

Wat het eerste type vragen betreft, blijkt uit eerder onderzoek met SimQuest dat leerlingen dit niet doen. Zo vindt Gijlers (2005) bijvoorbeeld dat leerlingen weinig eigen proposities verbaliseren.

Wanneer we ons baseren op de uitspraken en activiteiten van leerlingen, is ook in dit onderzoek grond om te concluderen dat leerlingen geen eigen vragen stellen (zie ook paragraaf 2.4.2).

Er zijn ook nauwelijks vragen gesteld die voortkwamen uit het materiaal. Een typerend voorbeeld is beschreven in figuur 2.21. Zelfs dit onverwachte element leidde bij het merendeel van de leerlingen niet tot vragen.

> In 'het benefietconcert' was een onverwacht element ingebouwd. De leerlingen werden hier niet expliciet op gewezen. Vanaf bepaalde invoerwaarden trad dit fenomeen op. De leerlingen merkten slechts op dat er iets merkwaardigs gebeurde, maar vroegen zich vervolgens niet af waarom dit zou kunnen gebeuren. Ze probeerden ook niet uit te vinden of er enige logica of consistentie zat in het moment vanaf wanneer dit gebeurde.

Figuur 2.21 *Voorbeeld van moment waarop eigen vragen verwacht worden*

Mogelijke oorzaken ontbreken van eigen vragen

Enkele mogelijkheden voor dit ontbreken van eigen vragen zullen we kort aanstippen: de schoolcultuur, de veiligheid van de leeromgeving en de leerparadox. Zelf vragen stellen is nog steeds ongebruikelijk in de klas (Dillon, 1988; Graesser & Person, 1994). Alleen bij nieuwe vormen van leren zien we dat de grotere eigen verantwoordelijkheid leidt tot meer vragen van leerlingen (Pedrosa De Jesus, Teixeira-Dias, & Watts, 2003). Verondersteld mag worden dat het enige tijd duurt voordat de leerlingen die nu met SimQuest-applicaties hebben gewerkt zich meer actief lerend opstellen en meer eigen vragen stellen.

De bereidheid om vragen te stellen hangt ook samen met de ervaren veiligheid. Volgens Hanrahan (1999) geldt over het algemeen dat de leeromgeving voor leerlingen niet veilig is. Ze stelt dat één van de aannamen van constructivistisch onderwijs is dat leerlingen positief reageren op de mogelijkheid om in hun vragen hun naïeve gedachten te uiten. Zij concludeert dat die aanname door divers onderzoek wordt tegengesproken.

Tot slot is er de leerparadox (Carroll & Rosson, 1987). De paradox zegt dat je enerzijds kennis nodig hebt om iets te kunnen of willen, maar dat je anderzijds iets moet kunnen om die kennis te ontwikkelen. Anders gezegd: Om te weten wat interessant is, moet een leerling eigenlijk al over kennis beschikken. Gewoonlijk vertrouwen leerlingen er op dat het programma (en het boek en de docent) er wel voor zorgt dat ze hun tijd aan zinvolle problemen besteden. Gebeurt er iets onverwachts, zoals in 'het benefietconcert' (figuur 2.21) dan is dit nog geen aanleiding om vragen te stellen. Ontbreekt de kennis of de wil?

Mogelijke aanpak bij de verdere ontwikkeling van materiaal

De meer algemene factoren van schoolcultuur en veiligheid zijn, gezien de beperkte inzet van simulaties in het onderwijs, niet te veranderen met ontwerpmaatregelen in het materiaal. Een maatregel die wel genomen kan worden is dat de leerlingen *duidelijker wordt gewezen* op bijzonderheden in een opdracht zoals de eerder genoemde merkwaardigheid in 'het benefietconcert'.

2.5.4 Heropenen van opdrachten

Bij structureren gaat het erom dat leerlingen samenhang in verzamelingen ontdekken. Er kan gekeken worden naar opdrachten in een taak, naar taken onderling, en naar taken en de leerstof uit het boek. In dit vooronderzoek kijken we alleen naar structurerende acties binnen één taak. Om de samenhang te ontdekken tussen de verschillende opdrachten in een taak zullen deze onderling moeten worden vergeleken om overeenkomsten en verschillen te identificeren. De verwachting is dat leerlingen daarvoor regelmatig moeten terugkijken naar eerder gemaakte opdrachten. We kijken daarom naar het aantal keer dat leerlingen opdrachten opnieuw openen.

Geobserveerde handelingen van leerlingen

De leerlingen liepen, zoals we zagen (paragraaf 2.4), de lijst met opdrachten af. Het komt slechts sporadisch voor dat leerlingen opdrachten nogmaals openen. In de zeldzame gevallen dat leerlingen wel een eerder gemaakte opdracht heropenen, gaat het vrijwel altijd om slechts één enkele opdracht.

Mogelijke oorzaken voor het niet heropenen van opdrachten

Het ontwerp van SimQuest geeft op dit moment te weinig steun voor het heropenen van opdrachten door een gebrekkige benaming. Dit kan een belangrijke oorzaak zijn voor het beperkt heropenen van opdrachten. Eerder gemaakte opdrachten kunnen moeilijk worden terug gevonden omdat de benaming niets zegt over de inhoud van een opdracht. Met uitzondering van de inleidende teksten bestaat de naamgeving slechts uit een betekenisloos nummer (zie figuur 2.3).

Mogelijke aanpak bij de verdere ontwikkeling van materiaal

Om gemakkelijker terug te kunnen kijken naar opdrachten zijn twee maatregelen denkbaar. Ten eerste, *de benaming van opdrachten* kan betekenisvol gemaakt worden. In plaats van de reeks '04 opgave 01a, 05 opgave 01b, 06 opgave 02' ziet een leerling dan '01 eigen beschrijving punt, 02 vijf lengtes, 03 lengte en richting'. Ten tweede, *de benaming van de tabbladen* kan specifieker gemaakt worden. Op dit moment hebben de tabbladen vrij algemene benamingen zoals basismodel benefietconcert. Dit kan veel nauwkeuriger. Door te kiezen voor beter gedefinieerde namen (zoals inleiding, oriëntatie basismodel, basismodel, oriëntatie artiestenruimte, basismodel artiestenruimte) wordt duidelijker hoe de verschillende tabbladen onderling samenhangen en kan het terugkijken worden bevorderd.

2.5.5 Het gebruik van het interactieve gedeelte

Bij evalueren moet een leerling beoordelen of zijn ideeën, beweringen of voorspellingen kloppen met het resultaat uit het interactieve gedeelte. In dit vooronderzoek bekijken we of leerlingen het interactieve gedeelte van de SimQuest-applicaties gebruiken om resultaten te verkrijgen. Immers pas als er resultaten verzameld zijn, kunnen leerlingen evalueren of ze overeenkomen met zijn ideeën, beweringen of voorspellingen.

Geobserveerde handelingen van leerlingen

Leerlingen gebruiken bij lang niet alle opdrachten waar dat mogelijk en wenselijk is het interactieve gedeelte (zie tabel 2.10), en ook de mate waarin de invloed van variabelen wordt onderzocht is beperkt. Soms maken leerlingen zelfs geen gebruik van het interactieve gedeelte als dit noodzakelijk is voor de beantwoording van een opdracht (zie beschrijving groep 3, figuur 2.20).

Het onderscheid tussen wenselijk en noodzakelijk gebruik van het interactieve gedeelte is afhankelijk van de interpretatie van de leerling. Het benefietconcert bevatte bijvoorbeeld een opdracht die leerlingen expliciet vroeg het interactieve gedeelte te manipuleren om te komen tot een evaluatie (zie figuur 2.22). Geen van de twee groepen die aan deze opdracht heeft gewerkt, maakte gebruik van het interactieve gedeelte.

> Stel je hebt als eis dat de breedte >= 10 is. Uit het oplossen van de vergelijking voor de omtrek krijg je de oplossing: lengte < 25.
>
> Hoe kun je met behulp van de simulatie aantonen of dit antwoord juist is?
>
> benefietconcert opdracht 9a

Figuur 2.22 *Voorbeeld van een opdracht waarin gevraagd wordt te evalueren met behulp van het interactieve gedeelte*

Enigszins in tegenspraak met hun gedrag geven de leerlingen bij navraag overigens aan dat ze wel vinden dat er regelmatig gebruik gemaakt moet worden van het interactieve gedeelte voor de beantwoording van opdrachten.

Mogelijke oorzaken ontbreken inzet interactief gedeelte voor evaluatie

Leerlingen kunnen gebruik maken van het interactieve gedeelte om ideeën te evalueren. Waarom doen ze dit in zeer beperkte mate? Een verklaring kan zijn dat de leerlingen meenden het antwoord te kennen zonder die evaluerende activiteit uit te voeren. Andere verklaringen richten zich op de relevantie en het gebruiksgemak van het interactieve gedeelte. Misschien zijn leerlingen tijdens het werken met SimQuest er onvoldoende van doordrongen dat het interactieve gedeelte een nuttig hulpmiddel is. In theorie weten ze dat wel, maar in de toepassing, het gebruik, stokt het. Zelfs een expliciete instructie bleek onvoldoende. Het is ook mogelijk dat de leerlingen niet beschikken over voldoende vaardigheden in het werken met het interactieve gedeelte.

Mogelijke aanpak bij de verdere ontwikkeling van materiaal

De mogelijkheden van het interactieve gedeelte moeten bij de leerlingen in een vroeg stadium bekend zijn. Ze moeten er vertrouwd mee raken (gebruiksgemak) en een beeld krijgen van het nut van switchen naar het interactieve gedeelte om ideeën te evalueren. *De oriëntatieopdrachten* zijn voor dit doel bij uitstek geschikt. De eerder voorgestelde aanpassing van deze opdrachten dient dus ook om gebruik van het interactieve gedeelte voor evaluerende activiteiten te bevorderen.

2.5.6 Reacties van leerlingen op (het ontbreken van) feedback

In dit gedeelte kijken we naar de reacties van leerlingen op feedback en op het ontbreken ervan. Aan de hand van onze observaties trekken we conclusies over het belang van feedback op de inhoudelijke bruikbaarheid. Deze conclusies hebben gevolg voor de verdere ontwikkeling van het materiaal op het punt van feedback.

Geobserveerde handelingen van leerlingen

De leerlingen reageren sterk op feedback. Ze zijn doorgaans enthousiast wanneer een SimQuest-applicatie aangeeft dat hun antwoord ‘goed’ is. Wanneer het antwoord ‘fout’ is, lijkt dit van invloed op hun zelfvertrouwen. Het maakt hen onzeker. Uitspraken als ‘dat kan ik niet’ en ‘weet jij hoe dat moet, ik niet’ kwamen regelmatig voor.

De leerlingen reageren ook sterk op de afwezigheid van feedback op momenten waarop ze die verwachten. Na elk antwoord verwachten ze een reactie van de SimQuest-applicatie, zo lijkt het. Bij navraag gaf de meerderheid van de leerlingen aan dat ze dan feedback misten, ze vonden het vervelend dat er geen reactie kwam.

Mogelijke oorzaken van sterke reactie op terugkoppeling

We denken dat er in elk geval twee belangrijke oorzaken zijn die ertoe leiden dat de leerlingen sterk reageren op de (afwezigheid van) feedback, namelijk onzekerheid en afhankelijkheid. Onze interpretaties over mogelijke oorzaken zijn sterk speculatief, of zij ook echt een fundamentele rol spelen in de reacties van leerlingen op feedback door SimQuest dient nader onderzocht te worden.

Onzekerheid De SimQuest-applicaties geven om verschillende redenen niet op alle antwoorden feedback. Eén van de redenen is dat we niet alle onzekerheid bij leerlingen *willen* wegnemen. Onzekerheid hoort bij het doen van onderzoek. Een onderzoeker weet niet altijd zeker of zijn interpretatie(s) klopt. Dat willen we de leerlingen in het SimQuest-materiaal ook laten ervaren. Een moeilijkheid is dat leerlingen dit vaak niet verwachten (Keys, Hand, Prain, & Collins, 1999). Een andere reden is dat we sommige onzekerheden niet *kunnen* wegnemen. Het is niet altijd mogelijk om bij elk antwoord van de leerling te kunnen inschatten of dit goed of fout is.

Afhankelijkheid De leerlingen stellen zich nogal afhankelijk op. Ze hebben schijnbaar een grote behoefte aan regelmatige feedback over hun interpretaties. Zelfs wanneer zij zelf iets bewezen zien in hun experimenten komt die afhankelijkheid naar voren in een vraag als ‘is dit nu goed of niet?’. Leerlingen zijn gewend aan een situatie waarin het lijkt of niet zij maar vooral de docent of het boek over waarachtige kennis beschikt. Hun cultuur is er één waarin waarheid wordt bepaald door het bekrachtigen ervan door de leraar (Lampert, 1990).

Mogelijke aanpak bij de verdere ontwikkeling van materiaal

Hoewel (een deel van de) leerlingen graag vaker *terugkoppeling* op de juistheid van hun antwoord wil hebben, is dit niet op voorhand een reden om daaraan te voldoen. De speculaties over mogelijke oorzaken leidden echter wel tot een nadere analyse van de typen opdrachten in de SimQuest-applicaties waarop feedback moet of kan worden gegeven.

We maken onderscheid tussen oriënterende - en andere opdrachten. Bij de eerstgenoemde opdrachten is het doel verkenning van de mogelijkheden van de SimQuest-applicatie. Onzekerheid kan juist hier heel nadelig werken. Aanwezigheid van feedback is dus aan te raden. Snelle en sturende feedback kan bij deze opdrachten ook goed worden gegeven zonder veel risico op een mismatch met de interpretatie van de leerling.

Bij de andere opdrachten is de situatie complexer. Bij deze opdrachten is het hoofddoel kennisconstructie door de leerling. Een zekere mate van onzekerheid en onafhankelijkheid zijn dan wenselijk. Wij houden daarom, in elk geval voorlopig, vast aan afwisseling in de aan- en afwezigheid van feedback bij dit soort opdrachten.

2.5.7 De specifiekheid van redeneringen

Bij beredeneren, bewijzen en aantonen gaat het om denkactiviteiten die leerlingen verrichten om beweringen te ontdekken, te onderbouwen of toe te lichten. Ze moeten bijvoorbeeld zaken afleiden uit stellingen of argumenten geven waarom een formule (niet) klopt of waarom een idee aannemelijk is. In het tweede vooronderzoek bestuderen we dit soort denkprocessen door te kijken naar de uitspraken, handelingen en uitkomsten van leerlingen tijdens het werken met de SimQuest-applicaties. In dit vooronderzoek bekijken we slechts één signaal, namelijk de specificiteit van de redeneringen bij het maken van een formule.

We maken onderscheid tussen kwalitatieve - en kwantitatieve redeneringen. Een kwalitatieve redenering leidt tot een richtinggevend verband tussen variabelen. Een voorbeeld is de uitspraak ‘als de lengte groter wordt, wordt de breedte kleiner’. In een kwantitatieve redenering worden de waarden in een formule gespecificeerd. Een voorbeeld is de uitspraak ‘als de lengte met 10 toe neemt, dan neemt de breedte met 10 af’.

Geobserveerde handelingen van leerlingen

De specifiekheid van redeneringen van leerlingen is vaak van mindere kwaliteit dan gehoopt. Leerlingen blijven vaak steken op het niveau van kwalitatieve redeneringen. Ze gaan niet over tot kwantitatieve redeneringen. De leerlingen proberen wel invoervariabelen te manipuleren om uitvoervariabelen op een bepaalde waarde te krijgen, maar hun redenering is slechts globaal richtinggevend. Ze bedenken bijvoorbeeld wel ‘de invoerparameter moet kleiner worden om de uitvoerwaarde op de juiste waarde te krijgen’ maar niet ‘telkens als de invoerparameter met 10 afneemt, neemt de uitvoer met 10 toe’.

Oorzaken en mogelijkheden voor aanpak

We gaan in dit vooronderzoek niet in op mogelijke oorzaken en aanpassingen van het materiaal. We komen op dit punt terug bij de bespreking van de resultaten van het tweede en derde vooronderzoek.

2.5.8 Het gebruik van jargon

Bij communiceren en presenteren draait het in dit onderzoek uitsluitend om vaktaal. Algemene aandachtspunten van communiceren of presenteren vallen buiten het onderzoek. Vaktaal of jargon is een omvattend begrip voor zaken als wiskundige termen (zoals functie, lineair verband, richtingscoëfficiënt) en wiskundige grammatica (zoals notatiewijze en formuleringen als ‘druk O uit in l’ en ‘stel de richtingscoëfficiënt is positief, dan geldt dat voor een toenemende richtingscoëfficiënt de grafiek steiler wordt’).

In het tweede vooronderzoek bestuderen we in dit verband de productie van vaktaal, waaronder het gebruik van termen en het ontwikkelen van formules. In dit vooronderzoek kijken we naar de reacties van leerlingen op vaktaal. Dat wil zeggen, we kijken naar uitspraken van leerlingen over begrippen of formules en we kijken naar hun acties als ze met vaktaal worden geconfronteerd.

Geobserveerde handelingen van leerlingen

Een bijzonder voorbeeld van de invloed van vaktaal op het handelen van de leerling troffen we aan in de opdracht waarin leerlingen werd gevraagd een formule op te stellen. We zagen dat de leerlingen met name deze opdrachten oversloegen (figuur 2.19).

Mogelijke oorzaken onjuist of onbeantwoorde opdrachten bij gebruik van terminologie

De reacties op, of acties na, het lezen van vaktaal zijn niet zo maar te herleiden tot een enkele oorzaak. Eerder al gaven we aan dat er een verband kan bestaan tussen abstractieprocessen, vaktaal en stapgrootte. Andere factoren die een rol kunnen spelen zijn onzekerheid en kennis.

Onzekerheid. Onzekere leerlingen kunnen door het gebruik van vaktaal nog onzekerder worden. De wiskundige terminologie sluit hen min of meer uit van deelname aan ‘het gesprek’, of kan associaties oproepen van onkunde.

Kennis Als je niet weet wat een begrip betekent, of hoe je een formule opstelt, kun je opdrachten daarover niet maken. Overslaan ligt dan voor de hand.

Mogelijke aanpak bij de verdere ontwikkeling van materiaal

Dat de SimQuest-applicaties *gebruik moeten maken van jargon* is duidelijk. Leerlingen moeten zich ook de wiskundige vaktaal eigen maken. De vraag is dus vooral ‘Wanneer moeten SimQuest-applicaties gebruik maken van jargon?’ Bij oriëntatieopdrachten moet jargon vermeden worden om geen (kennis)barrières op te werpen of onzekerheid te versterken. Voor de opdrachten ligt het verder voor de hand een gefaseerde opbouw te volgen.

Een andere vraag is 'Wanneer krijgen de leerlingen uitleg over vaktaal?' Aan deze vraag is in het eerste ontwerp van het SimQuest-materiaal nog weinig aandacht besteed. De ontwerpregel die we voor aanpassing van het materiaal zullen volgen is het *'just-in-time' 'just-enough' principe* (zie Carroll, 1990; Kester, Lehnen, Van Gerven, & Kirschner, 2006). Volgens dit principe is het belangrijk uitleg ter plekke te geven, en deze uitleg te beperken tot die zaken die noodzakelijkerwijs voor taakuitvoering moeten worden uitgelegd.

3 Het tweede vooronderzoek: aanpassing en uitbreiding van lesmateriaal voor wiskunde en verfijnder onderzoek naar de bruikbaarheid daarvan

In het tweede vooronderzoek is het lesmateriaal verder ontwikkeld. We beschrijven de aanpassingen en uitbreidingen. We concentreren ons op “Zwitserleven” omdat dit een dynamische simulatie is en er meer gegevens in de gelogde bestanden worden opgeslagen.

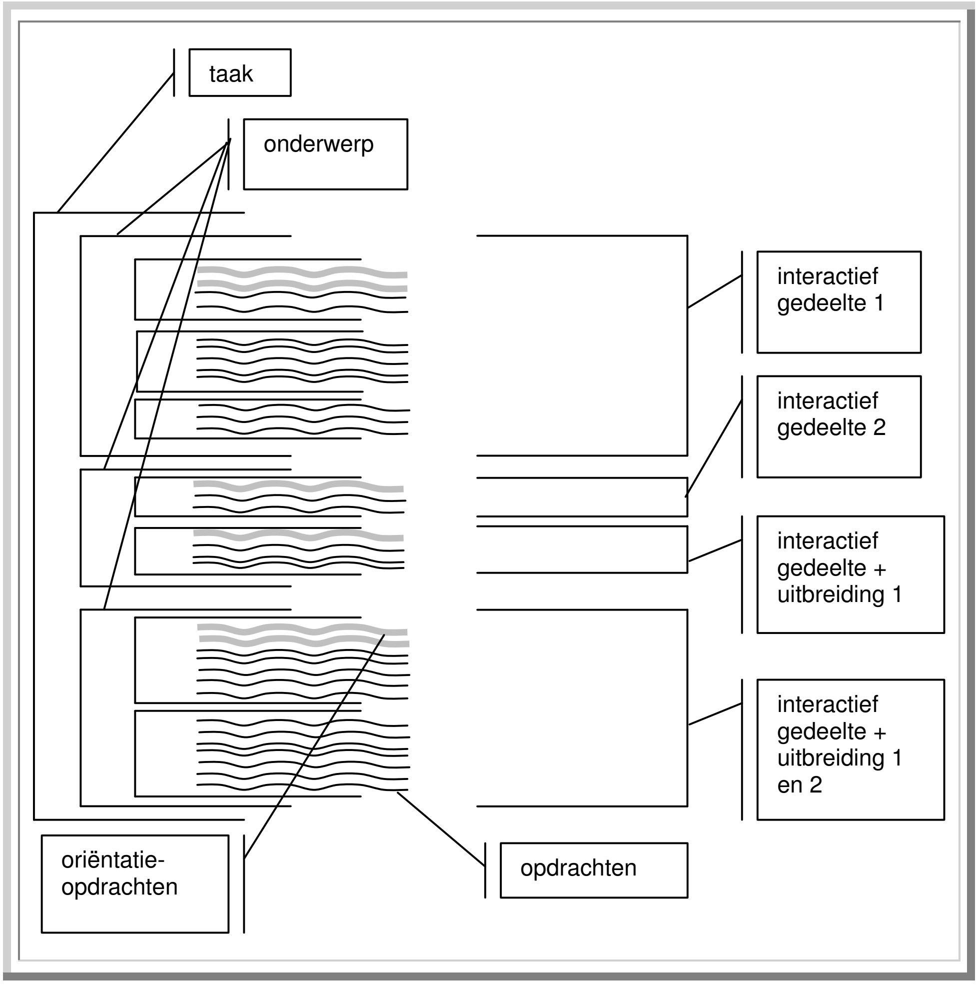
In het bruikbaarheidonderzoek gaan we dieper in op de manier waarop leerlingen met het programma omgaan. We schetsen echter eerst een scenario van optimale taakuitvoering waarin we ook het moment van inzet van de zes kernactiviteiten (abstraheren, evalueren e.d.) aangeven. Tevens presenteren we een overzicht van factoren die de taakuitvoering positief of negatief kunnen beïnvloeden. Net zoals in het eerste vooronderzoek beschrijven we vervolgens onze waarnemingen over de verwerking van de lesmaterialen en eindigen we opnieuw met een interpretatie van de uitkomsten.

3.1 Het aanpassen en uitbreiden van het lesmateriaal

3.1.1 Oriëntatieopdrachten (abstraheren en evalueren)

Structurele inbedding

In het eerste vooronderzoek werd geconcludeerd dat SimQuest-applicaties standaard voorzien zouden moeten worden van een oriëntatieopdracht bij elke nieuwe interface, taak of opdracht. Bij aanvang van een nieuwe taak is nu steeds ten minste één oriëntatieopdracht geplaatst. Elke taak is opgesplitst in clusters die elk een eigen aspect of onderwerp belichten. Elke cluster begint daarom ook met een oriëntatieopdracht. Binnen een cluster is een verdere onderwerpverdeling mogelijk. Dit leidt echter alleen tot opname van een oriëntatieopdracht wanneer ook het interactieve deel van de SimQuest-applicatie tussentijds mee verandert. Figuur 3.1 toont de drie typen situaties waarin oriëntatieopdrachten in het lesmateriaal worden gepresenteerd.



Figuur 3.1 *Oriëntatieopdrachten in Zwitserleven in het tweede vooronderzoek*

Formulering opdracht

Oriëntatieopdrachten zijn bedoeld om leerlingen kennis te laten maken met de context van een taak of onderwerp en met de interactieve gedeelten. Figuur 3.2 toont een oriëntatieopdracht die gericht is op het leren kennen van het interactieve deel.

> Verander de x-coördinaat van het eindpunt zodanig dat de totaal afgelegde afstand gelijk aan 25 wordt.
>
> (opdracht '04 oriëntatie x-coördinaat', tabblad 'inleiding', vooronderzoek 2)

Figuur 3.2 *Voorbeeld (1) van een oriëntatieopdracht in het tweede vooronderzoek*

In deze opdracht gaat het erom dat leerlingen zich herinneren dat de ligging van een punt wordt omschreven met twee coördinaten met begin- en een eindpunt. Er zijn 2 x 2 = 4 invoervelden waardoor het even zoeken is welk veld bij de x-coördinaat van het eindpunt hoort. In de opdracht is duidelijk geformuleerd dat leerlingen in het interactieve gedeelte de x-coördinaat moeten instellen. Behalve een heldere formulering is er ook een zekere mate van dwang, namelijk daar waar de opdracht spreekt over het beoogde eindresultaat. Behalve richting gevend voor de exploratie leidt dit er ook toe dat de leerling opzoekt waar in het interactieve gedeelte de totaal afgelegde afstand af te lezen is.

Ook in het voorbeeld in figuur 3.3 worden leerlingen uitgenodigd tot oriëntatie door een variabele of uitkomst een bepaalde waarde te geven. Opnieuw is een duidelijke formulering gebruikt met een redelijke mate van 'dwang'.

Leg het knikpunt op de bovenzijde van de rechthoek neer.

(opdracht '02 oriëntatie plaats knikpunt', tabblad 'met knikpunt', vooronderzoek 2)

Figuur 3.3 *Voorbeeld (2) van een oriëntatieopdracht in het tweede vooronderzoek*

Feedback in oriëntatieopdrachten (interpreteren)

Niet alleen de opdracht zelf, maar ook de terugkoppeling is meer sturend. De feedback bestaat steeds uit kennis van resultaten: goed /fout en eventueel nadere informatie. Soms wordt deze gevolgd door aanwijzingen over de oplossing. Gewoonlijk geven deze aanwijzingen expliciet aan welke (invoer-)variabele(n) moet(en) worden gemanipuleerd en wordt een hint gegeven over de waarde die moet worden ingevuld.

Bij oriëntatieopdrachten over het interactieve gedeelte richt de feedback uitdrukkelijk de aandacht op de (invoer-)variabele(n); de aanwijzing is expliciet omdat het op dit moment nog niet om begripsontwikkeling gaat en het voor de leerlingen geen raadspelletje moet worden. De leerlingen moeten de variabelen in het interactieve gedeelte lokaliseren en er enige aandacht aan besteden. Om uitvoering van de opdracht interessant te houden blijft er nog iets te 'raden' over voor de leerling doordat de in te vullen waarde niet wordt gespecificeerd.

Wanneer leerlingen in de opdracht van figuur 3.2 de verkeerde (invoer-)variabele kiezen volgt terugkoppeling dat het antwoord onjuist was (zie figuur 3.4). Het foute antwoord wordt ook nader getypeerd (de route is te lang). De aanwijzing richt de aandacht op de variabele die moet worden gekozen (de x- coördinaat) en geeft de richting van de waarde aan.

Jouw antwoord is niet juist. De route is te lang.

Is de x-coördinaat van het eindpunt kleiner dan 50? Verhoog dan de waarde van de x-coördinaat van het eindpunt.
Is de x-coördinaat van het eindpunt groter dan 50? Verlaag dan de waarde van de x-coördinaat van het eindpunt.

(terugkoppeling op opdracht '04 oriëntatie x-coördinaat', tabblad 'inleiding', vooronderzoek 2)

Figuur 3.4 *Terugkoppeling (1) bij een oriëntatie opdracht in het tweede vooronderzoek*

De terugkoppeling op de opdracht uit figuur 3.3 is vergelijkbaar (zie figuur 3.5). Na feedback over het antwoord volgen, bij een fout antwoord, aanwijzingen. De variabele wordt gespecificeerd (de y-coördinaat) en er wordt een hint gegeven hoe deze moet veranderen om tot het juiste antwoord te komen.

> Helaas, dit antwoord is niet juist.
>
> Verander de y-coördinaat van het knikpunt zodanig dat hij gelijk wordt aan de y-coördinaat van de bovenkant van de rechthoek.
>
> (terugkoppeling op opdracht '02 oriëntatie plaats knikpunt', tabblad 'met knikpunt', vooronderzoek 2)

Figuur 3.5 *Terugkoppeling (2) bij een oriëntatie opdracht in het tweede vooronderzoek*

3.1.2 Deelopdrachten: gedifferentieerde stapgrootte en feedback (abstraheren en interpreteren)

In het materiaal voor het tweede vooronderzoek hebben we de stapgrootte tussen de verschillende opdrachten aangepast. Om ondersteuning te bieden, maar niet voor iedereen alles 'voor te zeggen', zijn deelopdrachten ontworpen. Wanneer leerlingen niet weten hoe ze een opdracht aan moeten pakken, kunnen ze deelopdrachten maken. Ervaren probleemoplossers maken regelmatig gebruik van een probleemdecompositie techniek wanneer een directe aanpak van het probleem te complex is. Ontwerp-theorieën maken op hun beurt weer gebruik van dit inzicht door deelnemers bij aanvang niet met een (te) complex probleem te confronteren, maar deze te laten werken aan deel-geheel taken (zie het 4C model van Van Merriënboer, 1997). Een andere benadering is natuurlijk het onderwijzen van deze technieken. Deelproblemen hebben een meer sturend karakter dan opdrachten. Er wordt meer nadrukkelijk voorgeschreven wat het (deel)doel is en welke variabele de leerling moet veranderen om dat (deel)doel te bereiken.

In het SimQuest-materiaal ligt de keuze voor het aanpakken van deelopdrachten bij de leerling. De aanwezigheid van deelopdrachten wordt gesignaleerd onderaan bij de opdracht (zie figuur 3.6). Deelopdrachten staan apart vermeld in de opdrachtenlijst. Hun naamgeving geeft aan bij welke opdracht ze behoren. Om de uitwerking van een deelopdracht verder te ondersteunen zijn drie maatregelen genomen in het SimQuest-materiaal.

- Ten eerste, het SimQuest-materiaal geeft variabelen die de leerling niet hoeft te manipuleren standaard zelf de juiste waarde mee.
- Ten tweede, het SimQuest-materiaal blokkeert de manipulatie van niet relevante variabelen (een toepassing van de Training Wheels gedachte, zie Carroll & Carrithers, 1984).
- Ten derde, het SimQuest-materiaal ontdoet de interface van overbodige informatie.

In SimQuest was het niet mogelijk om de interface uit te breiden met specifieke hulp op segmenten. Het geven van contextgevoelige hulp, zoals bijvoorbeeld wel aanwezig in het programma WiskHint (Harskamp & Suhre, 2006), was daardoor niet mogelijk.

Het aantal deelopdrachten

Er zijn alleen deelopdrachten gemaakt bij opdrachten die in het eerste vooronderzoek door veel leerlingen als zeer lastig werden ervaren of waarbij een aantal leerlingen niet wist hoe ze deze moesten aanpakken.

Een voorbeeld van een deelopdracht: opsplitsen

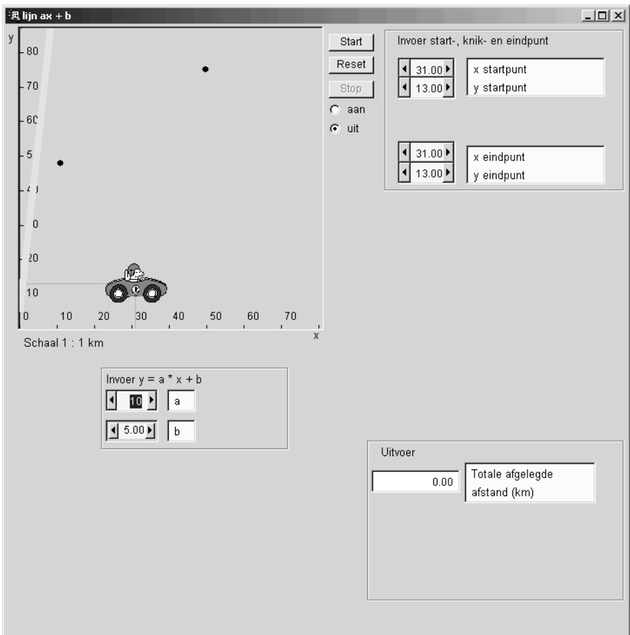
Deelopdrachten vereenvoudigen het probleem voor de leerling. De opdracht wordt opgesplitst in deelproblemen waarvan verwacht wordt dat deze wel door de leerlingen zijn op te lossen.

Figuur 3.6 geeft een voorbeeld van een opdracht en de deelopdrachten die voortkwamen uit een probleemdecompositie. In deelopdracht 1 wordt aangegeven met welke variabele de leerling moet beginnen; de leerling krijgt de opdracht de variabele ‘a’ te veranderen. In de tweede deelopdracht ligt het doel vast (lijn door Zürich) en moet de leerling een andere variabele (‘b’) veranderen. In de derde deelopdracht bouwt de leerling hierop voort.

De drie interface aanpassingen zijn ook in de deelopdrachten terug te vinden. Bij de deelopdrachten zijn alleen de waarden van ‘a’ en ‘b’ door de leerling te veranderen. De andere variabelen zijn in SimQuest tijdelijk onveranderbaar. Bij de tweede en derde deelopdracht geeft SimQuest de richtingscoëfficiënt automatisch de waarde 2. Het strippen van de interface komt tot uiting in de verwijdering van niet ter zake doende stippen in de grafiek. In de tweede deelopdracht is alleen de stip op de coördinaten (50,75) te zien. In deelopdracht drie verschijnt alleen een stip op de coördinaten (11,48).

Naam: Opdracht 06 abstract (on)juist 1

Gegeven:
Stel de lijn y1 = 2 x + b1 gaat door Zürich oftewel door het punt (50, 75). Een andere lijn y2 = 2 x + b2 gaat door Bern oftewel door het punt (11, 48).



Opdracht: *Is de volgende bewering waar: b1 > b2*

Hint: Wanneer je niet weet hoe je deze opdracht aan moet pakken, kun je de bijbehorende deelopdrachten bekijken.

+++++++
Naam: Opdracht 06 abstract (on)juist 1 deelopdracht 1
Deelopdracht 1: *Kies de 'a' van de gele lijn y = a x + b zo dat de richting van de lijn gelijk is aan y1 en/of y2.*

Naam: Opdracht 06 abstract (on)juist 1 deelopdracht 2
Deelopdracht 2: *Leg de gele lijn y = 2 x + b zo neer dat de lijn door Zürich of te wel het punt (50, 75) gaat.*

Naam: Opdracht 06 abstract (on)juist 1 deelopdracht 3
Deelopdracht 3: *Leg de gele lijn y = 2 x + b zo neer dat de lijn door Bern of te wel het punt (11, 48) gaat.*

Figuur 3.6 *Opdracht en deelopdrachten in het tweede vooronderzoek (voor de lezer is het interactieve gedeelte nu onder de opdracht geplaatst, in SimQuest staat deze naast de opdracht)*

Feedback op deelopdrachten (interpreteren)

De terugkoppeling in de deelopdrachten heeft een vergelijkbaar sturend karakter als de deelopdrachten, en is gebaseerd op dezelfde principes als gebruikt om te komen tot het ontwerp van die opdrachten. We illustreren dit aan de hand van de terugkoppeling op de deelopdrachten uit figuur 3.6.

In de eerste deelopdracht is alleen de waarde van ‘a’ relevant. De terugkoppeling richt zich dus uitsluitend op deze variabele (figuur 3.7). Na een tweede fout antwoord volgt, ongeacht het karakter van dat antwoord, dezelfde feedback. In SimQuest is het namelijk niet mogelijk de terugkoppeling aan te passen aan eventueel nieuwe typen fouten.

‘Je hebt de waarde van 'a' niet juist gekozen. Zowel y1 als y2 heeft in de formule staan y = 2 x + ... Dit betekent dat de richtingscoëfficiënt voor beide grafieken gelijk is, namelijk 2. Probeer opnieuw de waarde van 'a' juist te kiezen. ’

Figuur 3.7 *Voorbeeld van terugkoppeling bij deelopdracht 1 uit figuur 3.6*

In de tweede en derde deelopdracht zijn ‘a’ en ‘b’ beide relevant en is er een vaste volgorde waarin de waarde van deze variabelen moet worden bepaald: eerst ‘a’ en dan ‘b’. De feedback richt de aandacht op de juiste aanpak van één variabele tegelijk, en houdt daarbij de juiste volgorde aan. Wanneer bijvoorbeeld een leerling een fout maakt in beide variabelen of begint met ‘b’ is de eerste feedback gericht op variabele ‘a’ (zie figuur 3.8). Pas nadat de leerling de waarde voor ‘a’ correct heeft gekozen kan deze verder en volgt de tweede feedback die zich richt op het bepalen van de waarde van ‘b’.

Feedback 1:
De richtingscoëfficiënt van de lijn is niet gelijk aan 2. Maak 'a' gelijk aan 2.

Feedback 2:
De 'b' die jij hebt gekozen voldoet niet. De lijn y = a x + b gaat niet door het punt (50,75). Tips: Wanneer de lijn op de hoogte x = 50 boven het punt (50,75) ligt, maak 'b' dan kleiner. Wanneer de lijn op de hoogte x = 50 onder het punt (50,75) ligt, maak 'b' dan groter.

Figuur 3.8 *Voorbeeld van terugkoppeling bij deelopdracht 2 uit figuur 3.6*

3.1.3 Expliciete opdrachten over kernactiviteiten (evalueren en beredeneren)

Het eerste vooronderzoek bevatte een aantal concluderende en evaluerende opdrachten (zie figuur 3.9 en figuur 2.22). Deze opdrachten waren bedoeld om de leerlingen te stimuleren hun conclusies te expliciteren. In het tweede onderzoek zijn deze opdrachten verwijderd omdat we vreesden dat ze bij de leerlingen de verkeerde indruk konden wekken dat ze hun conclusies alleen dan moesten expliciteren als daar uitdrukkelijk, in een opdracht, om gevraagd werd.

Vul de ontbrekende woorden in de volgende conclusie in:

Een rechte lijn is te beschrijven met de formule y = a* x + b. De grootte van 'a' bepaalt .... en de grootte van 'b' bepaalt ....

(opdracht 3e, Zwitserleven, vooronderzoek 1)

Figuur 3.9 *Voorbeeld van een concluderende opdracht in het eerste vooronderzoek*

3.1.4 Naamgeving opdrachten en indeling tabbladen (structureren)

Voor het structureren is het belangrijk dat opdrachten gemakkelijk (terug)gevonden en geopend kunnen worden. Het materiaal in het tweede vooronderzoek is daarvoor meer geoptimaliseerd met aanpassingen in de naamgeving van opdrachten en in de indeling in en naamgeving van tabbladen.

Naamgeving opdrachten In het eerste vooronderzoek waren de opdrachten, net als in het leerboek, slechts genummerd. Getallen zijn inhoudsloos; ze zeggen niets over de inhoud van een opdracht en helpen de leerlingen niet om te komen tot een inhoudelijk overzicht. In het tweede vooronderzoek kregen de opdrachten tevens een korte omschrijving als titel. Een voorbeeld van een naam van een opdracht is: ‘05 lijn op eigen route’.

In het eerste vooronderzoek waren verwante opdrachten voorzien van hetzelfde getal plus toegevoegde letter (04 opgave 01a, 05 opgave 01b). Voor de leerling kan deze belettering leiden tot misverstanden omdat letters in het leerboek soms op verwante typen opgaven wijzen. In de SimQuest-applicaties zijn de verbanden tussen opdrachten altijd al heel sterk omdat ze in één context staan. De toegevoegde letters zijn verwijderd om misverstanden te voorkomen.

Indeling in en naamgeving van tabbladen In het eerste vooronderzoek stonden alle opdrachten in het Zwitserleven in één tabblad met de naam “met knikpunt”. In het tweede vooronderzoek is gewerkt met meerdere tabbladen en een aangepaste naamgeving. De indeling in en naamgeving van tabbladen komt nu overeen met het contextuele onderscheid in ‘inleiding’, ‘basis’, ‘met bergen’ en ‘met knikpunt’ (zie paragraaf 2.1.2). De indeling is echter feitelijk gebaseerd op niveau, wiskundige complexiteit. In dit geval vielen beide zaken samen.

3.1.5 De volgorde van de opdrachten (abstraheren en communiceren)

De bevindingen uit het eerste vooronderzoek gaven aanleiding om aanpassingen aan te brengen in de afstemming tussen enerzijds de volgorde van opdrachten en anderzijds het gebruik van terminologie en de mate van abstractie.

Gebruik van wiskundige terminologie In het eerste vooronderzoek is alleen aandacht besteed aan de uitwerking van een concreet naar een abstract scenario: het verloop van een concrete vraagstelling in een specifieke situatie naar een abstractie (zoals het opstellen van een formule en werken met een formule). Probleem daarbij was dat er soms te vroeg jargon gebruikt moest worden. In het tweede vooronderzoek is meer aandacht voor het gelijkmatige verloop van alledaags taalgebruik naar wiskundig taalgebruik. De richtlijn was ‘eerst eigen woorden en dan steeds meer wiskundig taalgebruik’. Het volgen van deze richtlijn leidde tot enige veranderingen in de plaats waarop sommige opdrachten verschenen. Zo is bijvoorbeeld een oriënterende opdracht waarin leerlingen in eigen woorden een beschrijving voor de positie van een punt in een assenstelsel ten opzichte van een ander punt moeten geven (opdracht 1c in tabel 2.5), meer naar voren gehaald.

Mate van abstractie Leerlingen slaagden er in het eerste vooronderzoek vaak niet in om zelfstandig een formule op te stellen. Een formule is een vorm van communiceren die ver van alledaags taalgebruik afstaat en een hoge mate van abstractie vereist. In het tweede vooronderzoek zijn opdrachten waarin de leerlingen een formule moesten opstellen daarom meer naar het einde van een serie opdrachten geplaatst.

3.1.6 Overzicht van het materiaal in het tweede vooronderzoek

Een nieuw overzicht van de opdrachten, teksten en niveaus in Zwitserleven staat in tabel 3.1.

Tabel 3.1 *Overzicht van het materiaal in Zwitserleven (het tweede vooronderzoek)*

niveau	aantal inleidende teksten	aantal opdrachten (waarvan .. oriëntatie opdrachten)	aantal deelopdrachten
inleiding	3	2 (2)	-
basismodel	-	17 (1)	18
bergen	2	5 (2)	-
met knikpunt	1	12 (2)	1
totaal	6	36 (7)	19

3.2 Bruikbaarheidonderzoek

Het eerste vooronderzoek richtte zich op de technische bruikbaarheid van het ontwikkelde SimQuest-materiaal en gaf ook een globaal beeld van de inhoudelijke bruikbaarheid. Bij dat laatste werd vooral gekeken naar de mate waarin de leerlingen actief en succesvol met de SimQuest-applicaties omgingen.

In de tweede studie onderzoeken we opnieuw enkele algemene aspecten van de inhoudelijke omgang met de SimQuest-applicaties. We bestuderen nu uitsluitend individueel werkende leerlingen (20 in totaal) zodat we ook een beeld konden krijgen van de invloed van voorkennis op hun gedrag. We bespreken de algemene bevindingen in sectie 3.4.1. De nadruk in het tweede onderzoek ligt op een nadere bestudering van de zes kernactiviteiten. De centrale vraag is: Wat is de inzet en kwaliteit van de kernactiviteiten tijdens het werken met SimQuest-applicaties?

De wenselijkheid of noodzaak om te komen tot een kernactiviteit varieert per fase van taakuitvoering. Zo is het bijvoorbeeld vanzelfsprekend dat beredeneren een veel grotere rol speelt tijdens de verwerking van resultaten dan bij oriëntatie of uitvoering van een actieplan. En de rol van voorkennis (of het ontbreken ervan) kan van essentiële betekenis zijn voor een succesvolle afronding van een oriëntatiefase, of de communicatie over de resultaten (zoals het bedenken van een formule). We werken daarom met een taak(uitkomst)scenario. Dit scenario is een ordenend kader waarin de waarnemingen over de zes kernactiviteiten op een betekenisvolle en overzichtelijke manier gepresenteerd kunnen worden. Het taakscenario schetst een optimaal verloop en functioneert daardoor als een (flexibele) standaard. De gedragingen van de leerlingen kunnen ermee worden vergeleken zodat duidelijk wordt wat goed of niet goed lijkt te gaan. In figuur 3.10 vatten we dit taakscenario kort samen. Bijlage B.4.1.1 bevat een gedetailleerde uitwerking.

Fase 1. Lezen van de opdracht
Aan het eind van deze fase weet een leerling waar de opdracht over gaat en kent de betekenis van noodzakelijke wiskundige begrippen.

Fase 2. Oriëntatie
Aan het eind van deze fase heeft een verkenning plaatsgevonden van alle variabelen in het interactieve deel, en is de inhoud en context van de opdracht bekend.

Fase 3. Plan van aanpak
Aan het eind van deze fase weet de leerling hoe hij de taak zal aanpakken, wat bekend en onbekend is, en welk(e) doel(en) bereikt moeten worden.

Fase 4. Uitvoering plan van aanpak
Aan het eind van deze fase heeft de leerling de geplande experimenten uitgevoerd en de resultaten beschreven.

Fase 5. Verwerken van de resultaten
Aan het eind van deze fase trekt de leerling conclusies en heeft eventueel ontdekt dat er tegenstrijdige of onvolledige resultaten zijn.

Fase 6. Plaatsen van de resultaten
Aan het eind van deze fase heeft de leerling de conclusies in een breder kader geplaatst.

Figuur 3.10 *Verschillende fasen bij het maken van een opdracht*

In de bespreking van de resultaten per activiteit besteden we tevens aandacht aan één of meer van de volgende factoren: (1) voorkennis, (2) simulatievaardigheden, (3) onderzoeksvaardigheden, (4) monitoring en (5) regels, normen en waarden. Deze factoren kunnen, individueel of in combinatie, van grote invloed zijn op de zes kernactiviteiten (en/of specifieke fase(n) in de taakuitvoering). In figuur 3.11 typeren we kort elke factor. Bijlage B.4.1.2 bevat een gedetailleerde uitwerking.

1. ***De rol van voorkennis***:
De aan- of afwezigheid, (on)juiste aanwezigheid en wel/niet goedingebedde aanwezigheid van voorkennis, bijvoorbeeld de (on)bekendheid met wiskundige terminologie, is van invloed op het werken met SimQuest.

2. ***De rol van simulatievaardigheden***:
Een (on)voldoende beeld op hoe benodigde informatie uit het interactieve gedeelte kan worden

verkregen, is van invloed op het werken met SimQuest-applicaties. Een onvoldoende beeld kan mede een gevolg zijn van onvoldoende begrip van het interactieve gedeelte.
Beslisvaardigheden zijn van invloed op het werken met SimQuest-applicaties; leerlingen moeten de juiste conclusies trekken uit wat ze in de simulaties zien gebeuren. Of dit wel of niet gebeurd is, kan onder andere een gevolg zijn van zorgvuldigheid (bijvoorbeeld wel/niet genoeg inzoomen om te kunnen antwoorden).

3. ***De rol van onderzoeksvaardigheden***:
Onderzoeksvaardigheden als oriënteren op het probleem, het opdelen in en combineren van deelproblemen en het reflecteren op het waarom wanneer hun verwachting of aanpak niet juist is gebleken of waarom het antwoord dat goed is ook echt goed moet zijn, zijn van invloed op het werken met SimQuest.

4. ***De rol van monitoren***:
Monitorende vaardigheden als het bedenken van een plan van aanpak, het vasthouden aan een gekozen strategie en het een stap terug doen en van een afstand reflecteren op de aanpak zijn van invloed op het werken met SimQuest.

5. ***De rol van regels, normen en waarden***
Leerlingen zijn gewend aan regels, normen en waarden zoals die gebruikelijk zijn in de klas. Een aantal van die regels zijn onbedoeld ontstaan. Het gaat hierbij om regels als:
- het moment van een opdracht of het presenteren van nieuwe informatie is belangrijk,
- opdrachten zijn gelikt, bijvoorbeeld doordat er maar één onbekende is,
- en getrokken conclusies zijn pas waar als de docent/het programma bevestigt.

Figuur 3.11 *Factoren die van invloed zijn op de activiteiten*

In tabel 2.6 staan de verschillende accenten in de opeenvolgende onderzoeken wat betreft de inhoudelijke bruikbaarheid genoemd. We gaven aan dat we de inhoudelijke bruikbaarheid in de opeenvolgende vooronderzoeken steeds verder zouden verfijnen. In dit vooronderzoek kijken we in hoeverre wiskundige begrippen en kernactiviteiten aan de orde komen bij gebruik van de verschillende onderdelen. Daarbij zijn, zoals vermeld, de lesfasen en factoren belangrijke kaders. In tabel 3.2 hebben we de onderzoeksvraag uit tabel 2.6 nader gespecificeerd.

Tabel 3.2 *Bruikbaarheid in de verschillende deelonderzoeken (2)*

onderzoek	aspect van bruikbaarheid
Vooronderzoek 1	(a) Worden de verschillende onderdelen gebruikt? (b) Hoe worden de verschillende onderdelen gebruikt?
Vooronderzoek 2	In hoeverre komen de verschillende wiskundige begrippen en kernactiviteiten aan de orde? Welke rol spelen de volgende twee aspecten bij het onvoldoende aan de orde komen van de wiskundige begrippen en kernactiviteiten? (1) de verschillende fasen in het oplossingsproces en (2) de factoren - voorkennis, - simulatievaardigheden, - onderzoeksvaardigheden, - monitoren - en regels, normen en waarden

Vooronderzoek 3	In hoeverre is het materiaal bruikbaar in een reële klassensituatie?
Grootschalig onderzoek	In hoeverre is het materiaal bruikbaar bij afwezigheid van de ontwikkelaars en met adviezen voor de inbedding?

3.3 Methode

3.3.1 Deelnemers

De deelnemers van het vooronderzoek waren 20 leerlingen uit 3 verschillende klassen 4 VWO van één school[1]. Zes leerlingen kwamen uit een M-klas. De veertien andere leerlingen zaten in N-klassen. In alle klassen was de leerstof van de SimQuest-applicatie (hoofdstuk 1 en 3) al behandeld. De leerlingen zouden er dus bekend mee moeten zijn. Op basis van hun rapportcijfers werden leerlingen geselecteerd om, op vrijwillige basis, mee te doen aan het onderzoek. We wilden weten of verschillende leerlingen, verschillend met het materiaal omgaan. De deelnemers zijn daarom op basis van hun rapportcijfers achteraf verdeeld in drie groepen, namelijk sterke (N-profiel: score 7,5 of hoger), gemiddelde (M-profiel: score 7 of hoger; N-profiel: score 5,5-7,4) en zwakke (M-profiel: score lager dan 7; N-profiel: score lager dan 5,5) wiskundeleerlingen. In tabel 3.3 staan de belangrijkste karakteristieken van de deelnemers.

Tabel 3.3 *Enkele gegevens van de deelnemers van het tweede vooronderzoek*

Leerling	Profiel[1]	geslacht	score[2]	Groep[3]	Leerling	Profiel[1]	geslacht	score[2]	Groep[3]
1	N	man	8,0	s	11	M	vrouw	6,4	z
2	M	man	6,5	z	12	M	vrouw	5,9	z
3	N	man	6,7	g	13	N	vrouw	5,8	g
4	M	man	7,1	g	14	N	man	6,4	g
5	N	vrouw	5,3	z	15	N	man	7,2	g
6	N	man	7,6	s	16	N	man	8,5	s
7	M	vrouw	4,9	z	17	N	vrouw	8,8	s
8	N	man	6,0	g	18	M	vrouw	5,9	z
9	N	man	5,7	g	19	N	vrouw	6,7	g
10	N	man	7,7	s	20	N	man	7,5	s

[1] M = economie & maatschappij of cultuur & maatschappij, N = natuur & gezondheid of natuur & techniek
[2] Score is het gemiddelde van 1 · rapportcijfer 1 + 2 · rapportcijfer 2
[3] s = sterk (N-profiel: score 7,5 of hoger), g = gemiddeld (M-profiel: score 7 of hoger; N-profiel: score 5,5-7,4), z = zwak (M-profiel: score lager dan 7; N-profiel: score lager dan 5,5)

3.3.2 Procedure

Het onderzoek vond plaats onder schooltijd in een aparte ruimte. De gehele procedure (één sessie per leerling) duurde maximaal 1,5 uur (zie tabel 3.4). De leerlingen beschikten alleen over de applicatie Zwitserleven.

[1] Een andere school dan in het eerste vooronderzoek, maar wel uit dezelfde plaats. Deze school had een andere signatuur.

Tabel 3.4 *Tijdsbesteding tijdens een sessie van het tweede vooronderzoek*

Tijdsduur	Activiteit	Toelichting
2 minuten	Korte uitleg over het onderzoek	Het doel van het onderzoek werd beschreven als "Onderzoeken hoe leerlingen werken met simulaties en waar ze vast lopen". Er werd aangegeven dat het niet erg was als ze een opgave niet konden oplossen. De leerlingen werd gevraagd hardop te denken.
8 minuten	Uitleg over SimQuest	Navigeren in SimQuest werd uitgelegd met een applicatie over botsingen. In deze uitleg werd ook aandacht besteed aan de bedoeling van verschillende soorten opdrachten.
80 minuten	Werken met SimQuest	Leerlingen werkten aan de opdracht in Zwitserleven. Hen is gevraagd dit hardop denkend te doen.

De onderzoeker heeft de leerling tijdens het werken met Zwitserleven zo weinig mogelijk gestoord. Wanneer de leerling vergat hardop te denken werd deze er bij het afsluiten van een opdracht aan herinnerd. Leerlingen die vast gelopen waren werden weer op weg geholpen.

Al snel bleek dat de leerlingen meer tijd nodig hadden dan verwacht. In tegenstelling tot het eerste vooronderzoek, bleek dat de leerlingen nu geen opdrachten meer oversloegen en of hun pogingen staakten. Ze doken, zoals gewenst, 'dieper' in de opdrachten. Dit had echter een nadelig gevolg voor de tijdsduur. Geen van de eerste zes deelnemers bleek in staat om binnen anderhalf uur de hele casus door te werken. Een (te) lange doorwerktijd kan de applicatie ongeschikt maken voor toepassing op school. De resultaten van de eerste groep leerlingen gaf daarom aanleiding om de opdrachten in Zwitserleven nader te bestuderen om te zien of we tot een reductie konden komen. Dit leidde uiteindelijk tot verwijdering in Zwitserleven van enkele opdrachten die niet de kern van de leerstof uitmaakten, en van enkele opdrachten die een eerder behandeld onderwerp vanaf een nieuwe hoek belichtten. Een volgende groep van (vier) leerlingen werd niet gehinderd door het ontbreken van deze opdrachten, maar kwam nog steeds tijd tekort. Opnieuw werden daarom vergelijkbare opdrachten in Zwitserleven verwijderd. Dit bleek redelijk te voldoen voor de laatste groep van (tien) leerlingen waarvan een aantal nu wel binnen de tijdslimiet de casus tot vrijwel de laatste opdracht succesvol kon voltooien.

3.3.3 Instrumenten

Van alle sessies zijn geluidsopnamen gemaakt. De onderzoekster was bij elke sessie aanwezig en heeft aantekeningen gemaakt. Tot slot zijn er loggegevens opgeslagen door het computerprogramma (zie ook paragraaf 2.3.4).

3.4 Resultaten

3.4.1 Handelingen/werkwijzen van leerlingen

In dit onderzoek proberen we een meer gedetailleerd beeld te krijgen van het gedrag van de leerlingen in SimQuest en van de factoren die dit gedrag (kunnen) beïnvloeden. We beginnen met een globale typering van de resultaten van het onderzoek. We kijken naar de bestede tijd en de strategieën van de leerlingen waarbij we een globaal onderscheid maken tussen 'leren door doen' en 'leren door denken'. We illustreren variaties in deze strategieën aan de hand van de resultaten voor één opdracht uit Zwitserleven. In de analyses gaan we ook in op enkele factoren die van invloed lijken te zijn op de keuze voor 'leren door doen' en 'leren door denken' zoals de samenhang met de voorkennis van de leerling (het rapportcijfer).

In de analyses van de resultaten per kernactiviteit komen deze strategieën en factoren opnieuw aan de orde, maar is de bespreking meer gedetailleerd.

Tijdsbesteding opdrachten: de effectiviteit van strategieën en de relatie met typen opdrachten

We merkten in paragraaf 3.3.2 op dat in het verloop van het onderzoek het aantal opdrachten twee maal verminderd werd, waardoor niet alle leerlingen dezelfde hoeveelheid opdrachten aangeboden kregen. De verdeling van de groepen leerlingen (sterk, gemiddeld, zwak) over de groepen met hoeveelheid opdrachten (maximaal, verminderd, minimaal) was in evenwicht (maximaal: s 2, g 2, z 2, verminderd: s 1, g 2, z 1 en zwak: s 3, g 4, z 3). Bovendien is het geen enkele leerling gelukt om alle opdrachten af te ronden. Vandaar dat we ondanks de verschillen in hoeveelheid aangeboden opdrachten toch onderstaande analyses uitvoeren waarin bijvoorbeeld gebruikt gemaakt wordt van de tijdsbesteding per opdracht.

De tijdbestedingdata geven een indruk van de totale tijd die het doorwerken van Zwitserleven vergt (zie tabel 3.5). In het eerste vooronderzoek zagen we dat opdrachten soms snel werden geopend en weer gesloten, of soms geheel werden overgeslagen. Dit kwam in dit onderzoek niet voor. Alle opdrachten werden achter elkaar doorlopen. En bij eenmaal geopende opdrachten werd ook altijd serieus geprobeerd deze te beantwoorden. Een opvallend gegeven is verder dat geen enkele leerling de deelopdrachten (zie paragraaf 3.1.2) heeft gemaakt. Dat zou kunnen zijn omdat ze daar geen behoefte aan hadden – het ging immers om leerstof die al eens in de klas besproken was.

Tabel 3.5 *Aantal afgeronde opdrachten en tijdbesteding (standaard afwijking) per opdracht per leerling in het tweede vooronderzoek*

leerling	Voorkennis[1]	hoeveelheid afgeronde opdrachten	tijdbesteding per opdracht (in seconden)
1	s	23	166 (113)
2	z	10	516 (526)
3	g	36	124 (54)
4	g	21	215 (197)
5	z	14	291 (364)
6	s	33	119 (93)
7	z	14	317 (358)
8	g	28	148 (97)
9	g	23	185 (141)
10	s	30	151 (128)
11	z	22	211 (200)
12	z	9	539 (632)
13	g	19	239 (185)
14	g	20	219 (221)
15	g	23	194 (241)
16	s	25	185 (315)
17	s	24	194 (146)
18	z	16	293 (280)
19	g	22	205 (192)

20	s	22	220 (186)
Totaal		**21,7(6.96)**	**290,9(169,8)**
	S	26,17 (4,36)	197 (47)
	G	24,00 (5,56)	222 (56)
	Z	14,17 (4,67)	477 (208)

[1] S= sterk, G= gemiddeld, Z= zwak

Uit tabel 3.5 blijkt dat er grote verschillen zijn tussen leerlingen in het aantal afgeronde opdrachten. De snelste leerling slaagt er in om tijdens het onderzoek 36 opdrachten te voltooien, terwijl de langzaamste niet verder komt dan 9 opdrachten. De snelste leerling heeft, anders gezegd, per opdracht ongeveer 2 minuten nodig terwijl de langzaamste leerling gemiddeld bijna 9 minuten aan een opdracht werkt. Het verschil in tempo is, net zoals in het eerste vooronderzoek, enorm.

Dit verschil wordt deels veroorzaakt door verschillen in voorkennis. De drie groepen verschillen significant van elkaar in tijdbesteding per opdracht, $F(2,19) = 10{,}71$, $p = 0{,}001$. Zoals mocht worden verwacht zijn de sterke leerlingen sneller dan de gemiddelde leerlingen die op hun beurt weer sneller zijn dan de langzame leerlingen. Bij gebruik van SimQuest-simulaties in de klas is het belangrijk om met deze grote tempoverschillen rekening te houden.

De standaardafwijking bij tijdbesteding is bij veel leerlingen nogal groot. Het is daarom denkbaar dat ze mede veroorzaakt zijn door verschillen in typen opdrachten. In Zwitserleven worden vier typen opdrachten gebruikt (zie figuur 3.12). Het opdrachttype blijkt van invloed te zijn op de tijdbesteding, $F\ (3,14) = 20{,}26$, $p < 0{,}001$. Zoals mocht worden verwacht, kost de vrije opdracht met een duur van ongeveer anderhalve minuut de minste tijd (zie tabel 3.6). Optimalisatie-opdrachten en meerkeuze-opdrachten duren ongeveer 4 minuten en kosten ongeveer evenveel tijd. Open-antwoord opdrachten kosten de meeste tijd, ca. 9 minuten, meer dan alle andere opdrachten bij elkaar opgeteld.

Vrije opdracht Dit is een opdracht waarbij geen antwoord wordt verwacht in SimQuest. Het is in feite een tekst die de leerling moet lezen.

Meerkeuze opdracht In dit type opdracht kiest de leerling het juiste antwoord uit verschillende alternatieven.

Optimalisatie opdracht In dit type opdracht moet de leerling de simulatie in een bepaalde toestand brengen door variabelen zo in te stellen dat deze binnen de opgelegde beperkingen blijven en het gestelde doel gerealiseerd wordt (Van Joolingen & De Jong, 2003, p.9). Feedback komt van de simulatie zelf en van een 'coach'. Bij een goed antwoord verschijnt alleen het woord 'goed' in beeld. Bij een fout antwoord volgt een toelichting op de fout.

Open-antwoord opdracht In dit type opdracht kan een leerling in SimQuest een antwoord in eigen woorden geven. Een open-antwoord-opdracht kan een optimaliseringvraagstuk zijn. Leerlingen krijgen dan alleen feedback vanuit de simulatie zelf. Er is geen aanvullende feedback met een toelichting bij een eventuele fout.

Figuur 3.12 *De verschillende typen opdrachten in SimQuest*

Er zijn twee significante interactie effecten. Voorkennis en open-antwoord opdrachten interacteren op tijdbesteding, $F\ (2,17) = 3{,}70$, $p = 0{,}046$. Ook is er een interactie tussen voorkennis en optimalisatie opdrachten $F\ (2,17) = 13{,}42$, $p < 0{,}001$. Hoewel enige voorzichtigheid bij interpretatie geboden is vanwege het beperkte aantal leerlingen, wijzen de analyses erop dat, vergeleken met de sterke en gemiddelde leerlingen, de zwakke leerling naar verhouding veel tijd kwijt is aan deze typen opdrachten. Het sterkst is dit effect bij optimalisatieopdrachten die bij deze leerlingen veel 'leren door doen' reacties lijken op te roepen. In de volgende sectie zullen wij dit gedrag nader typeren aan de hand van de analyses voor een prototypische opdracht.

Tabel 3.6 *Gemiddelde tijdbesteding (standaard afwijking tussen haakjes) per type opdracht en voorkennis van de leerling in het tweede vooronderzoek*

Opdracht Type	Voorkennis	N	Tijdbesteding (in seconden)
vrij	sterk	6	81,06 (17,16)
	gemiddeld	8	84,34 (30,41)
	zwak	6	85,70 (16,01)
	Totaal	**20**	**83,77 (22,12)**
meerkeuze	sterk	6	185,33 (57,15)
	gemiddeld	8	209,47 (88,80)
	zwak	5	278,25 (124,32)
	Totaal	**19**	**219,94 (93,81)**
optimalisatie	sterk	6	148,75 (52,20)
	gemiddeld	8	171,20 (36,68)
	zwak	6	400,58 (161,24)
	Totaal	**20**	**233,28 (144,12)**
open antwoord	sterk	6	349,49 (228,08)
	gemiddeld	8	432,73 (201,37)
	zwak	6	904,97 (632,79)
	Totaal	**20**	**549,43 (438,50)**

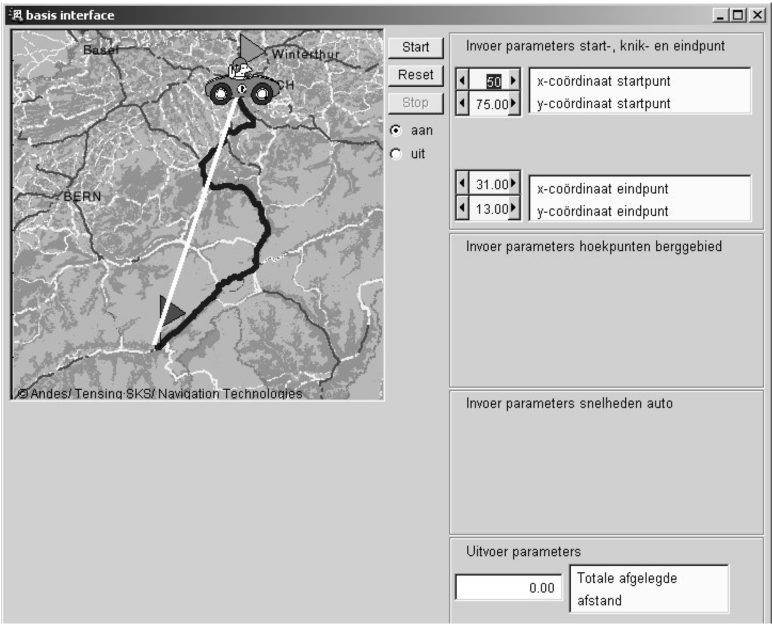
Strategieën

Een kenmerkend beeld van de werkwijze van leerlingen kan geschetst worden aan de hand van de proces- en productgegevens voor de open-antwoord opdracht '02 vijf lengtes' (zie figuur 3.13). In deze opdracht wordt leerlingen gevraagd om in het interactieve gedeelte een vijftal routes te maken die elk een afstand van 10 hebben. De opdracht is een optimalisatie vraagstuk. De opdracht bevindt zich vrij vroeg in het programma en werd verondersteld niet al te lastig te zijn. Alle leerlingen hebben deze opdracht uiteindelijk correct opgelost.

Er zijn meerdere antwoorden mogelijk. Alle routes eindigen op een straal van 10 van het startpunt. Gebruik van het interactieve gedeelte leidt tot systeem feedback waarin is te zien of het juiste antwoord is gegeven (in de cel van 'Uitvoer parameters'). De oplossing kan echter ook geheel beredeneerd worden met de stelling van Pythagoras. Maar ook zonder deze formule is een oplossing voor vier lengtes eenvoudig te vinden, namelijk door vanuit één coördinaat een verticale - en horizontale lijn van 10 (km) te trekken.

Naam: Opdracht 02 vijf lengtes
Tabblad: basismodel

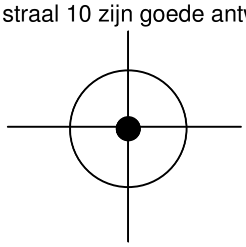
Gegeven:



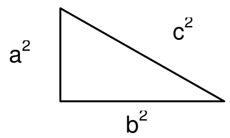
Opdracht: *Bij welke (x,y)-waarden van het eindpunt is de lengte van de route 10? Schrijf hieronder minimaal 5 mogelijke (x,y)-waarden van het eindpunt op.*

+++

Oplossing:
Wanneer leerlingen de kaart uitklikken is een assenstelsel te zien. Met de coördinaten is de afstand te berekenen. Alle punten die op een cirkel liggen met het startpunt als middelpunt en straal 10 zijn goede antwoorden.



Er zijn zoals in bovenstaande figuur te zien is, vier eenvoudige oplossingen. Namelijk daar waar de x-coördinaat van het eindpunt gelijk is aan die van het startpunt en de y-coördinaat 10 verschilt met die van het startpunt (2 antwoorden, namelijk boven en onder) en daar waar de y-coördinaat van het eindpunt gelijk is aan die van het startpunt en de x-coördinaat 10 verschilt met die van het startpunt (2 antwoorden, namelijk links en rechts).



De berekening voor het vijfde punt is iets ingewikkelder. Met de stelling van Pythagoras is dit punt te berekenen. De leerling moet één van beide coördinaten kiezen en het tweede punt met behulp van de stelling berekenen.

Figuur 3.13 *Open-antwoord opdracht (plus oplossingen) met optimaliseringvraagstuk*

Het patroon in de tijdbesteding voor deze opdracht is vergelijkbaar met het algemene beeld. Voorkennis is van invloed op de tijdbesteding, $F(2,17) = 7,65$, $p = 0,004$ (zie tabel 3.7). Zwakke leerlingen besteden meer dan twee keer zoveel tijd aan deze opdracht dan leerlingen met een gemiddelde voorkennis, $p = 0,011$, of leerlingen met een sterke voorkennis, $p = 0,007$ (Tukey's HSD Post hoc). Net zoals voor alle opdrachten tezamen zijn sterke leerlingen eerder klaar maar is het tijdverschil met gemiddelde leerlingen niet statistisch significant, $p > 0,10$.

In tabel 3.7 is ook aangegeven hoe vaak leerlingen bij deze opdracht gebruik maken van de Zwitserleven interface om berekeningen uit te voeren. Voorkennis (rapportcijfer) is van invloed op het aantal berekeningen, $F(2,17) = 11,82$, $p = 0,001$. Volgens verwachting voeren zwakke leerlingen de meeste berekeningen uit. Post hoc (Tukey's HSD) analyses geven aan dat ze vaker berekeningen uitvoeren dan leerlingen met een gemiddelde voorkennis, $p < 0,001$, of leerlingen met een sterke voorkennis, $p = 0,02$. Het is opvallend dat sterke leerlingen meer berekeningen uitvoeren dan de gemiddelde. Het onderlinge verschil tussen beide groepen is echter niet statistisch significant, $p > 0,10$.

Tabel 3.7 *Aantal berekeningen, tijdsbesteding en typering van de werkwijze in Zwitserleven Opdracht O2 over de berekening van vijf lengtes in het tweede vooronderzoek.*

Leerling	Voor-kennis	Bereke-ningen	Tijd-besteding	Werkwijze
1	s	3	153	
10	s	5	258	4x denken (eenvoudige oplossingen zonder gebruik interactief gedeelte), laatste door proberen
17	s	18	404	4x denken (eenvoudige oplossingen), dan proberen
16	s	29	480	4x denken (eenvoudige oplossingen), vervolgens proberen, uiteindelijk denken (uitrekenen met Pythagoras)
6	s	33	385	eerst 3x proberen (voor de eerste eenvoudige oplossing), 3 x denken (eenvoudige oplossingen zonder gebruik interactief gedeelte), laatste oplossing proberen
20	s	57	566	proberen
Totaal		**24 (20)**	**374,33 (149,28)**	
9	g	1	345	denken (gebruikt stelling van Pythagoras, √50 en

				√50)
3	g	5	195	denken (beredeneert en probeert vervolgens elke oplossing)
15	g	5	393	4x proberen, vervolgens denken (de oplossing uitgerekend en gecontroleerd)
14	g	7	823	denken (rekent uit, schuine met Pythagoras, en probeert vervolgens elke oplossing)
8	g	8	331	4x denken (eenvoudige oplossingen), laatste situatie proberen
13	g	14	579	4x denken (eenvoudige oplossingen zonder gebruik interactief gedeelte), laatste door proberen
4	g	16	737	proberen, uiteindelijk denken
19	g	23	308	4 eenvoudige door denken (eerste 2 daarvan beredeneren en proberen), laatste door proberen
Totaal		**10 (7)**	**463,88 (223,68)**	
5	z	24	572	proberen (vindt eerst 3 eenvoudige oplossingen, vervolgens 1 schuine oplossing door proberen), denken (spiegelt dan de schuine oplossing zodat ze direct ook de laatste oplossing heeft)
2	z	37	1644	proberen
11	z	49	826	proberen (47 pogingen voor de eerste 3), dan denken (2 voor de laatste 2)
7	z	59	1325	
18	z	60	474	proberen
12	z	80	2088	denken (10 + 2 situaties delta x = 10 zonder op delta y te letten, dus wel beredeneren, maar met fout in redenatie), vervolgens proberen (4 voor de eerste oplossing, 5 voor niet-toegestane oplossingen, 59 voor de overige 4)
Totaal		**52 (20)**	**1154,83 (640,38)**	

s= sterk, g= gemiddeld, z= zwak

De tijdbesteding correleert sterk positief met het aantal SimQuest berekeningen (pearson's r = 0,64, p < 0,01). Voor alle leerlingen bij elkaar geldt dat hoe groter het aantal berekeningen, hoe langer ze met de opdracht bezig zijn. Dit is weinig verrassend. Interessanter is de asynchrone relatie tussen het aantal SimQuest berekeningen en de tijdbesteding van sterke - dan wel gemiddelde leerlingen. Sterke leerlingen voeren meer berekeningen uit maar zijn eerder klaar dan gemiddelde leerlingen. Bij hen is dit precies omgekeerd. Zij zijn naar verhouding meer tijd kwijt bij minder berekeningen. De uitkomst lijkt te wijzen op een verschil in werkwijze dat niet wordt gekarakteriseerd door de twee gemeten variabelen (tijd en aantal berekeningen).

De vraag rijst dan op welke manier de werkwijze van de leerlingen nader getypeerd kan worden. De literatuur over simulaties maakt regelmatig melding van een onderscheid tussen 'leren door doen' (doen) en 'leren door denken' (denken) of in andere termen hands-on en minds-on. De eerste werkwijze kenmerkt zich door proberen, door variabelen en waarden te manipuleren; de tweede werkwijze verwijst naar denkhandelingen of beredeneren (Davis Jr, 1998). Zoals al te zien is in de kolom werkwijze van tabel 3.7 is het gedrag van de meeste leerlingen niet zonder meer in één van deze twee benaderingen te classificeren. Verfijning is gewenst. We hebben daarom ook gekeken naar ‘duur’ (hoe lang proberen leerlingen iets?) en ‘volgorde’ (beginnen veel leerlingen met doen?) om te zien of er enkele patronen in de werkwijze van de leerlingen zijn te ontdekken.

Leren door (a) te denken en (b) te controleren met het programma
Enkele leerlingen lossen de opdracht op door vrijwel uitsluitend beredenerend bezig te zijn. Ze maken gebruik van het interactieve gedeelte om resultaten te controleren. Denken gaat vooraf aan doen. Eerst wordt nagedacht over de oplossing(en), het interactieve gedeelte wordt vervolgens gebruikt om te checken of een beredeneerde oplossing correct is. Bij het vijfde probleem slaagt deze werkwijze alleen als de leerling gebruik maakt van een wiskundige formule (de stelling van Pythagoras).

Leerling 9 met gemiddelde voorkennis (tabel 3.7) is illustratief voor deze werkwijze. Na enig nadenken vindt deze leerling de vier eenvoudige oplossingen. Hij maakt hiervoor geen enkel gebruik van het interactieve gedeelte. De leerling bedenkt vervolgens dat hij de stelling van Pythagoras kan gebruiken voor de berekening van het vijfde punt. Hij beseft dat hij twee kwadraten moet hebben die samen 100 moeten zijn. Vervolgens deelt hij 100 door 2 en neemt de wortel van het resultaat ($\sqrt{50} \approx 7{,}07$). Hij telt dit getal op bij de x- en y-coördinaat van het startpunt dat gegeven is in de opdracht (50,75) en berekent zo de coördinaten van het eindpunt. Hij controleert deze uitkomst met behulp van het interactieve gedeelte. Het uiteindelijke antwoord van de leerling is: (50,85) (50,65) (40,75) (60,75) (57.07;82.07).

Leren door (a) te denken, (b) te controleren en (c) proberen met het programma
Een aantal leerlingen begint met nadenken, controleert de uitkomst met het programma, en schakelt over op proberen met de interface wanneer beredeneren niet (snel) tot een oplossing leidt. Het moment van schakelen verschilt enigszins per leerling, maar de belangrijkste aanleiding om van werkwijze te veranderen is, zoals verwacht, het moment waarop de vijfde oplossing gevonden moet worden. Bij dat meer complexe probleem ligt een oplossing niet direct voor de hand wat aanleiding is tot proberen.

De kenmerkende aanpak in deze exploraties is de *stap-voor-stap optimalisatie*. De leerling vult bepaalde waarden in en probeert of deze het goede resultaat opleveren. Een onjuiste uitkomst lijkt te leiden tot een inschatting van een kansrijke, nieuwe waarde, of een koerswijziging waarbij de waarde van een andere variabele wordt veranderd. In beide gevallen lijkt het doel te zijn om de juiste uitkomst steeds beter te benaderen, en dus niet direct om tot het geheel juiste antwoord te komen. Elke nieuwe poging geeft aanleiding tot een ad hoc – stap-voor-stap- aanpassing die op zich redelijk is, maar die geen deel uitmaakt van een ‘totaal’plan.

Het gedrag van leerling 17 (sterke voorkennis) is kenmerkend voor deze benadering. Deze leerlinge denkt na en komt al snel op het idee “eerst eentje waarbij de x gelijk blijft”. Vervolgens slaagt ze er gemakkelijk in om ook de overige drie eenvoudige oplossingen te beredeneren. Daarna merkt ze op “dan zal er nog wel eentje schuin moeten.” Ze concludeert dat de route geen horizontale of verticale lijn is en lijkt daarmee te doelen op een oplossing met een afwijkende x- en y-coördinaat. Maar voordat ze aan de vijfde oplossing begint controleert ze eerst de vier eenvoudige oplossingen met het interactieve gedeelte van Zwitserleven.

Van haar laatst gecontroleerde oplossing gebruikt ze de coördinaten (60,75) als startpunt voor de vijfde opdracht. Bij haar eerste pogingen telt ze een waarde op bij de ene coördinaat om die af te trekken bij de ander. Zo probeert ze eerst de oplossing (59,76) met een x-coördinaat die 1 lager is dan het startpunt en een y-coördinaat die 1 hoger is. Ze probeert zo twee keer gehele getallen en controleert of het antwoord al juist is. Na twee pogingen verandert ze van werkwijze. Ze probeert dan niet langer beide coördinaten evenredig te variëren maar manipuleert nu nog slechts de waarde van één coördinaat. Na coördinaat (55,83) die leidt tot afstand 9,43 probeert ze coördinaat (55,84) die leidt tot afstand 10,30. De uitkomst is nu hoger dan gewenst. Dat is voor de leerlinge kennelijk aanleiding om te switchen van variabele (coördinaat). Haar nieuwe poging is (54,84). Ook erop volgende probeersels bevatten alleen gehele getallen. Op een zeker moment gaat ze over op gebroken getallen waarbij ze systematisch de volgende, korte reeks waarden test (de x-coördinaat blijft gelijk): 85; 84,5; 84,25; 84,2.

De stap-voor-stap optimalisatie van de leerlinge is niet altijd consistent, maar toch wel redelijk gestructureerd en geregisseerd met kennis van zaken. De aanpak berust op enig wiskundig inzicht. De antwoorden van de leerlinge zijn: (50,85) (50,65) (40,75) (60,75) (54;84,16).

Andere leerlingen gebruiken een vergelijkbare werkwijze, zoals te zien bij leerling 6 met sterke voorkennis (zie figuur 3.14). Deze leerling beredeneert de vier eenvoudige oplossingen en stapt bij het vijfde probleem over op exploratie met het programma. Hij varieert ook meestal slechts één coördinaat en switcht op een bepaald moment van manipulatie van x - naar y-coördinaat. Op enkele momenten verandert hij de waarde van beide coördinaten (van berekening 14 naar 15 en van berekening 19 naar 20), maar volgt hierbij niet een principe van evenredigheid.

N	Ex	Ey	totaal afgelegde afstand
4	40	70	11.1803
5	42	70	9.43398
6	43	70	8.60233
7	45	70	7.07107
8	40	70	11.1803
9	42	70	9.43398
10	41	70	10.2956
11	40.5	70	10.7354
12	50	70	5
13	65	70	15.8114
14	65	65	18.0278
15	55	64	12.0831
16	51	64	11.0454
17	51	66	9.05538
18	51	64	11.0454
19	51	65	10.0499

N	Ex	Ey	totaal afgelegde afstand
20	55	70	7.07107
21	55	68	8.60233
22	55	65	11.1803
23	55	67	9.43398
24	55	66	10.2956
25	55	66.5	9.86155
26	55	66.75	9.64689
27	55	66.25	10.0778
28	55	66.35	9.99113
29	55	66.4	9.94787
30	55	66.45	9.90467
31	55	66.36	9.98246
32	55	66.37	9.97381
33	55	66.365	9.97813

(leerling 6, opdracht 02 vijf lengtes, tabblad 'basismodel', vooronderzoek 2)

Figuur 3.14 Een voorbeeld van *stap-voor-stap optimalisatie*

Proberen kan op een bepaald moment overgaan in redeneren. De aanleiding daarvoor varieert. Leerling 16, een sterke leerling, ontdekt de oplossing voor de vier eenvoudige problemen door na te denken. Hij controleert iedere poging en doet daarbij uitspraken als "we gaan eens even kijken of dat aan de andere kant nog lukt". Bij het vijfde probleem gaat hij over op proberen met het interactieve gedeelte, of, zoals hij zelf zegt "even gewoon wat proberen". Zijn werkwijze is vergelijkbaar met die van leerling 6 en 17. Leerlingen 16 komt tijdens zijn exploratie een aantal maal uit op een oplossing die hij al eerder gevonden heeft. Dit beoordeelt hij als "dit is best irritant". Na 23 pogingen komt hij tot de conclusie dat hij zijn exploraties beter kan staken. Hij pakt een kladpapier, tekent een rechthoekige driehoek, schrijft de stelling van Pythagoras op en rekent daar wat mee. Bij zijn 28ste poging onderzoekt hij de oplossing voor de coördinaten (40,5 - 71,5). Pas bij zijn 29ste poging (na berekening met de stelling van Pythagoras) komt hij tot de coördinaten (44,67) en is het vijfde probleem opgelost. De antwoorden van de leerling zijn: (50,65) (40,75) (50,85) (60,75) (44,67).

De werkwijze van al deze leerlingen lijkt sterk op een mix van de strategieën van constraint-seeking en hypothesis-testing zoals die gevonden zijn in het 20-vragen spel (Mosher & Hornsby, 1966). In het 20-vragenspel (Siegler, 1977) is het de bedoeling om met zo weinig mogelijk vragen te raden wat een ander in gedachten heeft (bijvoorbeeld een getal). Alleen 'ja/nee' vragen zijn toegestaan. De opdracht is bijvoorbeeld om een getal te raden onder de 100. Een 'constraint-seeking' benadering realiseert een successieve inperking van het zoekveld ('Is het minder dan 50?" (ja), "Is het minder dan 20?" (nee), "Is het meer dan 30?"). Kenmerkend is niet alleen de successieve benadering van het einddoel, maar ook het feit dat de meeste vragen met zekerheid niet het juiste antwoord opleveren, ze benaderen het doel. Een 'hypothese-testende' benadering richt zich volledig op de oplossing ("is het 88?", (nee), "Is het 24?, (nee), "Is het 33"? (nee)). Een hypothese-testende vraag die met 'nee' beantwoord wordt beperkt de zoekruimte nauwelijks, maar daar staat tegenover dat een 'ja' ook echt de oplossing is. De algemene bevindingen in het 20-vragenspel zijn: (a) mensen zijn geneigd een mix te kiezen van constraint-seeking en hypothese-testing, (b) beide werkwijzen worden gewoonlijk niet strak tot het einde volgehouden), (c) bij constraint-seeking test men lang niet altijd het maximale bereik (de helft van alle mogelijke oplossingen), en (d) antwoorden worden niet altijd ten volle benut.

eerst (a) proberen met het programma, en (b) dan denken en (c) controleren met het programma

Een aantal leerlingen probeert eerst zonder nadenken een aantal situaties uit, ziet vervolgens hoe een oplossing voor een of enkele opdrachten gevonden kan worden en berekent dan de oplossing(en). Deze leerlingen gaan dus van proberen over tot denken. De observaties geven geen duidelijk antwoord op de vraag wat de leerlingen aanzet om over te gaan op beredeneren. Misschien komt het door een gevoel van onbehagen over de inefficiëntie van de werkwijze.

Het gedrag van leerling 11 (zwakke voorkennis) is kenmerkend voor deze benadering. Deze leerlinge begint met uitproberen onder de uitspraak "eerst even kijken wat voor afstand die nou heeft". Nadat ze ziet dat de afstand veel te groot is, merkt ze op "dan gaan we omhoog". Bij deze nieuwe poging merkt ze op "ik probeer maar wat hoor". De afstand is nog steeds veel te groot en ze besluit "dan gaan we nog meer omhoog. Haar pogingen zijn te typeren als 'constraint-seeking' met suboptimale alternatieven. Net zoals bij andere leerlingen wordt meestal één variabele (coördinaat) constant gehouden, en wordt met kleine stapjes het doel genaderd. Bijvoorbeeld na (66,5), dat te kort is, volgt (66,9) dat nog steeds te kort is, en dan (66,95).

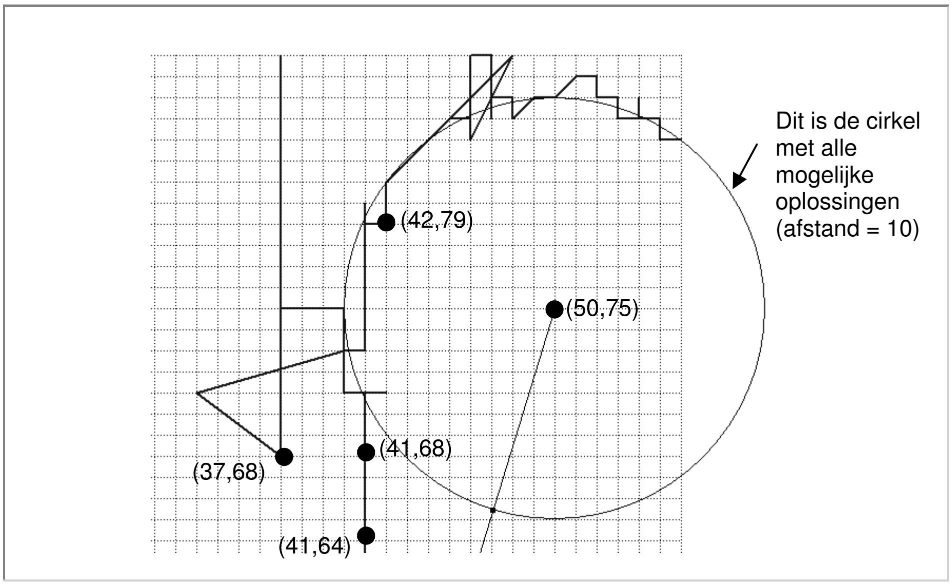
Op een zeker ogenblik lacht ze en merkt op "vijf dingen moet ik hebben", en, even later, "kun je het ook uitrekenen?" Op dat moment is het nog slechts een idee want ze volhardt in uitproberen. In tegenstelling tot de eerder beschreven werkwijzen is geen duidelijke lijn te ontdekken in de keuze van eindpunten voor de vier eenvoudige oplossingen. Na de eerste oplossing (43 - 76,86) probeert de leerlinge het schijnbaar willekeurige (41 - 70) als mogelijk tweede oplossing. Pas tijdens de derde opdracht lijkt de leerlinge zich te realiseren dat ze haar startwaarden (coördinaten) slimmer kan kiezen, en dat doet ze dan ook. Het interactieve gedeelte van Zwitserleven wordt nu niet meer gebruikt om uit te proberen maar om te controleren. Wat precies tot deze omslag heeft geleid is niet duidelijk. De leerlinge merkt slechts op: "kan natuurlijk ook deze op 50, oh slim". De antwoorden van de leerlinge zijn: (43,00 – 67,86), (41.00 - 70.65), (48.00 - 65.20), (50.00 - 65.00), (40.00 - 75.00).

De leerlinge vraagt zich (hardop) met enige regelmaat af of ze niet beter kan stoppen met uitproberen. Dit zien we ook bij andere zwakke leerlingen. Maar, en dat lijkt kenmerkend voor deze leerlingen, dit moment van reflectie leidt niet snel tot een werkwijze die meer gebaseerd is op een goed gestructureerde en beredeneerde strategie. Het lijkt deze leerlingen aan kennis te ontbreken om die switch te maken. Ze volharden dan ook relatief vaak in hun weinig productieve werkwijze.

alleen proberen met het programma

Een aantal leerlingen blijft eigenlijk maar proberen. Illustratief is de werkwijze van leerling 18 die 60 berekeningen uitvoert. Deze leerlinge begint met de opmerking: "dan rekent ie deze afstand uit, oké".

Ze is wel op zoek naar patronen in haar probeersels, en vindt die in haar eigen opvatting ook. Maar deze patronen zijn in feite toevallig. Het uitproberen is bijzonder chaotisch zoals figuur 3.15, dat alle geteste coördinaten afbeeldt, ook laat zien. De enige duidelijke regelmaat in haar werkwijze is de keuze voor gehele getallen (wat zich vertaalt in een verplaatsing van hoekpunt naar hoekpunt in de figuur, enkele van deze punten zijn in de figuur aangegeven). Voor deze leerlinge is er geen essentieel verschil tussen de vier eenvoudige opdrachten en de vijfde. Voor de groep leerlingen die alleen uitproberen, lijkt het voordeel van het programma – namelijk de mogelijkheid om te proberen en te controleren – vooral nadelig te werken. De antwoorden van de leerlinge zijn: (40,75) (42,81) (44,83) (50,85) (56,83).



Figuur 3.15 *Het pad dat een leerlinge (leerling 18) loopt om tot 5 oplossingen te komen.*

3.5 Interpretatie van de resultaten

In dit onderzoek vormen de zes kernactiviteiten het algemene kader. Daarbij hebben we aandacht voor de eerder genoemde verwerkingsfase in probleem oplossen (zie figuur 3.10 [2]) en de mogelijke link met de factoren (zie figuur 3.11 [3]).

3.5.1 Abstraheren

Geobserveerde handelingen en uitspraken van leerlingen

Oriënteren

In het eerste vooronderzoek zagen we dat de opdracht ‘Probeer zelf de verschillende knoppen uit en bekijk wat er gebeurt’ nauwelijks tot actieve exploratie leidde. In dit vooronderzoek voeren de

[2] (1) lezen van opdracht, (2) oriëntatie, (3) plan van aanpak, (4) uitvoering plan van aanpak, (5) verwerken van de resultaten en (6) plaatsen van de resultaten

[3] (1) voorkennis, (2) simulatievaardigheden, (3) onderzoeksvaardigheden, (4) monitoren en (5) ideeën, normen en waarden

leerlingen opdrachten in inleidende opdrachten om de knoppen uit te proberen over het algemeen wel uit (zie tabel 3.8); 19 van de 20 leerlingen maakt op z'n minst 1 berekening met de Zwitserleven-interface. Gemiddeld werden er 2,05 (1,34) simulatieberekeningen uitgevoerd. Omdat het hier onder andere om het verkennen van het interactieve gedeelte gaat zonder dat daar wiskunde achter steekt, is het verschil tussen de groepen leerlingen met een verschillende strategie niet relevant, alle leerlingen moeten een beeld krijgen wat er is afgebeeld en welke knoppen waarvoor dienen.

We kunnen verder specificeren door te kijken naar het aantal maal dat leerlingen een simulatieberekening hebben uitgevoerd met zelf gekozen waarden voor variabelen. Ook deze resultaten staan in tabel 3.8. Een kwart van de totale groep heeft geen simulatieberekening met eigen waarden uitgevoerd. Onderscheid tussen de verschillende groepen leerlingen leert dat de helft van de zwakke leerlingen het alleen bij het berekenen van de standaardwaarden (de waarden zoals ze zijn bij het openen van de opdracht) laat. Deze leerlingen beginnen aan de volgende opdrachten zonder een goed beeld te hebben van het interactieve gedeelte. Bij de andere twee groepen is dit slechts één leerling. Dit verschil is niet significant.

Tabel 3.8 *Het aantal leerlingen dat simulatieberekeningen uitvoert bij een inleidende opdracht*

		sterk	gemiddeld	zwak	Totaal
aantal simulatie berekeningen	0	-	1	-	1
	1	2	1	3	6
	2	3	5	2	10
	4	1	-	-	1
	5	-	1	-	1
	6	-	-	1	1
	Totaal	6	8	6	20
aantal simulatie berekeningen met minimaal 1 eigen waarde	0	1	1	3	5
	1	2	5	1	8
	2	2	1	1	4
	4	1	-	-	1
	5	-	1	-	1
	6	-	-	1	1

Naar aanleiding van de resultaten van het eerste vooronderzoek zijn oriëntatieopdrachten aan het materiaal toegevoegd. Deze oriëntatieopdrachten zijn bedoeld om leerlingen een beter begrip van het interactieve gedeelte te geven. Hoe vaak zijn bij deze opdrachten in dit vooronderzoek simulatieberekeningen uitgevoerd? Van een tweetal oriëntatieopdrachten staan in tabel 3.9 de gegevens. Deze opdrachten volgen op de inleidende opdracht uit tabel 3.8 en zijn door alle leerlingen gemaakt. We zien dat bij de oriëntatieopdrachten gemiddeld meer simulatieberekeningen (gemiddelde oriëntatie x = 4,50 (4,26), $t = 2,44$, $df = 38$, $p = 0,020$ (2-zijdig) en gemiddelde oriëntatie y = 4,55 (4,03), $t = 2,61$, $df = 38$, $p = 0,013$ (tweezijdig getoetst)) uitgevoerd worden dan bij de inleidende tekst uit tabel 3.8.

De invloed van voorkennis op het aantal simulatieberekeningen in de oriëntatieopdracht is niet significant ($p > 0,10$). Verder is er een negatieve correlatie tussen het aantal simulatieberekeningen met eigen waarden bij de inleidende opdracht en het aantal simulatieberekeningen bij de oriëntatieopdracht 'oriëntatie x-coördinaat', spearman's rho = -0,56, $p = 0,01$ (tweezijdig getoetst). De opdracht 'oriëntatie y-coördinaat volgde vervolgens op de opdracht 'oriëntatie x-coördinaat'. Deze negatieve correlatie is net niet meer significant, spearman's rho = -0,43, p = 0,060 (tweezijdig getoetst). Kortom, hoe minder simulatieberekeningen leerlingen uitvoeren bij de inleidende opdracht, hoe meer simulatieberekeningen ze uitvoeren bij de daarop volgende oriëntatieopdracht.

De oriëntatieopdrachten zetten de leerlingen aan om het interactieve gedeelte te verkennen. Aan het doel waartoe de opdrachten werden ontworpen lijkt derhalve te zijn voldaan. Maar er zijn wel enige kanttekeningen te plaatsen. Er zijn bijvoorbeeld signalen dat leerlingen toch nog onvoldoende begrip van het interactieve gedeelte hebben (categorie 2b, tabel negatief in bijlage B.4.2.1). Het gaat daarbij voornamelijk om de zwakke leerlingen. Deze leerlingen weten, ook na de oriëntatieopdracht, bijvoorbeeld niet hoe een invoerveld met de animatie samenhangt (zie ook figuur 3.16).

Tabel 3.9 *Aantal simulatieberekeningen bij een tweetal oriëntatieopdrachten*

opdracht	voorkennis leerling	N	gemiddeld aantal SimQuest-berekeningen
oriëntatie x-coördinaat	sterk	6	2,33 (1,51)
	gemiddeld	8	4,63 (4,66)
	zwak	6	6,50 (5,09)
	Totaal	**20**	4,50 (4,26)
oriëntatie y-coördinaat	sterk	6	4,33 (4,13)
	gemiddeld	8	3,00 (2,20)
	zwak	6	6,83 (5,27)
	Totaal	**20**	4,55 (4,03)

Leerling 18 kijkt op zicht, of ze ongeveer goed uit zal komen. Ze twijfelt of haar idee 'dat je het tussen de streepjes af kan lezen' klopt: "ja, misschien toch wel, ik weet het niet, het is maar een gok".

(leerling 18, vooronderzoek 2)

Figuur 3.16 *Voorbeeld gebrek begrip van interactief gedeelte na oriëntatieopdracht*

De (verwachting over de resultaten van de) inzet van interactieve gedeelten

In deze paragraaf zullen we drie aspecten bespreken die te maken hebben met abstraheren in de fase van het opstellen van een plan van aanpak: (1) het bedenken of weten hoe het interactieve gedeelte ingezet kan worden, (2) de grotere openheid van opdrachten, waardoor leerlingen meer moeten kiezen en (3) de rol van verwachtingen van leerlingen over mogelijke uitkomsten.

Bij iedere opdracht moeten leerlingen *bedenken of weten hoe het interactieve gedeelte ingezet kan worden*. De uitspraken van leerlingen over deze kennis nemen we als signaal voor het abstraheren in deze fase. Zoals te verwachten zijn er aanzienlijke verschillen.

In sommige uitspraken geven leerlingen er blijk van een goed idee hebben hoe het interactieve gedeelte gebruikt kan worden (zie ook categorie 3b, tabel positief in bijlage B.4.2.1). Twee voorbeelden van dergelijke uitspraken zijn: "ik bekijk er nog één voor de zekerheid" en "dan verander ik …., want ….".

Het komt echter ook voor dat leerlingen niet weten hoe ze met behulp van de computeromgeving hun vraag kunnen beantwoorden (zie ook categorie 3b, tabel negatief B.4.2.1 in bijlage). Hun onbegrip blijkt bijvoorbeeld uit uitspraken als: “lijkt me wel ja, maar hoe je dat kan uitproberen?”, ‘ik heb geen idee’ en ‘dat wordt/was gokken’.

Bij het opstellen van een plan van aanpak kunnen leerlingen waarden van variabelen zelf kiezen. In tegenstelling tot wat leerlingen over het algemeen gewend zijn, gaat het hierbij in de opdrachten regelmatig om meerdere variabelen. Bij een gebruikelijke opdracht zijn alle variabelen door de ontwerper van een waarde voorzien, op de variabele waarvan de waarde uitgerekend moet worden na. Wij hebben er bij sommige opdrachten voor gekozen om meerdere variabelen geen waarde te geven (ongedefinieerd te laten). De opdrachten zijn op dit punt meer open en *leerlingen moeten zelf waarden kiezen* voor deze extra ongedefinieerde variabelen. Een voorbeeld van een gebruikelijke opgave is: ‘iemand legt 10 kilometer af in een half uur tijd. Wat is zijn gemiddelde snelheid?’. Het is mogelijk om dit voorbeeld meer open te maken; de leerling zou bijvoorbeeld zelf de afstand kunnen kiezen. De formulering van de opdracht wordt dan: ‘kies een afstand. Iemand legt deze afstand in een half uur tijd af. Wat is zijn gemiddelde snelheid?’ Deze openheid zijn leerlingen niet gewend en onze keuze voor een dergelijke openheid heeft, mede daardoor, een aantal gevolgen. In dit gedeelte over abstraheren gaan we op twee van deze punten in, namelijk het wel of niet overgaan tot kiezen door leerlingen (in deze fase) en het inoefenen van rekenwerk (in fase 6). In andere paragrafen komt een ander punt, de garantie dat leerlingen ‘zien wat ze moeten zien’, aan de orde.

Zoals gezegd moeten leerlingen regelmatig zelf meerdere waarden kiezen. Leerlingen zijn dit niet gewend en het komt voor dat dit leidt tot het niet kunnen oplossen van een opdracht. Een voorbeeld hiervan staat in het volgende kader (figuur 3.17):

Opnieuw is dit een voorbeeld over de opdracht over het vinden van vijf oplossingen om een lengte 10 te krijgen. Leerling 14 wil in eerste instantie de stelling van Pythagoras gebruiken. Hij loopt echter tegen het feit aan dat hij daar twee onbekenden in over houdt. Hij realiseert zich niet dat hij één van beide kan kiezen en dan vervolgens de andere met de stelling kan berekenen. Hierdoor wordt de stelling voor hem onbruikbaar.

(leerling 14, opdracht 02 vijf lengtes, tabblad basismodel, vooronderzoek 2)

Figuur 3.17 *Voorbeeld van hoe extra keuzes die leerlingen moeten maken tot moeilijkheden kunnen leiden*

De leerling in dit voorbeeld denkt de formule alleen te kunnen gebruiken wanneer alle variabelen, behalve die variabele die berekend dient te worden, vastliggen. De leerling ziet in dat er twee onbekenden zijn. Hij kiest niet een waarde voor één van de twee, maar trekt de conclusie dat hij de formule niet kan gebruiken.

De onbekendheid met het zelf moeten kiezen van waarden van variabelen, is een voorbeeld van hoe de factor ‘ideeën, normen en waarden’ een rol speelt. Er zijn meer manieren waarop ideeën, normen en waarden leerlingen kunnen beïnvloeden. Een tweede voorbeeld zijn *ideeën over de ‘schoonheid’ van de uitkomst*. Dat wil zeggen dat leerlingen verwachten dat de uitkomsten over het algemeen gehele getallen zijn (getallen uit de verzameling Z), hoewel eenvoudige (decimale) breuken (getallen uit de verzameling Q) af en toe ook voor kunnen komen. Wortels en breuken met daarin wortels (getallen uit de verzameling R) zijn voorbeelden van uitkomsten die leerlingen minder verwachten.

In boeken en in proefwerken wordt vaak gezorgd voor ‘mooie’ uitkomsten, hoewel in reële situaties uitkomsten over het algemeen niet mooi zijn. In het volgende voorbeeld (figuur 3.18) vertrouwt de leerling erop dat ook in SimQuest ‘mooie’ getallen de uitkomst zijn. Dit heeft in dit voorbeeld tot gevolg dat de leerling zijn plan van aanpak op deze aanname bouwt. Hij baseert zijn keuze van de waarden van invoervariabelen hierop. De leerling gaat op zoek naar gehele getallen, of in zijn woorden ‘makkelijke macht’. In dit geval leverde dit inderdaad een oplossing op.

“als je een driehoek hebt, deze moet 10 zijn, heb je dus $a^2 + b^2 = c^2$ dus $a^2 + b^2$ is gelijk aan 100
makkelijke macht 4 25 36 40 60 64 en ohja 64 en 36 is 6 is100
dus dan krijgen we 6 en 8 dus dan hebben wij ehm 44 en 8 is 10
dit is er ook één van 10. Dat is 44, 75. of nee, wacht”

(leerling 16, vooronderzoek 2)

Figuur 3.18 *Voorbeeld van ‘verwachting’ mooie getallen*

Omgekeerd abstraheren

In dit gedeelte zullen we op aspecten die te maken hebben met de verwerking (evaluatie en interpretatie) van resultaten ingaan, namelijk (1) het nadenken over de resultaten van het uitgevoerde plan van aanpak en (2) het bedenken of en zo ja hoe de aanpak herhaald en/of uitgebreid dient te worden. Voor beide geldt dat leerlingen van de abstracte berekening of beredenering terug moeten naar de contextrijke vraag. Leerlingen moeten ‘omgekeerd abstraheren’ (voor de evaluatie en interpretatie).

Eén van de aspecten van het nadenken over de resultaten van het uitgevoerde plan van aanpak is *nadenken over de redelijkheid van het antwoord*. We stelden in deel 1, hoofdstuk 3 dat contexten als feedback op de juistheid van het antwoord kunnen fungeren. Uit de literatuur blijkt dat het voorkomt dat leerlingen deze vorm van feedback niet in hun voordeel gebruiken. Het gebeurt dat leerlingen uitkomsten krijgen, die nooit kunnen voor datgene wat ze berekenen (bijvoorbeeld een negatieve waarde van een omtrek bij een bepaalde lengte en breedte). Leerlingen beseffen dit niet altijd; ze geven dit soort uitkomsten wel als antwoord, zonder daarbij opmerkingen over de onredelijkheid van het antwoord te maken. Het vraagt om meer als alleen de aanwezigheid van een context, om condities te scheppen waarbij alle leerlingen profiteren van feedback van de context op het resultaat van hun berekening.

Tijdens het werken met Zwitserleven kwam het voor dat de concrete vraagstelling voor leerlingen aanleiding was om gemaakte fouten op te merken, zoals in onderstaand voorbeeld (figuur 3.19). De leerlinge uit dit voorbeeld gebruikt de implicatie van de waarden die ze berekend heeft (een auto moet in een bergachtig gebied harder tijden dan in een vlak gebied), om na te gaan waar ze in de berekening een fout heeft gemaakt.

Leerling 17 vult in een formule het verkeerde getal in. Wanneer ze het antwoord ziet begint ze te lachen, “want hij moest dan binnen de bergen harder rijden dan buiten de bergen”. Vervolgens vult ze wel het juiste getal in.

(leerling 17, vooronderzoek 2)

Figuur 3.19 *Positief voorbeeld rol context in evaluatie*

Een ander aspect van de verwerking is het nadenken of de opdracht beantwoord is of dat *aanpak herhaald en/of uitgebreid* dient te worden. Het kan bijvoorbeeld zijn dat de uitkomsten aanleiding zijn om nog een andere waarde te bekijken of een verwante vraag te beantwoorden. Een aanleiding kan zijn dat uitkomsten niet voldoen aan de normen waaraan ze volgens leerlingen moeten voldoen. De ideeën over deze normen kunnen leerlingen bijvoorbeeld hebben opgedaan in het gevolgde onderwijs. Het is positief als deze ideeën door de manier van werken naar voren komen en gepreciseerd of bijgesteld kunnen worden. Maar deze ideeën kunnen ertoe leiden dat leerlingen weinig vertrouwen hebben in wat ze doen. Een voorbeeld hiervan staat in figuur 3.20.

Bij de opdracht van figuur 3.23 kiest leerling 2 een vrij steile lijn. Dat betekent dat hij hoge waarden voor ‘a’ en ‘b’ krijgt. Als hij de oplossing heeft gevonden, maakt hij de opmerking: “volgens mij moet het ook met kleinere getallen kunnen”.

(leerling 2, vooronderzoek 2)

Figuur 3.20 *Voorbeeld van gevolgen van een idee opgedaan in gevolgd onderwijs*

In een abstracte context zijn extreme uitkomsten mogelijk en zijn de situaties waar ze bij horen vaak wiskundig gezien juist interessant. Zo hoort een oneindig grote waarde van ‘a’ bij een verticale lijn. Een interessant speciaal geval. Helaas trekt de leerling in bovenstaand voorbeeld (figuur 3.20) niet de conclusie dat hij richting een speciaal geval gaat. Hij vraagt zich daarentegen af of het niet ook met kleinere getallen kan. Wanneer hij zou proberen zijn vraag te beantwoorden dan komt hij wellicht alsnog tot de interessante conclusie. Helaas is dit tijdens deze sessie niet (waarneembaar) gebeurd.

Automatiseren

Wanneer leerlingen nieuwe kennis hebben verworven, moet deze kennis geautomatiseerd worden om de hoge cognitieve belasting te reduceren (zie deel 1, hoofdstuk 3). Dit automatiseren van kennis of inoefenen van technieken geschied door het veelvuldig uitoefenen van deze technieken. In Zwitserleven kunnen onder andere veel situaties berekend worden door veel verschillende waarden voor de ongedefinieerde variabelen te kiezen. Verschillende situaties in het interactieve gedeelte leveren verschillende gradaties van moeilijkheid van rekenwerk op. Wanneer een leerling zelf kan kiezen dan kan hij wat het rekenwerk betreft makkelijke waarden kiezen. Op deze manier kan het gebeuren dat het automatiseren en inoefenen van het rekenwerk te weinig aandacht krijgen. Wanneer leerlingen helemaal niet aan het rekenen slaan, krijgt het rekenwerk zeker te weinig aandacht. Dit laatste is tijdens dit onderzoek over het algemeen het geval; leerlingen vinden hun antwoorden veelal door proberen.

Mogelijke oorzaken gebrekkige abstractie en situatiegebonden antwoorden

Een beperkt aantal leerlingen heeft ook na het maken van oriëntatieopdrachten geen goed begrip van het interactieve gedeelte. Deze leerlingen hebben vaak het antwoord van de oriëntatieopdracht gevonden door te proberen, zonder na te denken over het waarom. We komen hier later op terug bij de activiteit beredeneren/bewijzen/aantonen.

Het vinden van het antwoord door proberen, leidt ook tot onvoldoende geautomatiseerde rekenkennis. De simulaties zijn niet primair bedoeld voor het automatiseren van het rekenwerk, wel voor het verkennen van de rekentechnieken. In de volgende onderzoeken kiezen we ervoor om het automatiseren aan de hand van het boek te doen. Wel willen we dat leerlingen enige verschillende berekeningen uitvoeren. We komen hier bij structureren op terug.

We zagen dat leerlingen zich soms wel dingen afvragen, maar vervolgens niet proberen deze eigen vragen te beantwoorden. De oorzaak hiervan ligt mogelijk op het motivationele vlak. Pintrich, Marx en Boyle (1993) wijzen op drie aandachtspunten, signalen van motivatie, waarop observaties gericht kunnen worden, te weten: (1) de keuze om zich bezig te houden met een taak, (2) het niveau van betrokkenheid, de mate waarin een leerling in een opdracht duikt en (3) de bereidvaardigheid om door te gaan met een opdracht. Het tweede aandachtspunt van motivatie dat Pintrich, Marx en Boyle (1993) noemen lijkt slechts matig te zijn. De leerlingen gaan wel met de opdracht aan de slag (aandachtspunt 1), maar duiken niet zover in de opdracht dat ze naar antwoorden op eigen vragen op zoek gaan.

Er zijn zowel positieve als negatieve signalen wat betreft het abstraheren door leerlingen (zie ook ‘tabellen bijlage B.4.2.1’). De relatie tussen de werkelijkheid, de gecontextualiseerde opdracht en de wiskundige kern van de opdracht is niet altijd duidelijk en/of leerlingen denken daar niet altijd over na. Ook blijkt dat sommige leerlingen wel en andere leerlingen geen idee hebben hoe het interactieve gedeelte ingezet kan worden bij het maken van een opdracht.

Een mogelijke oorzaak voor gebrekkige abstractie is de afwezigheid van feedback op abstraheren. Leerlingen krijgen soms wel en soms niet feedback over de relatie tussen de context, de opdracht en de abstractie. De oorzaken hiervan verschillen voor de verschillende typen opdrachten (zie figuur 3.12).

optimalisatieopdrachten Bij optimalisatie opdrachten krijgen alleen leerlingen die een door de auteur opgelegde beperking overtreden daar terugkoppeling op (zie ook voorbeeld van figuur 3.8 paragraaf 2.1.2). Leerlingen die het goed doen en leerlingen die het ‘per ongeluk’ goed doen niet. Zo zal in het geval van deelopdracht 2 van figuur 3.6 een leerling die de richtingscoëfficiënt ongemoeid laat, niets te horen krijgen wat betreft deze variabele. Er is dus geen garantie dat een leerling geconfronteerd wordt met de vraag hoe de relatie tussen (1) de waarden in het interactieve gedeelte en (2) de opdracht en/of de werkelijkheid is.

meerkeuze opdrachten Bij meerkeuze opdrachten krijgen leerlingen feedback nadat zij één van de antwoordmogelijkheden gekozen hebben. In het geval het antwoord fout is, krijgt de leerling te horen dat zijn antwoord onjuist is en uitleg over het juiste antwoord. In deze uitleg komt meestal ook de relatie tussen context, opdracht en/of abstractie aan de orde. In het geval het antwoord goed is, krijgt de leerling enkel de feedback dat het antwoord correct is.

open-antwoord opdrachten Bij open-antwoord opdrachten volgt in het geheel geen feedback.

Een mogelijke oorzaak van gebrekkige abstractie als gevolg van bepaalde verwachtingen van leerlingen, zoals dat de uitkomst een ‘mooi’ getal moet zijn, is de voorgaande ervaringen van leerlingen op dit punt. In het ontwikkelde materiaal zijn de uitkomsten regelmatig ‘lelijk’. Wanneer leerlingen zelf situaties kiezen, dan zullen de uitkomsten ook vaak ‘lelijk’ zijn. In de praktijk zullen uitkomsten vaak ook geen mooie afgeronde getallen zijn. Leerlingen zullen hun verwachtingen moeten aanpassen.

Er ontstaat verwarring door het zelf kunnen kiezen van waarden van ‘overige’ variabelen. We schreven dit toe aan het feit dat leerlingen gewend zijn aan materiaal waarin alles behalve datgene wat ze moeten berekenen vast ligt. We zullen bij structureren verder ingaan op dit punt van wel of niet ‘overige variabelen’ vrij laten.

Mogelijke aanpak bij de verdere ontwikkeling van materiaal

Bij de verdere ontwikkeling van het materiaal kan de hoeveelheid feedback uitgebreid worden, bijvoorbeeld door bij correcte antwoorden ook feedback toe te voegen. Verder kan bij deelopdrachten ook bij open-antwoorden feedback gegeven worden, hoewel dit gezien de beperkingen van SimQuest alleen algemene feedback kan zijn en niet direct terugslaat op het antwoord van de leerlingen.

Daarnaast zou er bij de deelopdrachten meer informatie gegeven kunnen worden over waarom bepaalde variabelen een bepaalde waarde gekregen hebben.

In de feedback op correcte antwoorden en in de deelopdrachten kan de redelijkheid van het antwoord worden aangestipt. Leerlingen krijgen hierdoor voorbeelden van hoe informatie uit de context kan bijdragen aan evaluatie van een uitkomst.

Sommige leerlingen, zo bleek, verwachten dat de uitkomst uit ‘mooie’ en niet al te extreme waarden bestaan. Leerlingen zullen deze verwachtingen bij moeten stellen, omdat in reële situaties dat ook vaak niet het geval zal zijn. Mooie uitkomsten dragen daarom bij aan een gevoel van gekunsteldheid van opdrachten. We laten daarom in het materiaal de uitkomsten zoals ze zijn. Ingaan op de verwachtingen van leerlingen, zoals die blijken uit hun uitspraken, biedt een goede aanleiding voor leren. Echter binnen de SimQuest-applicaties zijn geen mogelijkheden om deze uitspraken te traceren en om te zetten tot confrontaties. We kunnen dus binnen het materiaal niets aanpassen om deze situaties tot leermomenten te transformeren.

We zijn op zoek naar een manier om aan leerlingen duidelijk te maken dat hoewel ze specifieke situaties bekijken, het de bedoeling is dat zij daar in algemene termen over nadenken. We willen leerlingen aanzetten om over de kern van de opdracht na te denken. Tijdens de ontwikkeling in het vervolgonderzoek zullen we nadenken over manieren waarop we dit kunnen bereiken.

We noemden gebrek aan motivatie als mogelijke oorzaak van het niet beantwoorden van (eigen) vragen. Hoe de motivatie verhoogd kan worden en wat de oorzaken van het gebrek aan motivatie zijn, zijn vragen die blijven staan voor het volgende vooronderzoek.

3.5.2 Structureren

Geobserveerde handelingen van leerlingen

Het gebruiken van plaats van de stof in het geheel

Overeenkomsten zien tussen verschillende opdrachten is een onderdeel van structureren. Wanneer een leerling weet wat de overeenkomsten tussen opdrachten zijn, dan kan hij ook bedenken welke conclusies in de volgende opdracht nog steeds geldig zijn. Doorhebben dat opdrachten op elkaar aansluiten en weten hoe je dat gegeven kan gebruiken om de volgende opdracht op te lossen, zijn aspecten van structureren.

Een deel van de leerlingen had door dat bepaalde opdrachten op elkaar aansloten. Zo maakte een leerling (leerling 8) de opmerking ‘dat kon je net toch al gewoon zien’, waarbij hij met ‘net’ op de vorige opdracht doelt. Andere leerlingen (bv. leerling 3, die bij de derde abstracte opdracht niet redeneert vanuit de voorgaande twee opdrachten) zien dit niet in. Zelfs één en dezelfde leerling kan soms geconstateerde feiten de ene keer niet gebruiken in de vervolgopdrachten en de andere keer wel zoals in het voorbeeld in figuur 3.21.

Bij de laatste opdrachten van Zwitserleven, worden steeds stapje voor stapje regels toegevoegd. In latere opdrachten moeten eerdere conclusies worden gebruikt om nieuwe conclusies te kunnen trekken.
Leerling 17 gebruikt de conclusie dat het knikpunt altijd op de rechthoek moet liggen voor de snelste tijd niet bij de latere opdrachten, hoewel dit wel zou moeten. De conclusie dat de kortste route door de bergen (rechte lijn) vaak een kortere tijd oplevert gebruikt ze daarentegen wel bij latere opdrachten.

(leerling 17, tabblad 'knikpunt', vooronderzoek 2)

Figuur 3.21 *Voorbeeld (1) van soms wel en soms niet gebruiken van eerder getrokken conclusies*

Er zijn nog mogelijkheden tussen wel of helemaal niet. Twee voorbeelden hiervan staan in figuur 3.22.

Een leerlinge (leerling 12) probeert kennis (afgelegde afstand is het verschil tussen de twee y-coördinaten) uit vorige opdrachten toe te passen in de nieuwe opdracht. Wanneer dat niet gelijk werkt, geeft ze het op. Ze probeert niet uit te vinden waar de verschillen met de vorige keer zitten (de beide x-coördinaten zijn niet langer gelijk) en waarom het nu dus niet werkt.

(leerling 12, opdracht 02 vijf lengtes, tabblad 'basismodel', vooronderzoek 2)

Bij de opeenvolgende abstracte vragen beredeneert een leerling (leerling 6) niet bij de derde vraag het antwoord vanuit de twee voorgaande vragen, maar begint met het opnieuw uitproberen van het antwoord. Hij komt echter al snel tot de conclusie wat het antwoord moet zijn, mede op basis van de ervaringen van de voorgaande opdrachten, en de lijn komt nooit meer helemaal goed te liggen.

(leerling 6, opdracht 08 abstract (on)juist 3, tabblad 'basismodel', vooronderzoek 2)

Figuur 3.22 *Voorbeelden (2) van soms wel en soms niet gebruiken van eerder getrokken conclusies*

Leerling 12 uit dit voorbeeld doet wel een poging om kennis uit voorgaande opdrachten te gebruiken, maar slaagt daar niet in. Deze leerling komt zonder hulp niet tot de waardevolle inzichten waarvoor de mogelijkheid er in deze situatie wel is.

Samenvattend stellen we dat het programma de leerlingen soms onvoldoende aanzet om over de verbanden tussen de opdrachten onderling na te denken. Daarnaast kan het gebeuren dat leerlingen wel over deze verbanden nadenken, maar er niet in slagen om hier hun voordeel mee te doen.

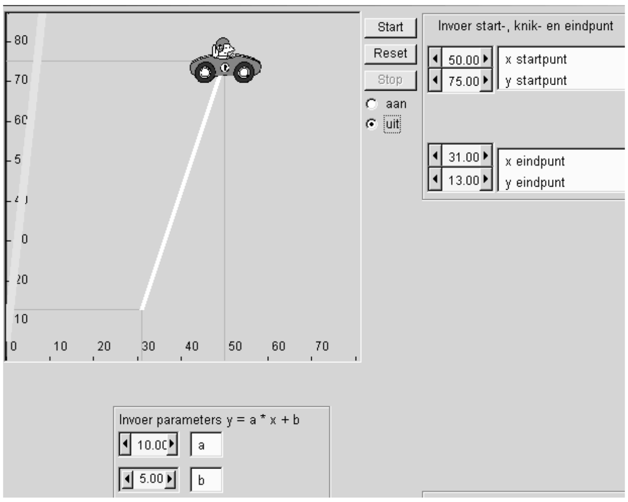
Keuze van 'overige' variabelen

Een verschil tussen het werken met een leerboek van de methode Getal & Ruimte en het werken met het in SimQuest ontwikkelde materiaal, is dat leerlingen bij de laatste vaak ook de waarde van variabelen moeten kiezen, die niet het hoofdonderwerp van een opdracht zijn. In paragraaf 3.5.1 zijn we ingegaan op twee aspecten hiervan, namelijk de verwachtingen van leerlingen op dit punt en het inoefenen van rekenwerk. In deze paragraaf gaan we in op het punt ‘de garantie dat leerlingen ‘zien wat ze moeten zien’’.

De ontwerper heeft, wanneer hij degene is die de situatie zoveel mogelijk vast legt, de garantie dat alle verschillende mogelijkheden van situaties die een leerling zou moeten zien en mogelijke struikelblokken in rekenpartijen ook daadwerkelijk zijn gezien door de leerlingen (mits die alle opdrachten maken). Deze garantie is er niet wanneer leerlingen helemaal vrij zelf kunnen kiezen. De vraag is nu of de afwezigheid van de garantie ook daadwerkelijk leidt tot een beperkte ervaring door leerlingen. We kunnen aan de hand van de antwoorden ons een beeld vormen van de situaties die leerlingen kiezen en de hoeveelheid rekenwerk die daar eventueel (wanneer leerlingen ook berekeningen maken) bij komt kijken. We kunnen bovendien een eerste idee krijgen van de verschillen binnen de antwoorden tussen de drie groepen leerlingen (sterk, gemiddeld en zwak).

Naam: Opdracht 05 lijn op eigen route
Tabblad: basismodel

Gegeven:
In de interface is een gele lijn getekend met de formule y = a * x + b, waarbij je de 'a' en 'b' kunt instellen.
Varieer de ligging van het begin- en/of eindpunt van de witte lijn, zodat de lijn op een andere plaats komt te liggen en eventueel een andere richting krijgt. Probeer nadat je dit hebt gedaan, de 'a' en 'b' van de gele lijn zo te kiezen dat de gele lijn bovenop de 'nieuwe' (witte) route ligt.



De opdracht: *Probeer dit voor minstens drie verschillende (witte) routes voor elkaar te krijgen. Schrijf voor elke situatie de coördinaten van het begin- en eindpunt en de waarde van a en b op.*

Figuur 3.23 *Voorbeeld van een opdracht waarbij leerlingen zelf situaties moeten kiezen*

De opdracht uit figuur 3.23 eindigt met de volgende woorden:
'Probeer dit voor minstens drie verschillende (witte) routes voor elkaar te krijgen. Schrijf voor elke situatie de coördinaten van het begin- en eindpunt en de waarde van a en b op.'
In tabel 3.10 staan de antwoorden van verschillende leerlingen op deze opdracht.

Tabel 3.10 *Voorbeelden van de verschillen in situaties die leerlingen bekijken en het slechts ten dele zien van wat er gezien zou kunnen worden*

leerling	situatie 1	situatie 2	situatie 3
1	(30,30)-(0,0) a = 1,00 b = 0,00	(10,20)-(0,0) a = 2,00 b = 0,00	(10,30)-(0,0) a = 3,00 b = 0,00
3	Begin: (50,78) Eind: (32,13) a: 3.6 b: -101	Begin: (48,48) Eind: (32,13) a: 2.2 b: -58	Begin: (55,48) Eind: (45,13) a: 3.6 b: -149
4	x waarde beginpunt = 50 y waarde beginpunt = 50 x waarde eindpunt = 0 y waarde eindpunt = 0 a = 1 b =0	x waarde beginpunt = 50 y waarde beginpunt = 50 x waarde eindpunt = 0 y waarde eindpunt = 50 a = 0 b = 5	x waarde beginpunt = 50 y waarde beginpunt = 50 x waarde eindpunt = 0 y waarde eindpunt = 25 a = 0.5 b = 25
5	a = 1.6, b = 37, startpunt: 60, 60 eindpunt: 31,13	a = -2,7, b = 96 startpunt: 10,70 eindpunt: 30,15	a = 0,8, b = -10 startpunt: 75,50 eindpunt: 30,15

We zien een aantal interessante zaken, wanneer we naar deze antwoorden kijken. De bedoeling van de opdracht is om een dieper inzicht te krijgen in de richtingscoëfficiënt, het snijpunt van de grafiek met de y-as en hun relatie met de 'standaard' formule $y = ax + b$.

Leerling 1 kiest heel bewust punten, zodat hij eenvoudige waarden voor 'a' en 'b' krijgt. Het lijkt erop dat de leerling heel goed begrijpt hoe hij de punten moet kiezen om de oplopende waarden van a en een b van 0 te krijgen. De enige eis die in de opdracht wordt gesteld is om drie situaties uit te proberen. In feite geeft de leerling drie gelijksoortige situaties als antwoord. Door de coördinaten van één van beide punten gelijk aan (0,0) te kiezen, voorkomt hij ingewikkelder rekenwerk. Dat is slim, het voorkomt fouten, maar aan de andere kant oefent hij het rekenwerk op deze manier ook niet.

Leerling 4 heeft ook eenvoudige situaties gekozen. De eerste situatie is ook met $b = 0$. Bij de tweede situatie maakt de leerling de 'a' gelijk aan 0 en de 'b' ongelijk aan 0. Een variant, ook eenvoudig, maar wel een iets andere soort functie. Bij de derde situatie combineert de leerling beide varianten. Hij kiest nog steeds het beginpunt gelijk, maar kiest het eindpunt nu tussen de twee vorige eindpunten in. Kortom deze leerling kiest slimme waarden, maar varieert wel het soort lijn dat hij trekt. De leerling heeft niet alle mogelijke situaties bekeken. Een negatieve waarde voor de variabele komt niet voor. Er wordt gevraagd naar minimaal drie situaties en de leerlingen stoppen wanneer ze drie situaties hebben bekeken.

De leerlingen 3 en 5 kiezen geen handige waarden. Ze vinden de juiste waarden van 'a' en 'b' vervolgens door verschillende waarden uit te proberen en op basis van de resultaten doen zij nieuwe pogingen, totdat de lijnen op het oog op elkaar liggen. Leerling 5 kiest telkens heel verschillende situaties. Leerling 3 kiest telkens ongeveer gelijke situaties. Leerling 3 trekt zelfs op grond van zijn ervaringen de conclusie dat de waarde van 'a' gelijk blijft, wanneer je het beginpunt constant houdt (dit is niet op basis van het antwoord dat hij gegeven heeft). Dit is in zijn geval zo door toeval, over het algemeen klopt dit vermoeden niet. Hij controleert dit vermoeden verder niet meer.

De aanpak van de leerlingen is verschillend. Bijdragen aan een uitwisseling van ervaringen van zowel de zwakkere leerlingen (zoals bijvoorbeeld leerling 5 die verschillende situaties heeft) en sterkere leerlingen, die eenvoudige waarden kiezen, zijn waardevol om het totaal plaatje aan structuur en inzicht in de begrippen boven tafel te krijgen.

Het zoeken naar patronen

Bij structureren gaat het om het zoeken naar patronen en het formaliseren met abstracte symbolen van die patronen. Leerlingen moeten zoeken naar patronen en overeenkomsten in de resultaten die zij krijgen. Er zijn veel patronen mogelijk en daar ligt dan ook een gevaar op de loer. Leerlingen gaan volgens Freudenthal (1991) op zoek naar magische formules, omdat ze niet door hebben wat wiskunde met de werkelijkheid te maken heeft. Ze zoeken naar gemeenschappelijkheden zonder dat ze daarbij een focus hebben afgeleid uit de context. Een voorbeeld is de leerling uit de bovenstaande paragraaf die concludeert dat ‘de a gelijk blijft, wanneer het beginpunt gelijk blijft.’ Bij het werken met Zwitserleven zagen we bij meer leerlingen dit fenomeen optreden (zie figuur 3.24).

Bij een bepaalde opdracht weet een leerlinge niet goed hoe ze de benodigde getallen kan beredeneren/berekenen. De leerlinge (leerling 12) goochelt met getallen.

- Een opdracht luidt: Verander de y-coördinaat van het startpunt zodanig dat de totaal afgelegde afstand gelijk aan 25 wordt.

  Allereerst berekent de leerling op de juiste wijze de gevraagde coördinaat, namelijk met de formule:.
  nieuwe waarde van y-coördinaat van het startpunt = gevraagde eindwaarde totaal afgelegde afstand (of te wel 25) + de waarde van de y-coördinaat van het eindpunt (in dit geval 13)

  Maar zij maakt daarbij een rekenfout, namelijk 13 + 25 = 58. Wanneer ze dit uitprobeert, wordt de afgelegde afstand niet gelijk aan 25. De simulatie stopt op het moment dat de 25 gepasseerd wordt en de leerlinge krijgt de volgende terugkoppeling:

  ‘Uitleg: afstand te lang (y)
  Jouw antwoord is niet juist. De route is te lang.

  Verlaag de waarde van de y-coördinaat van het startpunt.’

  De leerling volgt dit advies op en probeert een paar waarden (57, 56 en 42). Telkens opnieuw krijgt ze dezelfde terugkoppeling. Dan besluit de leerling weer te gaan rekenen. De leerling verandert de formule in:
  nieuwe waarde van y-coördinaat van het startpunt = gevraagde eindwaarde totaal afgelegde afstand (of te wel 25) – de waarde van de y-coördinaat van het eindpunt

  Nu krijgt de leerlinge de terugkoppeling:

  ‘Uitleg: afstand te kort (y)
  Jouw antwoord is niet juist. De route is te kort.

  Verhoog de waarde van de y-coördinaat van het startpunt.’

  De leerling gaat weer over tot proberen. Zij probeert achtereenvolgens 37, 50, 52, 46, 45, 35, 38. Wanneer ze uiteindelijk de oplossing heeft gevonden maakt ze de opmerking: “Ik zat op te tellen, maar het is dus het verschil tussen deze twee”.

- Bij de opdracht uit figuur 3.13:

  Wanneer de leerling een deel van de strategie ontdekt heeft, gaat ze mogelijke combinaties van deeltjes kennis proberen. Zo heeft de leerling op een gegeven moment ontdekt dat ze het verschil in x-coördinaten van het begin- en eindpunt gelijk aan 10 moet maken. Ze weet ook dat er 'iets' met de y-coördinaten moet gebeuren. Maar wat precies? geen idee. Opmerkelijk is weer de formule die de leerling nu gebruikt. De leerling trekt 10 van de oorspronkelijke Ey (de waarde van de coördinaat van het eindpunt bij het openen van de opdracht) af en dat wordt de nieuwe waarde van Ey. Dit is wiskundig gezien een onbegrijpelijke formule.

- Bij dezelfde opdracht als het voorgaande punt volgt de leerling op een later moment de strategie bij de één (Ex, de x-coördinaat van het eindpunt) 0,5 erbij dan bij de ander (Ey, de y-coördinaat van het eindpunt) 0,5 eraf. Ook voor deze 'rekenformule' geldt dat die wiskundig gezien willekeurig is.

(leerling 12, vooronderzoek 2)

Nog een voorbeeld van een andere leerling (leerling 2) die een nieuwe formule 'bedenkt'. Hij doet dit voor het berekenen van 'b':

$$nieuwe\_b = \frac{oude\_b}{oude\_richtingscoëfficiënt} \cdot nieuwe\_richtingscoëfficiënt$$

Wanneer het antwoord niet helemaal kan, lost de leerling dit op door vervolgens te zeggen: "laten we voor het gemak het minnetje weg klopt heel aardig". Dat het 'heel aardig klopt' gaat in zijn geval toevallig op. In dit geval moet de leerling een min wegmoffelen om het antwoord enigszins te laten kloppen.

Dezelfde leerling vindt bij een andere opdracht een alternatieve beredenering waarom zijn antwoord moet kloppen: Hij telt de x- en y-coördinaat bij elkaar op (waar geen wiskundige grond voor is) en berekent dan het verschil tussen beide resultaten. Dit gaat in deze situatie goed omdat de y-coördinaten van beide punten gelijk zijn. $((y_2 + x_2) – (y_1 + x_1) = 25$ want $(y_2 + x_2) – (y_1 + x_1) = (y_2 – y_1) + (x_1 – x_2) = 0 + (x_1 – x_2)$ als $y_1 = y_2)$
Zolang hij niet één van de y-coördinaten verandert, blijft zijn conclusie gelden. Ook als hij meerdere x-coördinaten uitprobeert. Het is niet langer, zoals in het voorgaande geval, een kwestie van gewoon wat meer situaties proberen voordat het mis gaat. Hij moet daarvoor ook andere zaken gaan veranderen.

(leerling 2, vooronderzoek 2)

Figuur 3.24 *Voorbeelden van 'toveren' met getallen en toevallig gevonden verbanden*

Deze voorbeelden uit figuur 3.24 staan niet op zich. Er waren meer leerlingen die schijnbaar willekeurige formules bedachten (zie ook categorie 3c in tabel negatief bijlage B.4.2.1 waarbij het onder andere gaat om goochelen met getallen). Wanneer een leerling allerlei berekeningen en formules bedenkt, zonder wiskundig gegronde redenen, is de kans groot dat een leerling (te) veel 'kostbare' tijd verliest. Er zijn immers zoveel 'formules' te bedenken. Alle mogelijkheden afgaan kost tijd. Zoals Freudenthal stelde (zie deel 1, hoofdstuk 3), wil je eigenlijk voorkomen dat een leerling alle fouten en zijwegen van de zoektocht uit het verleden herhaalt. Maar hoe doe je dat zonder alles voor de leerling voor te kauwen? En hoe voorkom je dat leerlingen per ongeluk verkeerde conclusies trekken, zoals bij de tweede leerling in figuur 3.24?

Plaatsen van kennis in het geheel

Bij het opstellen van een plan van aanpak doen leerlingen soms uitspraken waaruit blijkt dat zij (in ieder geval af en toe) nadenken over de overeenkomsten en de verschillen van opdrachten, met andere woorden over de plaats van een opdracht in het geheel. Wanneer leerlingen een opdracht beantwoord hebben, maken zij nauwelijks opmerkingen meer over bijvoorbeeld hoe een opdracht de kennis die ze hadden heeft aangevuld of uitgebreid. Een enkele maal gebeurt het wel, zoals in het voorbeeld van figuur 3.25.

De leerling lijkt overeenkomsten te zien tussen twee afzonderlijke opdrachten. Hij merkt namelijk op: "kom ik weer op dezelfde conclusie".

Leerling 16, vooronderzoek 2

Figuur 3.25 *Voorbeeld van nadenken van structuur na vinden van oplossing*

Mogelijke oorzaken gebrekkige structurering

In figuur 3.1 is weergegeven dat de overkoepelende taak in meerdere onderwerpen verdeeld is. Die onderwerpen zijn weer in verfijningen verdeeld en de verfijningen in opdrachten. Bij een aantal opdrachten is een verdere opsplitsing in deelopdrachten gemaakt. Leerlingen vinden het combineren en gebruiken van informatie uit de deelproblemen zodat ze die kunnen gebruiken voor bijvoorbeeld de overkoepelende taak of de vervolgopdracht, lastig. We willen dat leerlingen over de verbanden tussen de opdrachten onderling na denken. We concludeerden dat het materiaal leerlingen soms onvoldoende hiertoe aanzet. Wanneer leerlingen wel over deze verbanden nadenken, slagen ze er niet altijd in om hier hun voordeel mee te doen. Blijkbaar zijn de impliciete aanpassingen van het materiaal op dit gebied, zoals de naamgeving, onvoldoende en moet er meer op het gebied van structureren gebeuren.

Het gebrek aan het denken over en gebruiken van verbanden tussen opdrachten door leerlingen komt wellicht doordat er in het materiaal weinig expliciete aandacht voor is, veel van de structuur blijft impliciet. Dit geldt voor het boek en de vraag is in hoeverre dit voor het ontwikkelde materiaal geldt. In de opdrachten staan geen expliciete verwijzingen naar andere opdrachten. Ook in de deelopdrachten is er geen expliciete aandacht voor de verbanden tussen opdrachten en de deelopdrachten zelf. Zoals we zagen is in de deelopdrachten de sturing / het tonen in het opdelen van het probleem in deelproblemen sterk. Echter het belang van de stappen staat niet toegelicht. Er is geen uitleg over de manier waarop deelopdracht 2 doorbouwt op deelopdracht 1.

Naast dat het waarom van een stap niet wordt verteld, wordt er vaak ook niet aangegeven hoe de oplossingen van de kleinere opdrachten bijdragen aan het geheel. Kortom zowel aan het begin (waarom wordt het probleem zo aangepakt) als aan het einde (hoe leidt dit tot de oplossing) van het oplossingsproces komt het waarom onvoldoende aan bod. Het kan zijn dat, nu het waarom niet wordt getoond, een leerling de stap uitvoert en bij een volgende soortgelijke opdracht opnieuw niet weet hoe hij die aan moet pakken. Zorgen de inperkingen en hulpstappen er wel voor dat de leerling de oplossing van de totale opdracht en de weg naar de oplossing toe begrijpt en hij het de volgende keer zonder deze extra hulp redt?

Er worden daarnaast in de deelopdrachten en de bijbehorende terugkoppeling geen gemeenschappelijkheden benoemd. Er is kortom geen ondersteuning voor structurering in de deelopdrachten aanwezig.

Hoe kan het dat leerlingen wel proberen te structureren, maar daar geen voordeel uithalen? In het voorbeeld van figuur 3.22 heeft de leerlinge eigenlijk geen goed begrip van de beide situaties. De leerlinge herkent gemeenschappelijkheden, maar neemt dit te groot. Ze herkent de verschillen niet direct. Helaas zet de leerlinge niet door op de ingeslagen weg. Dit kan om motivationele redenen zijn. Ze verwacht bijvoorbeeld na deze eerste teleurstelling geen succes van verdere inspanningen op deze weg. Er kunnen ook cognitieve redenen aan ten grondslag liggen. Ze weet bijvoorbeeld niet dat ze kan zoeken naar verschillen of is niet in staat om die zonder verdere aanwijzingen te vinden.

Het niet kunnen gebruiken van vergelijkbare problemen is een uitkomst die uit meer onderzoeken naar voren komt (zie onder andere Reed, Dempster, & Ettinger, 1985; Robertson, 2000). Het geven van hints dat voorgaande opgeloste problemen gebruikt kunnen worden, heeft een positief effect (Gick & Holyoak, 1980). Ook expliciet aanzetten tot nadenken over de plaats van de opdracht binnen het geheel heeft een positief effect (Scheiter & Gerjets, 2002). Wellicht is de aanzet tot het nadenken over de structuur alleen niet expliciet genoeg.

Wiskundig inhoudelijk gezien zijn er een aantal categorieën te onderscheiden waarbinnen de mogelijkheden voor het kiezen van de waarde van ‘overige’ variabele te verdelen zijn. We hebben uit de antwoorden van de leerlingen afgeleid welke verschillende categorieën situaties ze hebben bekeken. Veel leerlingen hebben slechts een beperkt aantal categorieën gezien. De groep als geheel heeft wel een groot aantal categorieën gezien. Wanneer we leerlingen vrij laten in hun keuze van situaties die ze bekijken, dan is het niet gegarandeerd dat leerlingen ‘zien wat ze moeten zien’. De diversiteit van de resultaten van leerlingen is echter dusdanig dat leerlingen elkaar zouden kunnen aanvullen.

Om te weten welke verschillende categorieën situaties er zijn, moet je eigenlijk voldoende kennis van de stof hebben. Maar leerlingen zijn zich juist de stof eigen aan het maken en weten dus nog niet wat ze zouden moeten zien. Om te kunnen weten wat je moet leren, moet je de te leren stof al kennen.

Er is een dilemma voor de ontwerper van lesmateriaal wat betreft de specifiekheid van opdrachten. Leerlingen stoppen met verschillende situaties bekijken zodra ze aan de minimale eis hebben voldaan. Dit roept de vraag op of ze gedreven zijn om inzicht in het geheel te krijgen of dat ze slechts ‘braaf’ de opdrachten uitvoeren. Moet een opdracht alle ruimte voor de leerling dicht spijkeren en heel precies beschrijven wat een leerling moet uitzoeken of kan de opdracht wat opener geformuleerd zijn? In het laatste geval zal er op een andere manier de zekerheid ingebouwd moeten worden dat leerlingen wel opsteken wat ze geacht worden van de opdracht op te steken. In het eerste geval is het maar de vraag of leerlingen opsteken wat ze zouden moeten, omdat de opdracht dan de structuur en wat er te ontdekken valt, weg geeft. De spanning van bijvoorbeeld de vraag of ‘we nu alle mogelijkheden hebben’ is er niet langer meer. De opdracht heeft immers alle mogelijke situaties omschreven. De leerlingen hoeven alleen nog op zoek naar een voorbeeld van elke situatie. Dit laatste kan heel mechanisch gebeuren, door alleen maar te proberen.

We stelden dat structureren het ordenen naar gemeenschappelijkheden in verzamelingen is en dat leerlingen daarom op zoek moeten gaan naar patronen. In de resultaten zagen we dat sommige leerlingen tijd ‘verliezen’ doordat zij bij het structureren allerlei berekeningen en formules bedenken, zonder wiskundig gegronde redenen en/of een focus in het abstraheren. Is het wellicht een gebrek aan ‘gevoel’ voor wiskunde dat leerlingen zijwegen inslaan naar patronen die zij menen te herkennen tijdens het structureren op microniveau? In figuur 3.26 staat een citaat uit Devlin (1998) waarin wordt gesteld dat het accepteren van beweringen als axioma’s een kwestie is van menselijk oordelen op basis van nut en van overeenstemming met intuïties.

Welke beweringen als axioma worden aanvaard, is uiteindelijk een kwestie van menselijk oordeel. Ook al zijn er welbeschouwd eigenlijk verbluffend weinig concrete aanwijzingen voor de juistheid van de communicatieve wet voor het vermenigvuldigen, toch zullen de meeste mensen hun leven gemakkelijk toevertrouwen aan de geldigheid ervan. […]

Er bestaat beslist geen logische rechtvaardiging voor dit geloofsartikel. In de wiskunde zijn namelijk tal van voorbeelden van beweringen over getallen die voor miljoenen getallen waar zijn, maar niet in het algemeen. Er is bijvoorbeeld het Vermoeden van Mertens, een uitspraak over natuurlijke getallen waarvan men de juistheid met de computer heeft geverifieerd voor de eerste 7,8 miljard natuurlijke getallen, waarna in 1983 bewezen werd dat het algemene vermoeden toch onjuist is. Toch had niemand vóórdat de onjuistheid ervan bewezen was, voorgesteld om dit vermoeden als een extra axioma voor de natuurlijke getallen op te nemen.

Waarom hebben wiskundigen wel de commutatieve wet als axioma aanvaard, waarvoor eigenlijk niet eens heel veel numerieke evidentie aanwezig is, en andere beweringen, waarvoor wél enorm veel numerieke evidentie verzameld is, niet? Uiteindelijk is dat een kwestie van oordeel. Als een wiskundige een zeker patroon als axioma aanvaardt, dan eist zij niet alleen dat zo'n patroon ergens goed voor is, maar ook dat het 'geloofwaardig' is, dat het overeenstemt met haar intuïties, en dat het zo eenvoudig mogelijk is. In vergelijking met deze eisen is numerieke evidentie slechts van secundair belang – hoewel één enkel numeriek tegenvoorbeeld voldoende zou zijn om zo'n axioma naar de prullenbak te verwijzen!

Figuur 3.26 *Citaat (Devlin, 1998: p. 54-55) waarin gesteld wordt dat het wel of niet aanvaarden van de juistheid van een vermoeden een kwestie is van menselijk oordeelsvermogen*

Binnen wiskunde is het zelfs een soort van sport om vermoedens die zijn gevormd door inducties te bewijzen of weerleggen. Zo schreef Guy (1988, 1990) bijvoorbeeld twee artikelen waarin hij de lezer een aantal vermoedens voorlegt en de lezer laat bedenken of ze wel of niet ook voor grotere aantallen opgaan, nadat hij de geldigheid voor een eerste aantal getallen heeft laten zien.

Freudenthal (1991) noemt het nut dat een formule heeft; de formule moet iets met de werkelijkheid van doen hebben. Hier wordt echter ook over overeenstemming met intuïties gesproken. Wellicht ontbreekt het daaraan.

Mogelijke aanpak bij de verdere ontwikkeling van materiaal

Een voor de hand liggende aanpak voor het gebrek aan structureren op het gebied van overeenkomsten tussen opdrachten onderling en opdrachten en voorkennis, is om de implicietheid expliciet te maken. Wanneer dit zou gebeuren, dan wordt daarmee een stap richting tonen in plaats van zelf ontdekken gezet. Een logische plaats om expliciete aandacht te besteden aan de plaats van een serie opdrachten in het geheel is bij oriëntatieopdrachten. Deze opdrachten staan immers aan het begin van een dergelijke serie. Daarbij wordt de functie van de oriëntatieopdrachten uitgebreid van een oriëntatie op het interactieve gedeelte naar een oriëntatie op het interactieve gedeelte én de inhoud van de opdrachten. Daarnaast zou er in de deelopdrachten meer expliciete aandacht aan structurering kunnen worden geschonken.

Leerlingen zouden een houding moeten krijgen waarbij ze standaard zich afvragen waar ze een opdracht moeten plaatsen. Dit moet zowel bij de oriëntatie op een opdracht als na het beantwoorden van een opdracht gebeuren. Structureren is iets wat over opdrachten heen plaats vindt. Daarom moet een eventuele overkoepelende instructie buiten de opdrachten vorm krijgen. Misschien zelfs buiten SimQuest-applicaties om te benadrukken dat de onderliggende wiskundige structuur niet identiek hoeft te zijn aan de structuur door indeling in niveaus binnen SimQuest-applicaties.

Wanneer de reden van het opgeven van pogingen tot structureren van motivationele aard zijn, dan zoeken we naar manieren om het vertrouwen op succes te vergroten. Dit kan in een reële klassensituatie misschien al automatisch het geval zijn door de bemoedigingen van de docent en de mogelijkheid van het krijgen van bijstand van de docent en medeleerlingen.

Freudenthal (1991) waarschuwde dat leerlingen niet dezelfde zijwegen moeten doorlopen als in de geschiedenis is gebeurd. Maar de vrijheid van het (onbeperkt) zoeken naar (alle mogelijke) patronen lijkt er voor te zorgen dat het voor sommige leerlingen niet alleen het gaan van dezelfde zijwegen is, maar bij gebrek aan intuïtie, aan het gaan van nog meer zijwegen. Deze zijwegen kosten kostbare tijd. Wellicht geldt in een reële klassensituatie dat leerlingen sneller hulp vragen, omdat hun tijd daar beperkt is tot een aantal lessen.

Hoe zorgen ontwerpers ervoor dat alle aspecten langs komen, de verschillende facetten van het rekenwerk aan de orde komen, enz. zonder dat de vrijheid van de leerlingen verdwijnt en alles voorgekauwd/strak voorgeschreven wordt? Hoe brengen we meer garantie in het materiaal? Dit is een dilemma waar we mee blijven worstelen. We zullen in het materiaal vaker een focus in de opdrachten aanbrengen. Er zijn twee redenen waarom we een eventuele drastische aanpassing op het punt van de hoeveelheid sturing uitstellen, namelijk (1) gebrek aan toetsing en (2) gebrek aan zicht op de invloed van medeleerlingen en docent.

toetsing Omdat na afloop geen toetsing heeft plaatsgevonden weten we niet in hoeverre de verschillende facetten van het rekenwerk en de verschillende situaties te weinig onder de aandacht zijn geweest. In het derde vooronderzoek wordt aan het einde wel een toets afgenomen. Op basis van deze resultaten zullen we wel of niet de hoeveelheid sturing op dit punt bijstellen.

invloed aanwezigheid medeleerlingen en docent Hoewel leerlingen individueel vaak slechts een gering aantal categorieën zien, heeft de groep als totaal wel veel verschillende categorieën bekeken. Voordat we daarom aanpassingen doen op dit punt, wachten we eerst af hoe dit zich in een klassikale situatie ontwikkelt.

3.5.3 Evalueren

Geobserveerde handelingen van leerlingen

Bij evalueren gaat het om het geven van een oordeel over een idee of bewering. Uit de onderstaande voorbeelden (in de kaders) blijkt dat evaluatie een grote rol speelt bij het werken met simulaties. Een oordeel kan alleen geveld worden wanneer voldoende informatie is verzameld op een legale wijze. Het resultaat van een evaluatie van leerlingen kan om verschillende redenen niet juist zijn: leerlingen verzamelen onvoldoende informatie, voorafgaande ideeën beïnvloeden de evaluatie en leerlingen letten (mede door het voorgaande punt) niet op de juiste variabelen.

Het aantal situaties dat bekeken moet worden, is een aspect waar leerlingen over na moeten denken. Sommige leerlingen geven blijk van dat ze zich daarvan bewust zijn, uit de acties van andere leerlingen blijkt dat ze zich daar niet van bewust zijn (zie figuur 3.27).

> Leerling 10 is er zich van bewust en noemt dan ook hardop dat hij ten minste drie verschillende situaties moet bekijken om iets over lineariteit te kunnen zeggen.
>
> (leerling 10, opdracht 13 lineair verband?, tabblad basismodel, vooronderzoek 2)

Leerling 8 heeft door een verkeerde voorkennis een onjuist idee over het antwoord op een vraag in een opdracht over lineariteit. Hij bekijkt slechts één situatie, wat te weinig is om een uitspraak te kunnen doen. Hij trekt vervolgens ten onrechte een verkeerde conclusie.

(leerling 8, opdracht 13 lineair verband?, tabblad basismodel, vooronderzoek 2)

Figuur 3.27 *Voorbeelden wel of niet bewust zijn van de geldigheid van een evaluatie*

De laatste leerling uit het voorgaande voorbeeld concludeert iets ten onrechte omdat hij van te voren het antwoord denkt te weten. Hij bekijkt vervolgens te weinig situaties om iets op te merken dat zijn idee tegenspreekt. Zijn onjuiste conclusie is een gevolg van te weinig informatie. Een tweede voorbeeld hiervan staat in figuur 3.28. Deze leerling bekijkt helemaal geen situaties omdat hij het antwoord denkt te weten.

Leerling 3 reageert op de vraag hoe je ‘a’ kunt berekenen met “oh, dat was..” en geeft vervolgens het antwoord:

(x1-x2) / (y1-y2)

Hij controleert dit antwoord niet en komt dus ook niet tot de conclusie dat hij teller en noemer moet omdraaien.

(leerling 3, opdracht 11 berekenen ‘a’, tabblad ‘basismodel’, vooronderzoek 2)

Figuur 3.28 *Voorbeeld verkeerde voorkennis die niet geëvalueerd wordt en tot fout antwoord leidt*

Maar voldoende informatie garandeert niet dat leerlingen wel de juiste conclusie trekken als ze een onjuist voorafgaand idee hebben. In figuur 3.29 staat een voorbeeld van een leerling die genoeg situaties bekijkt om te concluderen dat de gegevens zijn idee tegenspreken, maar desondanks aan zijn idee vast blijft houden.

Leerling 15 heeft heel duidelijk een idee wat het antwoord zou moeten zijn. Wanneer de tabel dit tegenspreekt, verandert hij zijn eerste idee niet. Hij merkt op: “is niet lineair, maar dat zou wel heel sterk zijn”. Hij geeft toch het foute antwoord (het verband is lineair) aan de hand van zijn eerste idee.

(leerling 15, opdracht 13 lineair verband?, tabblad basismodel, vooronderzoek 2)

Figuur 3.29 *Voorbeeld niet aanpassen van idee na tegensprekende resultaten*

De leerling uit het voorbeeld in figuur 3.29 ziet de tegensprekende informatie wel, maar legt dit naast zich neer. Een idee vooraf kan ook maken dat leerlingen niet op de juiste variabelen letten. Een voorbeeld hiervan staat in het volgende kader (figuur 3.30).

Leerling 16 heeft de overtuiging dat de kortste route (qua afstand) binnen de bergen ook de snelste route (qua tijd) is. Hij bekijkt daarom alleen bij welke route deze afstand het kortst is zonder op de tijd te letten. Zijn begin aanname klopt echter niet. Maar dat zal hij niet constateren, zolang hij niet op de benodigde tijd let. Hij geeft het correcte meerkeuze antwoord op grond van een verkeerde redenering. Daarop krijgt hij enkel de feedback: "correct antwoord".

(leerling 16, opdracht 06 binnen kortst, tabblad 'knikpunt', vooronderzoek 2)

Figuur 3.30 *Voorbeeld 'blindheid' door ideeën vooraf*

In tegenstelling tot het voorgaande voorbeeld uit figuur 3.29 stelt de leerling uit figuur 3.30 zijn ideeën niet bij naar aanleiding van wat er in het interactieve gedeelte gebeurt, omdat hij niet naar de juiste variabele kijkt. Bij de leerling in het voorbeeld van figuur 3.30 gaat het niet om het niet-uitvoeren van experimenten die het idee zouden kunnen falsificeren, maar om het geheel niet uitvoeren van experimenten om een aanname te controleren.

Onjuiste ideeën en verwachtingen bij leerlingen zijn niet 'ongewenst', maar ze moeten wel omgebogen worden in een leermoment. 'Leren van fouten' is niet iets wat vanzelfsprekend gebeurt. Als de resultaten die het interactieve gedeelte levert, aantonen dat er iets 'fout' zit in een redenering, betekent dit niet vanzelfsprekend dat een leerling hier ook iets van leert.

Mogelijke oorzaken gebrekkige evaluatie

Evalueren speelt een grotere rol bij het onderzoekend leren met simulaties dan gebruikelijk. Er gaat nogal eens wat mis bij het evalueren. Leerlingen trekken onterechte conclusies. Soms is dit omdat ze op basis van de informatie die ze hebben nog helemaal geen conclusie kunnen trekken, soms doordat ze van te voren al overtuigd zijn van wat de conclusie moet zijn.

Leerlingen worden soms niet geconfronteerd met tegensprekende feiten doordat ze niet nauwkeurig genoeg werken. Leerlingen hebben niet door dat er afrondfouten gemaakt worden of zoomen niet ver genoeg in op de grafiek. Dit slordige gedrag komt mogelijk door gemakzucht, wat feitelijk een gebrek aan motivatie is, en soms door onbekendheid met bronnen van fouten zoals door afronden.

Een mogelijke verklaring voor het feit dat leerlingen ten onrechte concluderen doordat ze van te voren al vrij zeker zijn wat volgens hen het antwoord is, is dat leerlingen hierdoor een vernauwde blik krijgen. Dit is een bekend verschijnsel binnen de wetenschap. Uit de literatuur (o.a. het onderzoek van Danilova zoals besproken in Grayson & McDermott, 1996; Gunstone & Champagne, 1990; Hadamard, 1988; Van Parreren & Carpay, 1976) blijkt dat het in onderzoek heel gebruikelijk is dat onderzoekers 'verblind' zijn door hun ideeën en dat dit een belemmering vormt voor een goede evaluatie en interpretatie. Dit fenomeen is in de literatuur bekend onder de naam 'belief bias' (Evans, 1989). Bij belief bias gaat het om het verwerpen van een conclusie door een voorafgaand idee over de geloofwaardigheid van een conclusie.

Ook het door overtuigingen negeren van observaties is een bekend verschijnsel (Gunstone & Champagne, 1990). Terugkijkend op zijn bezigheden voorafgaand aan de introductie van de relativiteitstheorie, verbaast Hadamard zich over hoe hij deze heeft kunnen missen uit zijn eigen onderzoeksresultaten. Hij merkt daarover op:

> "On the contrary, it is hard to conceive of such a state of mind when one now considers how the totality of earlier scientific knowledge – in particular of mathematical knowledge – imposed this solution, converged

toward it, thrust and goaded us along this path from which we were so obstinately resolved to stray" (Hadamard, 1988, p. 67).

Een ander bekend verschijnsel uit de wetenschap is het pas verwerpen van een theorie als er een alternatief is (Bauer, 1992; Kuhn, 1970).

Mogelijke aanpak bij de verdere ontwikkeling van materiaal

Het is maar de vraag of er in het materiaal ondersteuning voor evaluatie geboden moet worden. In de vervolgonderzoeken zullen medeleerlingen en een docent aanwezig zijn. Bovendien zal naast simulaties ook het boek gebruikt worden. Allerlei bronnen die leerlingen kunnen confronteren met hun onterechte evaluaties. Misschien blijkt dit voldoende te zijn.

De momenten waarop leerlingen fouten maken door onbewuste onzorgvuldigheid, zijn goede kandidaten om getransformeerd te worden tot leermomenten. Voorwaarde is wel dat er door gegaan wordt op het waarom van de onjuiste evaluatie. Binnen SimQuest is het in de versie Zwitserleven van dit vooronderzoek niet mogelijk om te achterhalen wanneer een onjuist antwoord wordt gegeven door onbedoelde zorgvuldigheid. Het programma kan dan ook niet gebruikt worden om dit soort momenten te registreren en uit te buiten. Wellicht is hier een rol voor de docent weg gelegd?

Bij enkele speciale opdrachten waarin leerlingen expliciet wordt opgedragen om in het interactieve gedeelte een tabel te maken, is het mogelijk om met de SimQuest-applicatie te bepalen of leerlingen voldoende informatie verzamelen om te kunnen evalueren. Bij dit soort opdrachten kan expliciet aandacht voor de geldigheid van de evaluatie zijn.

3.5.4 Interpreteren

Geobserveerde handelingen van leerlingen

Hoe vervolgen leerlingen de zoektocht op basis van de uitkomsten van de situaties die ze bekeken hebben? Uit veel acties van leerlingen blijkt dat zij hun volgende poging in meer of mindere mate baseren op hun voorgaande resultaten (zie figuur 3.31).

Leerling 20 moet op een gegeven moment een lijnstuk de lengte 10 zien te geven. De leerling vindt de oplossing door te proberen. Hij bekijkt daarvoor 55 keer een situatie. Maar in zijn geval is het niet zomaar lukraak proberen; de leerling past zijn stapgrootte aan de afwijking van het gewenste resultaat aan. Een voorbeeld hiervan is de onderstaande tabel:

N	Ex	Ey	totaal afgelegde afstand
26	58	74	8.06226
27	59	74	9.05538
28	60	74	10.0499
29	59.8	74	9.85088
30	59.9	74	9.95038
31	59.92	74	9.97028
32	59.94	74	9.99018
33	59.95	74	10.0001

(leerling 20, opdracht 02 vijf lengtes, tabblad basismodel, vooronderzoek 2)

Leerling 5 bij dezelfde opdracht: De leerlinge krijgt als eerste de lengte 15. Ze bedenkt dat dit 5 te groot is. Ze verandert de ligging van het eindpunt door er 5 vanaf te trekken. Nu krijgt ze de lengte 20. Vervolgens kiest ze de ligging van het eindpunt wel juist, zodat ze de lengte 10 krijgt.

N	Ex	Ey	totaal afgelegde afstand
1	50	60	15
2	50	55	20
3	50	65	10

Kortom de leerlinge heeft wel degelijk een strategie na het bekijken van de resultaten van eerdere pogingen. Een strategie niet alleen in richting, maar ook in grootte. Ze slaat daarbij zelfs aan het rekenen in tegenstelling tot de leerling uit het voorgaande voorbeeld.

(leerling 5, opdracht 02 vijf lengtes, tabblad basismodel, vooronderzoek 2)

Figuur 3.31 *Voorbeeld interpretatie van resultaten, zowel kwalitatief als kwantitatief*

Bij de twee leerlingen uit het bovenstaande voorbeeld blijft het vinden van oplossingen een kwestie van proberen. Een ander voorbeeld van een leerling die op basis van zijn resultaten de waarden van de variabelen voor zijn volgende poging kiest, staat in figuur 3.32. Het verschil met de leerlingen uit figuur 3.31 is dat deze leerlingen na een aantal oplossingen gevonden te hebben door te proberen, deze leerling de rest van de oplossingen beredeneert.

N	Ex	Ey	totaal afgelegde afstand
1	31	13	64.846
2	50	40	35
3	50	55	20
4	50	65	10
5	45	67	9.43398
6	45	67.5	9.01388
7	45	66.5	9.86155
8	44	66.5	10.4043

N	Ex	Ey	totaal afgelegde afstand
9	44	66	10.8167
10	44	67	10
11	44	67	10
12	56	67	10
13	50	85	10
14	56	85	11.6619
15	40	75	10
16	50	85	10

In de bovenstaande tabel staan alle pogingen (16 in totaal) die een leerling heeft gedaan bij het geven van de coördinaten van vijf eindpunten waarbij de lengte 10 is.

We zien van poging 2 naar 3 dat de leerling dichter in de buurt komt. In poging 4 gaat hij door deze goede richting op en komt tot het goede antwoord. Van poging 5 naar poging 6 krijgt de leerling een resultaat dat verder van 10 afligt. Vervolgens past hij zijn waarde aan door in poging 7 de andere kant op te gaan. Alleen in plaats van deze strategie te vervolgen, verandert in poging 8 de leerling ineens de andere invoervariabele. Hierna geldt opnieuw dat de leerling van poging 9 de resultaten goed interpreteert en in poging 10 de andere kant op gaat.

Opvallend is wat er na deze poging gebeurt. De leerling stopt nu met 'proberen' en gaat beredeneren. Hij ziet in dat wat de ene kant op geldt ook de andere kant op geldt. Hij kiest zijn punt aan de andere kant van de verticale lijn door het uitgangspunt heen (50 – 44 = 6, 50 + 6 = 56, vandaar het punt (56,67). Nadat hij dit gedaan heeft, bedenkt hij dat er nog een aantal gemakkelijke punten is dat hij niet heeft uitgeprobeerd (pogingen 13 en 15). Poging 14 is nog een interessant geval waar hij poging 12 en 13 combineert. Een onjuiste toepassing van handig kiezen.

(leerling 4, opdracht 02 vijf lengtes, tabblad basismodel, vooronderzoek 2)

Figuur 3.32 *Voorbeeld interpretatie van resultaten, waarbij reflectiemoment herkenbaar is*

De leerlingen die hun probeerstrategie baseren op voorgaande resultaten komen sneller tot het gewenste resultaat dan leerlingen die dit niet doen en in het proberen 'verzanden'. Eén van de leerlingen die telkens opnieuw in het proberen verzandt, zonder een strategie te volgen, is geholpen wanneer er voor haar structuur wordt aangebracht (figuur 3.33).

De leerlinge (leerling 12) heeft geen stappenplan wat ze consequent volgt. Het lijkt wel of ze elke keer met de uitkomst van een poging haar stappenplan wijzigt. De leerling heeft er baat bij wanneer de onderzoekster heel duidelijk structuur aanbrengt door de volgende punten langs te gaan: Wat gebeurt er als je .... Hoe verhouden de uitvoerparameters zich nu tot de gewenste waarden. Moet de uitvoerparameter toe- of afnemen? Hoe kun je dat dus doen? Probeer eens uit. Is de uitvoerparameter nu toe- of afgenomen? Wat moet je nu dus doen de uitvoerparameter weer verder toe of af laten nemen of nu juist weer andersom? Hoe kon je dat ook alweer doen?

(leerling 12, vooronderzoek 2)

Figuur 3.33 *Voorbeeld van gebrek aan plan van aanpak*

Samenvattend stellen we dat er verschillen zijn in de manier waarop leerlingen hun resultaten interpreteren. Daarbij geldt dat hoe meer er over het waarom nagedacht wordt, hoe sneller leerlingen het antwoord vinden. De sterke leerlingen doen dit over het algemeen vaker dan de zwakke leerlingen. Dit verklaart deels de verschillen die tussen de groepen leerlingen gevonden worden in de tijdsbesteding aan opdrachten (paragraaf 3.4). Op het denken over het waarom gaan we in de volgende paragraaf verder in.

Mogelijke oorzaken gebrekkige interpretatie

We zien dat over het algemeen de vervolgacties van leerlingen gebaseerd zijn op hun verkregen resultaten. Bij sommige leerlingen is dit vervolg kwalitatief bij anderen is dit kwantitatief. Het komt voor dat leerlingen hun strategie wijzigen voordat de strategie hen een oplossing heeft opgeleverd, terwijl ze wel steeds dichter naar een oplossing toe gingen. De kwaliteit van de interpretatie lijkt een grote bepalende factor te zijn in het aantal SimQuest-berekeningen dat leerlingen gebruiken om tot een antwoord te komen.

Een mogelijke oorzaak voor een gebrekkige kwaliteit van de interpretatie is het (deels) ontbreken van een plan van aanpak. We zagen dat een leerlinge die telkens verzandde in eindeloos proberen geholpen was door vragen als 'wat gebeurt er als je…'en 'is de uitvoerparameter toe- of afgenomen?'.

Een tweede mogelijke oorzaak is de afwezigheid van expliciete aandacht voor interpretatie in het materiaal. Ook in de (terugkoppeling op de) deelopdrachten wordt geen expliciete aandacht aan interpretatie besteed.

Een derde mogelijke oorzaak is dat een deel van de leerlingen geen notities maken (zie bijlage B.5) en van de leerlingen die dit wel doen maakt slechts een deel notities over de uitkomsten die ze krijgen. Daardoor vergeten ze wellicht wat hun voorgaande SimQuest-berekeningen inhielden en welke resultaten deze opleverden. Het is dan moeilijk om de huidige data goed te interpreteren in het licht van voorgaande resultaten.

Mogelijke aanpak bij de verdere ontwikkeling van materiaal

Voor we besluiten het probleem van de afwezigheid van een plan van aanpak met aanpassingen in het materiaal aan te pakken, wachten we eerst af in hoeverre dit probleem ook speelt in een reële klassensituatie. Hetzelfde geldt voor het gebrek van het maken van aantekeningen. We laten deze punten daarom grotendeels rusten tot we de resultaten van het derde vooronderzoek hebben besproken. Wel zullen we in deelopdrachten meer expliciete aandacht aan de interpretatie van resultaten geven.

Een mogelijke aanpak ligt wellicht buiten het materiaal. Een deel van de leerlingen interpreteert nauwelijks en is door het doen in beslag genomen. Wellicht is er een mogelijkheid om van buiten af leerlingen tot monitoren aan te zetten.

3.5.5 Beredeneren, bewijzen en aantonen

Geobserveerde handelingen van leerlingen

Bij beredeneren, bewijzen en aantonen gaat het om denkactiviteiten die leerlingen verrichten, bijvoorbeeld argumenten geven waarom een formule (niet) klopt, of een idee aannemelijk is. Wanneer we kijken naar de verschillende strategieën die leerlingen gebruiken (paragraaf 3.4.1) zien we dat een deel van de leerlingen gelijk vanaf het begin redeneert en berekent, een deel van de leerlingen probeert eerst zonder te beredeneren een aantal situaties en ziet vervolgens hoe de oplossing gevonden kan worden en een deel van de leerlingen blijft maar proberen en vindt door proberen de gewenste situatie. Deze laatste groep leerlingen geeft geen signalen dat ze nadenken over het waarom. Hierdoor kan de leerling de berekening en de achterliggende theorie missen, zoals in het voorbeeld in onderstaand kader (figuur 3.34) gebeurt.

> Dit voorbeeld gaat weer over het vinden van vijf oplossingen om een lengte 10 te vinden (figuur 3.13). Leerling 20 wil deze opdracht oplossen door een coördinaat met de kleinst mogelijke stap te veranderen. Hij hoopt dat de afgeronde lengte dan nog steeds 10 is.
> Wanneer een leerling op deze manier 'zich ervan af maakt' dan is zijn doel zo snel mogelijk de opdracht te beantwoorden en niet zich de achterliggende wiskunde eigen te maken.
>
> (leerling 20, vooronderzoek 2)

Figuur 3.34 *Voorbeeld van zo snel mogelijk een opdracht af willen ronden*

Sommige leerlingen zijn zich van deze gemiste kans bewust. Dit blijkt bijvoorbeeld uit de uitspraak: "niet vragen waarom, want dat weet ik ook niet" (leerling 5). Helaas lijkt het in ieder geval in dit geval bij deze uitspraak te blijven en niet te leiden tot begrip van het waarom.

Wanneer leerlingen een conclusie trekken op basis van de resultaten van hun experimenten en daarbij geen verklarende theorie hebben, krijgen deze leerlingen te maken met onzekerheid. Het is voor leerlingen lastig om een idee te krijgen wanneer ze voldoende hebben aangetoond dat wat zij denken dat zo is, ook daadwerkelijk zo is. Deze onzekerheid hoort bij het doen van onderzoek (o.a. Keys et al., 1999; Kyle, Linn, Bitner, Mitchener, & Perry, 1991). Het komt regelmatig voor dat leerlingen te beperkt kijken of een vermoeden of bewering wel of niet klopt. Zo ook in de drie voorbeelden in figuur 3.35 waar beide leerlingen meerdere situaties bekijken, maar toch niet alle relevante situaties gezien hebben.

Een leerling (leerling 3) bekijkt voor één situatie van begin- en eindpunt of de bewering wel of niet waar is. Hij probeert dat voor meerdere variaties van andere variabelen uit. Maar hij bekijkt/reflecteert vervolgens niet of dit voor alle andere gevallen (dan die ene situatie van begin- en eindpunt) ook waar zal zijn.

(leerling 3, opdracht 08 buiten-buiten kortst, tabblad knikpunt, vooronderzoek 2)

Een leerling (leerling 3) trekt de onjuiste algemene conclusie dat wanneer je het beginpunt van een lijnstuk niet verandert, de richtingscoëfficiënt ook niet verandert. Dit is toevallig het geval voor de situaties die hij heeft bekeken.

(leerling 3, opdracht 05 lijn op eigen route, tabblad basismodel, vooronderzoek 2)

Leerling 17 probeert relatief (vergeleken met de andere leerlingen) veel verschillende situaties uit bij de opdrachten in het tabblad ‘knikpunt’. Toch is dit nog niet altijd genoeg om de vraag juist te beantwoorden.

(leerling 17, tabblad knikpunt, vooronderzoek 2)

Figuur 3.35 *Voorbeelden dat hoeveelheid bekeken situaties niet altijd voldoende is*

Wanneer weet je als leerling dat je genoeg verschillende situaties hebt bekeken en dat je aan alle mogelijke varianten hebt gedacht? Nog een voorbeeld hiervan staat in het volgende kader (figuur 3.36).

Dit voorbeeld gaat opnieuw over het vinden van vijf oplossingen om een lengte 10 te vinden (zie figuur 3.13). Leerling 18 vindt door middel van proberen de volgende twee oplossingen: (42,81) en (44,83). Ze merkt op: “lijkt erop dat er steeds 2 bijkomen”. Haar volgende poging is (46,85). Het is toeval dat het opgaat voor van de eerste naar de tweede oplossing (de ene is verschil 6 en verschil 8, de ander is verschil 8 en verschil 6), maar bij de laatste poging gaat het niet langer op. Ze lijkt haar strategie te verwerpen en vindt de volgende oplossing weer door te proberen.
Maar nadat ze deze oplossing (50,85) heeft gevonden is het eerst volgende wat ze probeert (51,86). Het lijkt erop alsof er toch iets van de ‘onjuiste’ strategie is blijven hangen, zij het dat ze nu een variant probeert.

(leerling 18, vooronderzoek 2)

Figuur 3.36 *Voorbeeld vraag wanneer je een strategie moet verwerpen?*

Deze leerlinge vindt toevallig een verband. Ze probeert het verder uit, maar nu gaat het niet langer goed. Omdat ze niet weet waarom het verband wel of niet klopt, blijft het ergens in haar hoofd hangen. Wie weet is er wel zo'n soort verband, maar had ze het niet helemaal goed. Hoe weet een leerling wanneer hij echt het verband moet verwerpen of wanneer hij er bijna was? Dit zou bepaald kunnen worden op basis van theorie en het nadenken van het waarom van een verband. Maar als dit niet of onvoldoende gebeurt, dan blijven er veel onzekerheden over voor de leerling die allemaal in zijn hoofd blijven zitten. In dit geval weet de leerlinge niet zeker of ze het verband bijna klopte of helemaal niet bestond, wat ze bij een volgende oplossing weer verder uit kan zoeken. Zo blijft er veel onzeker. De op deze manier steeds toenemende onzekerheid kan ertoe leiden dat de leerling op een gegeven moment door de bomen het bos niet meer ziet.

Dat het voor leerlingen lastig is om een idee te krijgen wanneer ze voldoende hebben aangetoond dat wat zij denken dat zo is, ook daadwerkelijk zo is, blijkt ook uit een aantal andere zaken als het kiezen van genoeg extreme waarden (zie figuur 3.37).

In meerdere opdrachten wordt leerlingen gevraagd uit te zoeken of het verband tussen twee variabelen lineair is. Bij één van deze opdrachten bedenken twee leerlingen afzonderlijk van elkaar (leerling 11 en leerling 17) de juiste strategie hoe ze dit kunnen achterhalen en bij welke uitkomsten het verband lineair is. Alleen kiezen zij te kleine getallen. Dit heeft tot gevolg dat de verschilwaarde door de afronding telkens gelijk lijkt te blijven. Hierdoor geven zij het foute antwoord.

(leerling 11 en 17, vooronderzoek 2)

Figuur 3.37 *Voorbeeld onvoldoende extreme situaties waardoor fouten door afronden ontstaan*

Natuurlijk komt het in de wetenschap ook veelvuldig voor dat door het 'per ongeluk' kiezen van onjuiste waarden, verkeerde conclusies worden getrokken of conclusies die later alleen heel erg beperkt geldig blijken te zijn. Binnen de wetenschap komt men verder door met elkaar hierover van gedachten te wisselen. Twee weten meer dan één, maar (misschien tot spijt van leerlingen) er zal altijd onzekerheid blijven bestaan, hoeveel wetenschappers ook meedenken.

Mogelijke oorzaken gebrekkige beredenering

In de beschrijving van de fasen volgt nog een aantal stappen na het verkrijgen van de resultaten. Uit de resultaten van de verschillende observaties (hun uitspraken, hun handelingen in Zwitserleven, de gegeven antwoorden op opdrachten) blijkt dat een deel van de leerlingen (vooral zwakke) aan het beredeneren nauwelijks aandacht besteedt; zij volgen een werkwijze waarbij zij via proberen oplossingen vinden zonder te begrijpen waar die oplossingen vandaan komen. Soms merken leerlingen op dat ze 'het waarom' niet weten, maar leerlingen lijken daar vervolgens niet naar op zoek te gaan.

Dit weinig beredeneren door leerlingen komt wellicht (net zoals bij structureren) omdat er in het materiaal vaak weinig expliciete aandacht voor is. Opnieuw geldt dit voor het boek en is de vraag in hoeverre dit voor het ontwikkelde materiaal geldt.

Zoals beschreven in aanpassing van het materiaal zijn concluderende opdrachten uit het materiaal verwijderd. Een voorbeeld van een dergelijke opdracht staat in figuur 3.9. In tabel 2.5 stelden we bij de concluderende opdracht 1d dat de leerlingen hier 'Voor zover één van bovenstaande conclusies nog niet getrokken is' alsnog deze conclusies konden trekken. Nu dergelijke opdrachten verwijderd zijn, lijkt het erop dat leerlingen niet 'één van de bovenstaande conclusies trekken' en ook niet alsnog. Het verwijderen van dit soort opdrachten heeft, zo blijkt, ook nadelen. Met onze ervaringen uit het eerste vooronderzoek is het maar de vraag of slechts de aanwezigheid van deze opdrachten wel tot het alsnog trekken van de conclusies leidt.

Het kan zijn dat het tevreden zijn met een antwoord zonder te begrijpen waarom dat antwoord het antwoord is, een cultuur is die leerlingen gewend zijn. Het gebrek aan aandacht voor beredeneren in het boek ondersteunt deze gedachte. De kans is klein dat leerlingen zich spontaan anders zullen gedragen dan hun in het boek getoond wordt. De formulering van de opdrachten geeft daar bovendien geen reden toe; zo is in figuur 3.23 de opdracht om drie situaties te omschrijven en staat er geen expliciete vraag om door middel van deze opdracht iets meer te gaan begrijpen van de concepten ‘a’ en ‘b’. Dat leerlingen het antwoord vinden door het aanpassen van de invoerwaarden net zolang tot de uitvoerwaarden gewenst zijn, komt overeen met wat Sins, Savelsbergh en Van Joolingen (2005) vonden in hun studie. Zij vonden namelijk dat leerlingen een sterke focus leken te hebben op het aanpassen van de modelparameters om in overeenstemming te zijn met de empirische zonder daarbij naar hun voorkennis te kijken.

Kijken we naar de terugkoppeling van de deelopdracht in het voorbeeld in figuur 3.8 dan valt op, dat hier alleen aanwijzingen staan voor het opnieuw ‘proberen’. De waarde van ‘b’ kan ook berekend worden en in het boek wordt juist behandeld hoe dat moet. Een berekening waarin aangetoond wordt welke waarde ‘b’ heeft, zou dus op zijn plaats zijn.

Een tweede mogelijke verklaring is van motivationele aard. Opnieuw gaat het hier om het tweede aandachtspunt van Pintrich, Marx en Boyle (1993), namelijk het niveau van betrokkenheid, de mate waarin een leerling in een opdracht duikt. De leerlingen gaan wel met de opdracht aan de slag (aandachtspunt (1) de keuze om zich bezig te houden met een taak), maar duiken niet zover in de opdracht dat ze over het waarom nadenken.

Het komt voor dat leerlingen een onjuiste conclusie trekken, doordat zij een categorie situaties over het hoofd zien of doordat zij onzorgvuldig werken. Onzekerheid hoort bij het doen van onderzoek. Het is voor een leerling lastig te bepalen wanneer hij met voldoende zekerheid een conclusie kan trekken. Te veel tijdelijke en/of onzekere conclusies kunnen er wellicht toe leiden dat er teveel ‘misschiens’ in de hoofden van leerlingen zitten, waardoor leerlingen geen duidelijk beeld meer hebben van voorlopig aangehouden en verworpen ideeën. Leerlingen hebben geen goed overzicht over wat ze opgestoken hebben; zowel over welke ideeën (b)lijken te kloppen als over welke ideeën blijken te moeten worden verworpen.

Mogelijke aanpak bij de verdere ontwikkeling van materiaal

We zijn op zoek naar alternatieven voor de verwijderde opdrachten. Het is een optie om de formulering van de opdrachten aan te passen, door bijvoorbeeld in de opdrachten expliciet een focus te leggen en te vragen naar het waarom.

Een andere mogelijkheid is om de formulering van opdrachten aan te passen door er bijvoorbeeld een extra opdracht aan toe te voegen. Echter, het geven van meerdere opdrachten binnen één opdracht is onwenselijk. Redenen om de eerdere concluderende opdrachten te verwijderen, waren onder andere dat leerlingen zouden kunnen denken dat ze alleen bij die opdrachten conclusies zouden moeten trekken. Dit hangt samen met de wens de huidige schoolcultuur waarin nauwelijks aandacht voor interpretatie en beredeneren is te veranderen. Leerlingen zouden een houding moeten krijgen waarbij ze standaard zich afvragen wat ze van een opdracht kunnen leren. Eén van de manieren om hoog-niveau denken te stimuleren is in het materiaal een continue druk uit te oefenen waarbij om uitleg, betekenis en begrip gevraagd wordt (Anderson, 1989; Stein, Grover, & Henningsen, 1996). We zoeken naar een manier waarop we door middel van materiaal deze continue druk kunnen aanbrengen.

We zoeken naar een vertragende instructie die leerlingen na het beantwoorden van een opdracht niet meteen naar de volgende opdracht laat gaan. Daarom moet deze instructie buiten de opdracht vorm krijgen. Misschien zelfs wel buiten het SimQuest-materiaal gezien het gevaar van verzanden in proberen in het interactieve gedeelte.

3.5.6 Presenteren en communiceren

Geobserveerde handelingen van leerlingen

Het lezen van de opdracht

De beperkingen van het programma in de formulering leidden tot problemen. Dit heeft twee kanten: leerlingen raken verward door de notatie in de opdrachten (bijvoorbeeld in het programma staat >= in plaats van ≥ en x^2 in plaats van x^2) en leerlingen kunnen zelf hun antwoord niet noteren op de hen aangeleerde manier. Een voorbeeld van de verwarring die ontstaat, is gegeven in figuur 3.38.

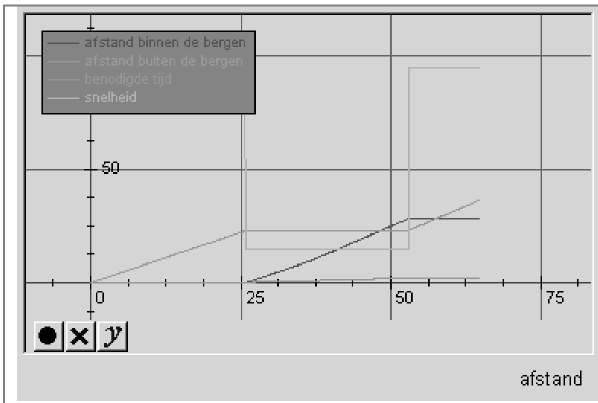
> De leerling leest de variabele x1 als x = 1.
>
> Leerling 4, vooronderzoek 2

Figuur 3.38 *Voorbeeld verwarring door beperkingen programma aan notatie*

Het beschrijven van resultaten

Bij het uitvoeren van een plan van aanpak hoort het beschrijven van resultaten. Veel leerlingen blijken problemen te hebben met het juist en scherp formuleren van hun antwoord. Zo laat één leerling (Leerling 20) zich ontvallen: "hoe moet je dat uitleggen hè". Ook een andere leerlinge (Leerling 13) merkt op: "Ja, hoe leg ik dat nu uit". Problemen met de formulering zien we terug in de antwoorden die gegeven worden. In onderstaand kader (figuur 3.39) staat een voorbeeld van de antwoorden die leerlingen gaven:

> Een opdracht luidde als volgt: 'In de interface is een grafiek gegeven. Je kunt zelf kiezen wat er in de grafiek is uitgezet.
>
> Beschrijf wat voor invloed het binnen komen en verlaten van de auto van het berggebied heeft op de verschillende grafieken.'
>
> Een voorbeeld van een mogelijke grafiek is de volgende:



In de onderstaande tabel geven we aan hoe goed het geformuleerde antwoord was op het gebied van compleetheid (binnen komen en verlaten), of de leerlingen een antwoord in het algemeen geven of specifiek voor de situatie die zij bekeken hebben, of het antwoord eenduidig is (dat wil zeggen niet op meerdere manieren op te vatten) en of wat er in het antwoord beweerd wordt juist is. Niet alle leerlingen zijn aan deze opdracht toegekomen.

leer-ling	**sterk (s), gem (g) of zwak (z)**	**compleet**	**algemeen / specifiek**	**eenduidig**	**juistheid beweringen**
1	s				
2	z				
3	g	-	+	-	+
4	g				
5	z				
6	s	-	-	-	+
7	z	-	+	-	-
8	g	+	-	+	+
9	g	-	-	-	+
10	s	-	-	-	+
11	z	-	+	-	-
12	z				
13	g	+	+	-	+
14	g	-	+	-	+
15	g	-	-	-	-
16	s	+	+	-	+
17	s	+	+	-	+
18	z	-	-	-	+
19	g	-	+	-	+
20	s	+	+	-	+

Twee voorbeelden van de gegeven antwoorden
Leerling 15: De snelheid neemt af van 95 km/h tot 15 km/h
De afstand buiten de bergen neemt toe.

De benodigde tijd neemt toe
De afstand binnen de bergen neemt ook toe.

Leerling 17: afstand binnen de bergen stijgt bij het binnenkomen en blijft gelijk bij het verlaten van de bergen.
afstand buiten de bergen, stopt met stijgen en blijft gelijk bij het binnenkomen en gat weer verder met stijgen na het verlaten van de bergen.
de benodigde tijd wordt steiler in de bergen en minder stijl wanneer je uit de bergen bent.
de snelheid is een rechten horizontale lijn die lager ligt dan wanneer je buiten de bergen bent.

(Overigens zoomt slechts een deel van de leerlingen in op de groene lijn, zodat de meesten daarover eigenlijk niets kunnen concluderen…..)

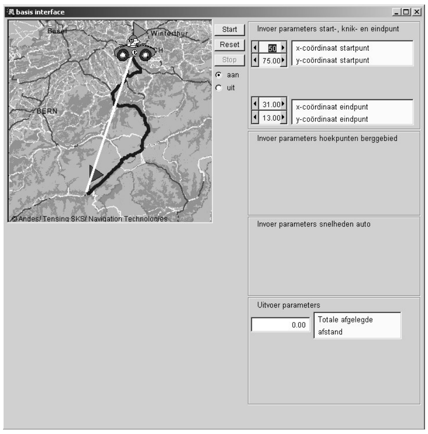
Figuur 3.39 *Voorbeeld (1) van kwaliteit formulering antwoord door leerlingen*

In dit voorbeeld hebben leerlingen vooral moeite om hun antwoord compleet en eenduidig te formuleren. Bij de opdracht uit figuur 3.40 ligt dit anders; de eenduidigheid is bij deze opdracht hoger. Het verschil is dat in deze opdracht gevraagd wordt om iemand anders aan de hand van het antwoord iets te laten doen. Bovendien is het een meer oriënterende opdracht en daardoor ligt het wiskundige gehalte (ook in het antwoord) lager.

Een opdracht luidde als volgt: ‘Kies een willekeurig punt op de kaart. Maak een beschrijving van de ligging van dit punt ten opzichte van Zürich. De beschrijving "de (x,y)-waarde van het eindpunt is (..,..)" is niet toegestaan.

Laat iemand anders aan de hand van jouw beschrijving dit punt op de kaart aanwijzen.’

Het interactieve gedeelte zag er als volgt uit:



In de onderstaande tabel geven we aan hoe goed het geformuleerde antwoord was op het gebied van compleetheid (is de positie precies gedefinieerd, bijvoorbeeld ten zuid westen is niet exact 1 plaats), of de leerlingen een antwoord in het algemeen geven of specifiek aan de hand van situatie gebonden kenmerken van de kaart, of het antwoord eenduidig is (dat wil zeggen niet op meerdere manieren op te vatten). Niet alle leerlingen zijn aan deze opdracht toegekomen.

leer-ling	sterk (s), gem (g) of zwak (z)	compleet	algemeen / specifiek	eenduidig
1	s	+	+	+
2	z	-	+	+
3	g	+	+	+
4	g	+	+	+
5	z	-	-	+
6	s	+	+	+

Drie voorbeelden van de gegeven antwoorden
Leerling 5: volg de route van de ANWB vanuit Zurich. op een gegeven moment volgt er een bocht naar rechts. Vlak voor de bocht zit een (gele) weg naar links en achter de bocht zit een (gele) weg naar links. Neem de weg voor de bocht die naar rechts gaat en rijd een eind door. Bij een afslag naar recht rijd je gewoon rechtdoor. je knalt vanzelf wel een keer tegen ons aan. voor de duidelijkheid, we bevinden ons ten zuid-oosten van Zurich.

Leerling 2: ik zit ten zuid westen van zurich op 43 km bij een grote stad

Leerling 6: Vanuit Zurich ga je 8 kilometer naar het westen en dan 20 kilometer naar het zuiden

Het valt op dat de zwakke leerlingen vooral over richtingen spreken (zuid-westen, zuid-oosten) en kenmerken van de kaart gebruiken (een grote stad, voor de bocht een gele weg naar links). Beide antwoorden zijn niet zo specifiek dat iemand anders het punt op de kaart aan zou kunnen wijzen. De sterke leerlingen splitsen de richting uiteen: 8 kilometer naar het westen en 20 kilometer naar het zuiden. Met de beschrijving van deze leerlingen is het punt wel aan te wijzen op de kaart.

Figuur 3.40 *Voorbeeld (2) van kwaliteit formulering antwoord door leerlingen*

De sterke leerlingen lijken beter in staat om het antwoord wiskundig juist te presenteren. Zij lijken ook meer geabstraheerd te hebben, omdat zij gebruik maken van de coördinaten en niet kenmerken van de kaart in hun beschrijving gebruiken.

Mogelijke oorzaken gebrek aan precisie in formulering

We zagen bij het geven van antwoord op opdrachten dat leerlingen moeite hebben om hun antwoord wiskundig netjes te formuleren. Vooral de compleetheid en de eenduidigheid van de formulering kan bij veel leerlingen verbeterd worden.

Uit de antwoorden van leerlingen komt naar voren dat een aantal leerlingen in algemene termen antwoordt, maar een ander deel geeft een context gebonden antwoord. Het antwoord van de laatste groep leerlingen is van een lager abstractieniveau als dat van de eerste groep. Een mogelijke oorzaak voor het ‘situatie gebonden antwoorden geven’ door leerlingen, komt wellicht doordat zij niet weten dat er van hen verwacht wordt dat zij in algemenere termen antwoorden ondanks dat de vraagstelling heel algemeen is.

Daarnaast moeten leerlingen de wiskunde taal leren, dus is het niet verwonderlijk dat ze ‘taalfouten’ maken. Door gebrek aan terugkoppeling kan het zijn dat leerlingen onvoldoende terugkoppeling op hun formulering krijgen.

Bij de eenvoudigere opdracht zagen we dat de eenduidigheid voor alle leerlingen goed was. Een mogelijke verklaring is dat de leerling bij deze opdracht een andere leerling in gedachten moest nemen, die aan de hand van het antwoord een handeling moest kunnen uitvoeren.

Compleetheid van het antwoord is minder direct een zaak van communiceren en presenteren. Toch heeft compleetheid hier wel mee te maken. Een gebrek aan precisie in formulering en/of compleetheid van het antwoord is vaak ook een teken van gebrek aan begrip. Wanneer leerlingen de opdracht niet goed begrijpen (vaktaal maar ook inhoudelijk) zullen hun antwoorden waarschijnlijk onvolledig zijn. De resultaten laten zien dat leerlingen alleen antwoord geven op een deel van de opdracht. De incompleetheid van antwoorden komt wellicht doordat leerlingen zich onvoldoende georiënteerd hebben op de inhoud van de opdracht. Mede daardoor kan het zijn dat ze (bewust of onbewust) een onvolledig plan van aanpak hebben.

Mogelijke aanpak bij de verdere ontwikkeling van materiaal

Een opdracht waarbij de leerling een medeleerling in gedachten heeft die het antwoord moet gebruiken, heeft een hoge eenduidigheid. Het is de vraag of wanneer ook bij de moeilijkere opdracht een soort gelijke opdracht was toegevoegd (bijvoorbeeld: ‘laat iemand anders aan de hand van jouw beschrijving een schets maken van de grafiek’) de eenduidigheid hoger zou zijn geweest. Wellicht verbetert door de aanwezigheid van medeleerlingen en docenten in het derde vooronderzoek de eenduidigheid van de antwoorden van leerlingen.

Medeleerlingen die zelf ook de wiskundetaal moeten leren, zijn niet de beste gevers van terugkoppeling waar het om eenduidigheid van wiskundige termen gaat. Bovendien kunnen leerlingen erop vertrouwen dat ‘de ander wel begrijpt wat er wordt bedoeld’ ook al is de formulering niet helemaal juist. Medeleerlingen zullen niet snel iets zeggen over het specifieke antwoord daar waar een algemener antwoord gewenst is. Met andere woorden alleen medeleerlingen terug laten koppelen is niet voldoende.

Een betere oriëntatie op de opdracht kan worden ondersteund door in de oriëntatie- en deelopdrachten meer expliciete aandacht aan oriëntatie op de inhoud van de opdracht en het opstellen van een plan van aanpak te schenken.

4 Het derde vooronderzoek: aanpassing en uitbreiding van lesmateriaal voor wiskunde en onderzoek naar de bruikbaarheid daarvan in een reële klassensituatie

Ook het derde vooronderzoek had twee doelen. Het eerste was het verder ontwikkelen, aanpassen en aanvullen van de SimQuest-applicaties. De ondersteuning van de SimQuest-applicaties was dit maal ook deels buiten de SimQuest-omgevingen. Het tweede doel was het testen van de bruikbaarheid van dit materiaal in een reële klassensituatie. We zullen in onze bespreking ingaan op de gevolgen van het gebruik van het materiaal in de klas. Daarnaast bespreken we de toetsen die in dit onderzoek zijn afgenomen.

4.1 Het ontwikkelen, aanpassen en aanvullen van het lesmateriaal

Na elk vooronderzoek zijn Het Zwitserleven en Het benefietconcert aangepast. Alleen de veranderingen in Het Zwitserleven zijn tot dusverre besproken. Hier bespreken we daarom vooral aanpassingen aan Het benefietconcert. In het derde vooronderzoek is voor het eerst de applicatie Tsunami ingezet. Tsunami besteedt aandacht aan richtingscoëfficiënten, modelvorming (met de begrippen domein en bereik), vergelijkingen en ongelijkheden. De applicatie bestaat uit vier tabbladen. Het eerste deel is een korte inleiding op het begrip Tsunami en de gebeurtenissen van 1960[1]. In het tweede deel wordt de reikwijdte van een Tsunami na een aantal uur bekeken en hier worden de begrippen ‘domein’ en ‘bereik’ aan gekoppeld. In het derde deel (en vierde toetsdeel) wordt het model uitgebreid. In dit vooronderzoek is ook een conclusieschema ontwikkeld dat we hier bespreken.

4.1.1 Aanpassingen in de applicaties

In deze paragraaf bespreken we de aanpassingen van de oriëntatieopdrachten, de formuleringen van de (deel)opdrachten en de feedback.

Oriëntatieopdrachten

Na het tweede vooronderzoek stelden we voor om de oriëntatie op het interactieve gedeelte aan te vullen met een oriëntatie op de inhoud van een opdracht. In figuur 4.1 staat een voorbeeld van zo’n opdracht.

Is de winst gelijk aan 0 euro wanneer er geen kaarten verkocht worden?

(opdracht 02 oriëntatie prijsbepaling, tabblad ‘prijsbepaling’, benefietconcert, derde vooronderzoek)

Figuur 4.1 *Voorbeeld oriëntatie op inhoud*

De opdracht vraagt leerlingen alleen het aantal kaarten gelijk aan 0 maken en af te lezen of de winst gelijk is aan 0. De opdracht wil de leerlingen stil laten staan bij de betekenis van het wiskundige begrip winst en de verbanden tussen de verschillende variabelen laten verkennen. Behalve een oriëntatie op

[1] Bij aanvang van het vooronderzoek was het begrip tsunami relatief onbekend. Tijdens het vooronderzoek vond de tsunami in Azië plaats en was het fenomeen veelvuldig op het nieuws.

functies, variabelen en hun onderlinge relatie(s) kan in oriëntatieopdrachten ook aandacht besteed worden aan de verbanden tussen de verschillende situaties. Oriëntatieopdrachten krijgen daardoor tevens een structurerende rol. Zo wordt in figuur 4.2 de vraag gesteld of in de nieuwe situatie de oude formule geldig blijft. Door deze inhoudelijke component is het onderscheid tussen oriëntatieopdrachten en de overige opdrachten minder scherp. Er is meer sprake van een geleidelijke overgang.

In de opdracht 'instellen breedte' in het niveau 'inleiding' heb je bekeken bij welke lengte de breedte gelijk aan 17 meter wordt. In de opdracht 'opstellen formule breedte' in het niveau 'basis model' heb je gezien dat je de lengte kunt berekenen met de formule:
breedte = meters hek / 2 - lengte.

Kun je deze formule in de nieuwe situatie nog steeds toepassen? Waarom wel/niet?

opdracht ’02 instellen breedte’, niveau oriëntatie artiestenruimte, benefietconcert, derde vooronderzoek

Figuur 4.2 *Voorbeeld aandacht verband tussen opdrachten in oriëntatieopdrachten*

Formulering (deel) opdrachten en terugkoppeling

Opdrachten

Om leerlingen beter over het probleem en (vaker) over hun antwoord en de achtergronden te laten beredeneren werd voorgesteld om opdrachten meer sturend te maken. Een voorbeeld uit het eerste vooronderzoek staat in figuur 4.3.

Wat is het verschil tussen de grafiek uit opdracht 6 en de grafiek uit opdracht 34?

(opdracht 35, tabblad ‘basismodel benefietconcert’, versie benefietconcert eerste vooronderzoek)

Figuur 4.3 *Voorbeeld van vraag naar een beschrijving van een observatie ui het eerste vooronderzoek*

Eén aanpassing betreft de formulering van de opdracht zelf. De leerlingen worden nu nadrukkelijker gewezen op waar ze op moeten letten. De focus wordt getoond. Hierdoor neemt de kans toe dat leerlingen zien wat ze moeten zien, maar ontneemt hen ook de kans zelf een focus te ontdekken. Een illustratie van de aangepaste opdracht uit figuur 4.3 staat in figuur 4.4.

Christa kan zelf bepalen hoeveel meters afzethek ze wil huren. Teken minimaal twee grafieken van de breedte waarbij het aantal meters hek verschilt. Vergelijk de twee grafieken.

Geef van elk van de onderstaande drie punten aan of zij in de twee grafieken verschillen of gelijk zijn:

(1) de helling van de grafiek
(2) het snijpunt met de x-as
(3) het snijpunt met de y-as

(opdracht 02 verschil grafieken meters hek breedte, tabblad 'basismodel', benefietconcert, derde vooronderzoek)

Figuur 4.4 *Voorbeeld van vraag naar een beschrijving van een observatie met meer sturing in de focus*

Een andere aanpassing betreft de toevoeging van een 'waarom'-vraag. Na de gebruikelijke opdracht om een beschrijving te geven van de waarneming wordt nu ook gevraagd naar een verklaring. Dit kan worden geïllustreerd met de vervolgopdracht die aan figuur 4.3 is toegevoegd (zie figuur 4.5).

Verklaar waarom:
(1) de helling van de grafiek gelijk blijft
(2) het snijpunt met de x-as verschilt
(3) het snijpunt met de y-as verschilt

(opdracht 02 verschil grafieken meters hek breedte (vervolg opdracht), tabblad 'basismodel', benefietconcert, derde vooronderzoek)

Figuur 4.5 *Voorbeeld naar vraag om verklaring van gedane observatie*

Terugkoppeling op opdrachten

We stelden ook voor om in opdrachten expliciet aandacht te schenken aan de kernactiviteiten. In figuur 4.6 staat de terugkoppeling op de opdracht uit figuur 4.1 waarin de relatie wordt beschreven tussen het wiskundige model en de werkelijkheid, een onderdeel van abstraheren.

Er is een verschil tussen de manier waarop het woord winst in de wiskunde wordt gebruikt en de manier waarop het in het dagelijks leven wordt gebruikt. In de wiskunde kan de winst ook kleiner dan 0 worden. Verlies is in de wiskunde negatieve winst.

Je kunt links zien dat wanneer je bv. het aantal kaarten gelijk aan 20 maakt, de winst dan -4261.60 euro wordt.
De opbrengst is wel altijd groter of gelijk aan 0 euro.

(terugkoppeling op opdracht 02 oriëntatie prijsbepaling, tabblad 'prijsbepaling', benefietconcert, derde vooronderzoek)

Figuur 4.6 *Voorbeeld aandacht voor relatie wiskunde-werkelijkheid in terugkoppeling*

Deelopdrachten

In eerste instantie waren de deelopdrachten vooral bedoeld om de hoofdopdracht in kleinere eenheden te verdelen waarop meer gedifferentieerde terugkoppeling kon worden gegeven. Later is dit uitgebreid en werden deelopdrachten ook steeds meer gericht op de uitvoering van kernactiviteiten. Dit is goed te zien in figuur 4.7. De hoofdopdracht uit het benefietconcert is gelijk gebleven (Geef de formule voor de breedte als functie van de 'lengte' en het aantal 'meters hek'.). De deelopdrachten volgen echter meer de oplossingsmethode van het boek en de instructie krijgt steeds meer trekjes van uitgewerkte voorbeelden, waarin accenten worden gelegd op het uitvoeren van activiteiten, als structureren, evalueren, interpreteren en beredeneren (zie Mayer, 1985; Renkl, 2002).

Deelopdracht 1: ‘Stap 1: Bedenk welke zijden van het aantal meters hek gemaakt worden.
Welke zijden zijn even groot? Hoe groot?
Vul de volgende zin in en maak hem verder af: Van het aantal meters hek wordt .... maal een zijde met een afmeting gelijk aan ... gemaakt en maal een zijde met een afmeting gelijk aan ... gemaakt.

Herschrijf deze zin tot:
aantal meters hek = ... · ... + ... · ...

Controleer in de simulatie of deze formule klopt.’

++
Deelopdracht 2: ‘Stap 2: Lees in de begrippenlijst na wat als functie van betekent.
In de opdracht wordt gevraagd de breedte als functie van de lengte en het aantal meters hek te geven. Dit betekent dat de formule er als volgt uit moet zien: b = ... met achter het is teken iets met lengte en meters hek.
Je moet nu dus de formule h = 2 l + 2 b herleiden. Doe dit!

Controleer in de simulatie of klopt wat je hebt opgeschreven.’

++
Deelopdracht 3: ‘Stap 3: De vraag is nu of je antwoord klopt met wat je al weet.
Je weet dat het verband tussen de lengte en de breedte lineair is.
De algemene formule van een lineair verband is:
y = a x + b (pas op dit is een andere b dan de breedte).

In dit geval wordt dit:
breedte = - l + 0,5 h (met l = lengte en h = aantal meters hek).
Je weet nu dat het snijpunt met de y-as van de grafiek gelijk is aan 0,5 h. Je weet ook dat de richtingscoëfficiënt gelijk is aan -1. Controleer deze twee dingen in de grafiek!

Tot slot kun je het snijpunt met de x-as uitrekenen.
-l + 0,5 h = 0
l = 0,5 h
Bij deze lengte wordt de breedte gelijk aan 0.’

Figuur 4.7 *Voorbeeld deelopdrachten in derde vooronderzoek*

Om leerlingen vaker aan te zetten tot *structureren* zorgden deelopdrachten nu bijvoorbeeld ook voor herhalingen, bouwden ze voort op eerdere redeneringen en bevatten ze verwijzingen naar voorgaande deelopdrachten. Dit is geïllustreerd in figuur 4.8.

De opdracht luidt:
‘Geef de formule voor de breedte als functie van de 'lengte' en het aantal 'meters hek'.

‘Wanneer je niet weet hoe je deze opdracht aan moet pakken, kun je de bijbehorende deelopdrachten bekijken.‘

++
De bijbehorende deelopdrachten luiden:
Deelopdracht 1: ‘In 'opdracht 03 lineair?' heb je gezien dat het verband tussen de lengte en de breedte lineair is. In 'opdracht 04 opstellen formule breedte' wordt gevraagd om een formule op te stellen voor dit lineaire verband tussen de lengte en de breedte.

Welke van de onderstaande formules neem je als uitgangspunt? (Let op! Je hebt maar één antwoord poging.)

a) $y = a \cdot x + b$
b) $y = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$
c) $y = a \cdot x^3 + b \cdot x^2 + c \cdot x + d$’

++
Deelopdracht 2: ‘In 'opdracht 04 opstellen formule breedte deelopdracht 1' heb je gezien dat voor een lineair verband je de formule $y = a \cdot x + b$ als uitgangspunt neemt. In 'opdracht 04 opstellen formule breedte' wordt gevraagd om een formule op te stellen voor de breedte als functie van de 'lengte' en 'meters hek'.

Hoe vul je nu y, a, x en b in? Kies uit één van de onderstaande alternatieven. (Let op! Je hebt maar één antwoord poging.)

a) y = breedte, x = lengte
b) y = lengte, x = breedte’

Figuur 4.8 *Geannoteerd voorbeeld deelopdracht van het derde vooronderzoek*

In stap 3 van de deelopdrachten (zie figuur 4.9) worden verbanden gelegd tussen de gevonden oplossing en wat de leerling al weet. De leerling wordt gestimuleerd te *interpreteren* doordat wordt nagegaan wat het gevonden antwoord betekent voor bijvoorbeeld een grafiek. Ook kan er gerekend worden aan punten in de grafiek en kunnen deze gecontroleerd worden (*beredeneren*).

'Stap 3: De vraag is nu of je antwoord klopt met wat je al weet.
Je hebt gezien in stap 2 dat je een kwadratische formule krijgt (q^2).

De algemene formule van een kwadratisch verband is:
$y = a x^2 + b x + c$

In dit geval wordt dit:
$R = -0{,}004 q^2 + 12{,}00 q$

In dit geval is $a = -0{,}004$, $b = 12{,}00$ en $c = 0$.

De grafiek van een kwadratische vergelijking is een bergparabool wanneer de a een negatief getal is. In dit geval is de a gelijk aan -0,004. De grafiek van de opbrengst uitgezet tegen het aantal kaarten is een bergparabool en heeft een maximum. Met andere woorden; er is een aantal kaarten waarbij de opbrengst maximaal is.

Controleer dit in de grafiek die je in opdracht 07 hebt getekend!'.

Figuur 4.9 *Voorbeeld stap in deelopdracht waarin interpretatie en aantonen een plek krijgen*

Terugkoppeling op deelopdrachten

De terugkoppeling na een foutief antwoord is uitgebreid. Er wordt uitgelegd waarom een antwoord onjuist is en het goede antwoord wordt gegeven. De feedback na een goed gemaakte deelopdracht varieert per opdracht. Soms volgt alleen 'correct antwoord'. In de meeste gevallen echter volgt meer feedback over het oplossingsproces of er wordt een voorbeeld gegeven hoe leerlingen het antwoord hadden kunnen controleren. In figuur 4.10 wordt het antwoord in de formule gepast en er wordt aangegeven hoe de leerling verder kan gaan. Er wordt in feite informatie 'weggegeven' waarmee de balans enigszins verschuift van alles zelf ontdekken naar deels tonen.

Inderdaad dit is het goede antwoord.

De formule ziet er dus als volgt uit:
breedte = a · lengte + b

Bedenk nu zelf hoe je a en b kunt bepalen of zoek dit op in de woordenlijst (zie niveau 'uitleg') of in je boek.

(terugkoppeling op opdracht 06 lineair (vervolg), tabblad 'basismodel', benefietconcert, derde vooronderzoek)

Figuur 4.10 *Voorbeeld terugkoppeling op juist antwoord in derde vooronderzoek*

4.1.2 Aanvullen met het conclusieschema

We concludeerden uit het tweede vooronderzoek dat leerlingen vaker na moeten denken over hun verkregen resultaten. Om deze reflectie te bevorderen hebben we in het derde vooronderzoek een 'conclusieschema' ingevoerd (zie figuur 4.11). In dit papieren schema moeten de leerlingen hun evaluaties en interpretaties uit deelopdrachten samenvatten. Voor ieder tabblad in een SimQuest-simulatie is er een apart schema.

Een conclusieschema bestaat uit een tabel met drie kolommen. In de eerste kolom staat het thema of onderwerp. De tweede kolom bevat de naam van de opdracht. De derde kolom is waar het om draait. Hier moeten de leerlingen hun ideeën noteren. De vormgeving stimuleert ze om conclusies te verbinden aan (deel)opdrachten. Op deze manier zijn hun conclusies voor henzelf en voor de docent traceerbaar. Het conclusieschema biedt slechts één plek voor het schrijven van een overkoepelende conclusie over (deel)opdrachten om te benadrukken dat deze in feite herhalingen zijn van de kernopdracht. Soms is een schema deels voorzien van een conclusie van een deskundige (zie figuur 4.11). De leerlingen kunnen deze conclusie verder uitbouwen en ze ook zien als vorm van feedforward voor de eigen conclusie(s). Op deze manier is een vorm van ‘cognitief leerlingschap’ (Brown, Collins, & Duguid, 1989; Sfard, 2001) geïntroduceerd.

Onderwerp	**Naam**	**Conclusie**
verband lengte – breedte	Niveau basisdeel	b (zonder artiestenruimte) = – l + 0,5 h
	opdracht 02	
	opdracht 03	
verband lengte - oppervlakte	Niveau basisdeel	O (zonder artiestenruimte) = – l² + 0,5 h l
	opdracht 04	
	opdracht 05	

Figuur 4.11 *Voorbeeld conclusieschema in het derde vooronderzoek*

4.2 Onderzoek naar de bruikbaarheid in een reële klassensituatie

4.2.1 Inleiding

In dit vooronderzoek ligt de focus op de plaats die het materiaal in de authentieke klassensituatie inneemt. Er zijn vier belangrijke verschillen met de eerdere studies. Ten eerste, de leerstof is voor de leerlingen nieuw. Ten tweede, het materiaal wordt voor het eerst gebruikt in een authentieke klassensituatie. Ten derde, de leerlingen werken nu meerdere sessies met het materiaal. Ten vierde, na, en bij de M-klas tijdens, het werken met het materiaal worden leerresultaten getoetst.

In dit vooronderzoek is het de eerste maal dat de SimQuest-simulaties in combinatie met andere bronnen zoals lesboek en docent gebruikt worden. Een bijzonder aandachtspunt hierbij is dat het SimQuest-materiaal nauwelijks ondersteuning biedt voor het oefenen van technieken. We hebben de docenten daarom aangeraden hiervoor het boek te gebruiken.

Uit het tweede vooronderzoek bleek dat veel leerlingen onvoldoende beschikten over onderzoeksvaardigheden. Door te werken met SimQuest-simulaties besteden de leerlingen meer tijd aan kernactiviteiten zoals beredeneren en ontwikkelen ze (hopelijk) ook onderzoeksvaardigheden. Dit vraagt om een toegesneden toetsing met opgaven die recht doen aan de werkwijze en focus. Net zoals in gewone proefwerken moet zo’n toets bovendien de juiste balans treffen tussen de beschikbare tijd, het aantal en de moeilijkheidsgraad van de opgaven.

We bestuderen achtereenvolgens de uitkomsten voor het vernieuwde materiaal en de invloed van de nieuwe context, en we bespreken de opzet en uitkomst van een ‘SimQuest’-toets.

4.2.2 Methode

Deelnemers

Leerlingen. De deelnemers aan het onderzoek kwamen uit 2 klassen 4 VWO, een N-klas en een M-klas. In de N-klas zaten 24 leerlingen, waarvan 11 vrouwen. In de M-klas zaten 26 leerlingen, waarvan 16 vrouwen. De leeftijd van de leerlingen is 15/16 jaar. Tijdens het vooronderzoek is een viertal leerlingen (2 vrouwen en 2 mannen) overgestapt van de N naar de M klas. Drie leerlingen stapten over na afronding van het hoofdstuk in de N-klas en één tijdens de behandeling van het hoofdstuk in de N-klas.

Docenten. De klassen hebben elk een andere wiskundedocent. De docent die de N-klas doceert, was betrokken bij de ontwikkeling van de simulaties. Bij deze docent was tijdens de periode van het vooronderzoek een leraar-in-opleiding aanwezig. Deze leraar-in-opleiding gaf ook onderwijs.

Procedure

In totaal waren 8 contacturen beschikbaar. Binnen die tijd moest de gebruikelijke leerstof behandeld kunnen worden omdat de simulaties geen extra oefenstof zijn maar grote delen uit het boek vervangen. De N-klas had vier uur per week wiskunde, waarvan twee uur achter elkaar (blokuren). De M-leerlingen hadden twee uur in de week wiskunde. Het tijdstip waarop de klassen met het eerste hoofdstuk begon verschilde. Eerst werkte de N-klas met de SimQuest-simulaties, daarna de M-klas. In beide klassen ging hieraan een introductie over het werken met de GR (Grafische Rekenmachine) vooraf.

De N-klas

De docent van de N-klas was van plan om de leerlingen 6 uren met de simulaties te laten werken en 2 uren met het leerboek. De docent was van plan eerst 3 lesuren te besteden aan simulaties en vervolgens 1 ‘gewoon’ lesuur te geven. Dit patroon wilde hij in de tweede week herhalen. Alle lessen met de computer vonden plaats in het computerlokaal. Dit is een ander lokaal dan waar de leerlingen normaal gesproken wiskunde hebben.

Aan het begin van de eerste les werd door de onderzoekster een introductie gegeven over het werken met SimQuest-simulaties en het conclusieschema. Vervolgens werkten de leerlingen individueel achtereenvolgens met Het Zwitserleven, Tsunami en Het Benefietconcert. Na ieder contactuur nam de onderzoekster de conclusieschema’s in en noteerde tot welke opdracht de leerlingen het schema hadden ingevuld. Bij het volgende contactuur met SimQuest-simulaties werden de schema’s weer uitgedeeld. Door omstandigheden (gelijktijdig andere lessen) heeft een drietal leerlingen alleen de klassikale lessen bijgewoond en niet met SimQuest-simulaties gewerkt. Deze leerlingen werkten zelfstandig in de SimQuest-contacturen waarin zij wel aanwezig waren.

Na afloop van de lessen volgde een toets. De resultaten van de toets telden mee als proefwerkcijfer. Eén gedeelte van de toets was traditioneel met open vragen op papier. Een ander gedeelte was een opdracht binnen Tsunami. Na de toets afname zijn de docent en twee sterke en twee zwakke leerlingen geïnterviewd.

De M-klas

De docent van de M-klas besloot eerst alle lessen met SimQuest-simulaties te geven en deze te vervolgen met enkele lessen uit het boek. Het soort plaats en de invulling van de SimQuest-lessen, inclusief inleiding door de onderzoekster, waren vergelijkbaar met die in de N-klas. Er werd in de introductie echter iets uitgebreider stilgestaan bij de bedoeling van de conclusieschema’s. Vanwege de tijd is Tsunami niet behandeld. Alle leerlingen hebben in deze klas met de SimQuest-simulaties gewerkt.

Na afloop van de lessen volgde ook nu een toets die meetelde als proefwerkcijfer. In overleg met de docent werd besloten deze alleen op papier af te nemen. Omdat deze klas in de periode van het onderzoek meerdere toetscijfers nodig had is tussendoor nog een toets afgenomen die meetelde als proefwerk. Na de toets afname zijn de docent en twee sterke en twee zwakke leerlingen geïnterviewd.

Instrumenten

Computertoets N-klas

De computertoets was een uitbreiding van de laatste opdracht in Tsunami die bestond uit één grote opdracht. De centrale vraag hierin is welke waarden een aantal invoervariabelen (eindpunten waar de golf aan land komt en plaats waar golf ‘terugkaatst’ tegen land) moeten hebben om bepaalde uitvoervariabelen (afgelegde afstand van beide golven en tijdsverschil tussen oorspronkelijke golven en weerkaatste golven) te verkrijgen. De leerlingen hadden één lesuur de tijd om deze opdracht te maken. Zij moesten hun antwoorden schriftelijk inleveren.

Papieren toets N-klas

De papierentoets in de N-klas gaat over het complete hoofdstuk 1 (zie bijlage B.6). We bespreken twee facetten van de toets, namelijk ‘grafische opdrachten’ en ‘keuze van waarden van parameters’, om te illustreren hoe we een gangbare toets hebben aangepast om recht te kunnen doen aan onderzoekend leren in de SimQuest-simulaties.

grafische opdrachten In tegenstelling tot het boek zijn de SimQuest-simulaties heel grafisch. Het ligt dan ook voor de hand om de toets een meer grafisch karakter te geven. In opgave 1a zijn bijvoorbeeld grafieken gegeven waarvoor leerlingen formules moeten opstellen. In de SimQuest-simulaties is dit uitgebreid aan de orde gekomen. In het leerboek gebeurt dit slechts in één opgave.

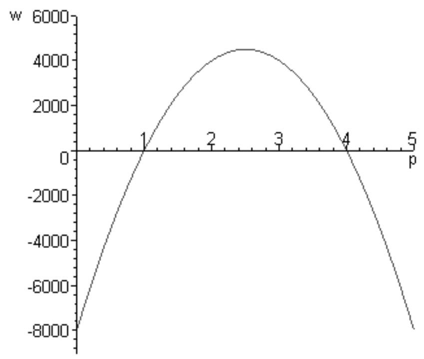
keuze van waarden van parameters In de SimQuest-simulaties moeten leerlingen regelmatig waarden kiezen voor parameters. In de toets haken we hierop in. In figuur 4.12 (opgave 5) gaat de kernvraag bijvoorbeeld over mogelijke waarden voor de keuze van parameter ‘a’.

In de onderstaande figuur is de grafiek van de winstfunctie $w = -a \cdot p^2 + 10000 \cdot p - 8000$ bij een bepaalde a getekend. In deze formule stelt w de winst voor en p de prijs. Je ziet dat de grafiek een bergparabool is.

a) Welke voorwaarde geldt in dit geval voor a?

Neem nu het tegengestelde van a.

b) Wat kun je nu over de maximale winst vertellen?



Figuur 4.12 *Voorbeeld aandacht in papierentoets voor keuze parameters*

Papieren toetsen M-klas

De toetsen voor de M-klas bevatten in vergelijking met die van de N-klas meer afwijkende (lees: simulatiespecifieke) toetsvragen. De eerste toets in de M-klas ging over het eerste deel van hoofdstuk 1; de tweede toets ging over het complete hoofdstuk (zie bijlage B.6). In deze paragraaf bespreken we twee voorbeelden.

mogelijkheden Eén van de gangbare toetsvragen uit de toets van de N-klas is in de M-klas uitgebreid met een extra onderdeel waarin wordt gevraagd naar mogelijke waarden voor een richtingscoëfficiënt. (zie figuur 4.13). Dit voorbeeld sluit aan op de werkwijze in SimQuest waarin leerlingen vaak op onderzoek gaan om de mogelijkheden te verkennen voor bijvoorbeeld een lijn die voor een positieve x waarde hoger ligt dan een andere lijn.

> De lijn k snijdt de y-as in het punt (0,7). Voor x > 0 geldt dat de lijn k boven de lijn q ligt. Welke waarden kan de richtingscoëfficiënt van de lijn k aannemen?
>
> Vraag 1c, Toets 1, M-klas, derde vooronderzoek

Figuur 4.13 *Voorbeeld vraag in toets over meerdere mogelijkheden*

onderzoeksvaardigheden In de tweede toets is een opgave toegevoegd die meer als doel heeft onderzoeksvaardigheden te toetsen. Een onderdeel van deze opgave heeft evaluatie als onderwerp (zie figuur 4.14).

> Waarom kan Jasper deze conclusie niet trekken alleen op basis van de gegevens in deze tabel?
>
> Vraag 2a, Toets 2, M-klas, derde vooronderzoek

Figuur 4.14 *Een voorbeeld van een toetsvraag met evaluatie als onderwerp*

Interviews

In de leerling-interviews kwamen de volgende zaken aan de orde:
- de werkwijze van de leerlingen
- de relatie tussen onderdelen uit het boek, SimQuest, en de toetsen
- de conclusieschema's
- de voorbereiding op de toetsen en de toetsen zelf

In het docenten interview kwamen zaken aan de orde als:
- welke opdrachten in de SimQuest-simulaties de docenten als waardevol en minder waardevol zien
- het zicht van docenten op de problemen waar de leerlingen tegen aan liepen
- de problemen die docenten zelf ervaren hebben, bijvoorbeeld bij hun voorbereiding of het maken van een planning
- welke informatie de docenten gemist hebben

Overig

Een aantal gegevens zijn automatisch opgeslagen in SimQuest. De conclusieschema's zijn ingenomen. Tijdens de les zijn geluidsopnamen gemaakt doordat de docent een microfoon en recorder droeg gedurende alle contacturen. Deze opnamen bevatten voornamelijk uitspraken van de docent. De docenten is gevraagd een logboek bij te houden waarin ze na iedere les kort aangeven wat opviel en waar volgens hen de les anders ging dan gewend. Alleen de docent van de N-klas heeft dit gedaan.

4.2.3 Resultaten: werkwijze leerlingen

De activiteiten

Abstraheren

Leerlingen abstraheren in verschillende episodes. Uit de conclusieschema's zijn een aantal mooie voorbeelden af te leiden hoe leerlingen tot de wiskundige kern of een wiskundige formule komen. We kunnen dit illustreren aan de hand van de teksten van drie leerlingen over de opdracht om de formule voor het berekenen van 'a' te geven wanneer twee punten op een lineaire lijn gegeven zijn (zie tabel 4.1). Bij de eerste deelopdracht staat nog vaak 'proberen' en wordt in algemene termen beschreven wat je moet doen om iets (lijn schuin naar rechts of het spiegelen van de grafiek) voor elkaar te krijgen. Daarna verschijnen er opmerkingen als 'a kanteling grafieklijn' en 'a richting'. Tot slot volgt dan de formule als daar naar gevraagd wordt.

Tabel 4.1 *Voorbeelden van hoe leerlingen langzaam de wiskundige kern 'abstraheren'*

Opdracht in tabblad basismodel in Zwitserleven	Leerling 40	Leerling 43	Leerling 48
04 lijn over route	de min weghalen om de grafiek te spiegelen. Daarna proberen.	gewoon proberen	a positief, de b negatief om de lijn schuin naar rechts te krijgen
05 lijn op eigen route	a kanteling grafieklijn, b verplaatsing lijn (zelfde hoek)	gebruik het assenstelsel	De leerlinge heeft haar antwoord op de simulatieopdracht opgeschreven.
06 t/m 09 abstract (on)juist ..	x = richtingscoëfficiënt		afhankelijk v/d x-coördinaat en het a-getal is de een groter dan de ander
10 aflezen 'b'	a -> richting, hoger = steiler	a = richting voor 1x ga je a omhoog/omlaag	b aflezen door te kijken waar hij de y-as raakt
11 berekenen 'a'	De leerlinge heeft haar antwoorden op de simulatieopdracht en de bijbehorende deelopdrachten opgeschreven.	a = (y – b) / x Dit is gelijk aan het antwoord dat de leerling geeft op de opdracht	$(y_1 - y_2) : (x_1 - x_2)$

In de conclusieschema's zijn ook voorbeelden te vinden van leerlingen die op een algemene manier beschrijven hoe ze aan een oplossing komen. In figuur 4.15. spreekt een leerlinge over het verkrijgen van uitvoer 'n', een variabele in plaats van een getal. Haar conclusie is een abstractie van haar aanpak.

> Je krijgt n uitvoer als x n optelt of n afhaalt of y n optelt of y n afhaalt. Of stelling van Pythagoras (-> de leerling heeft dit laatste toegelicht met een tekening)
>
> Leerling 25, conclusieschema, opdracht 02 'vijf lengtes', tabblad basismodel, Zwitserleven, vooronderzoek 3, N-klas

Figuur 4.15 *Een voorbeeld van conclusie waarin de aanpak geabstraheerd is*

Structureren

SimQuest-simulaties dagen leerlingen uit om te structureren en te bewijzen, maar dit komt niet altijd voldoende uit de verf. Soms denken leerlingen minder na dan verwacht. We geven twee voorbeelden waarin dit probleem is geconstateerd.

Het eerste voorbeeld gaat over een opdracht waarin het met opzet om het kiezen van *vijf* lengtes gaat (zie figuur 3.13). De opdracht heeft vier eenvoudige oplossingen. De vijfde is ingewikkelder, daar komt de stelling van Pythagoras bij kijken. De vraag om vijf oplossingen te geven betekent echter niet automatisch dat leerlingen de stelling van Pythagoras activeren. We illustreren dit aan de hand van figuur 4.16.

De opdracht luidde:
Stel het startpunt heeft de positie (50,75). Bij welke (x,y)-waarden van het eindpunt is de lengte van de route 10? Schrijf hieronder minimaal 5 mogelijke (x,y)-waarden van het eindpunt op.

Het antwoord dat de leerlinge geeft:
(40.75) startpunt (50.75) eindpunt
(60.75) startpunt (50.75) eindpunt
(50.85) startpunt (50.75) eindpunt
(50.65) startpunt (50.75) eindpunt
(45.70) startpunt (45.80) eindpunt

De leerlinge voert vier SimQuest-berekeningen uit om haar laatste antwoord te vinden. De andere antwoorden heeft ze beredeneerd, zonder ze te controleren met het programma.

Leerling 54, opdracht 02 vijf lengtes, tabblad 'basismodel', Zwitserleven, vooronderzoek 3, M-klas

Figuur 4.16 *Voorbeeld van hoe een leerlinge niet tegen een probleem aanloopt*

De leerlinge kiest bij de laatste oplossing een ander eindpunt en omzeilt zo het probleem dat de voor de handliggende oplossingen 'op' zijn. Om te voorkomen dat leerlingen in deze opdracht het eindpunt verschuiven kunnen de vrijheden worden beperkt (door het punt (50,75) vast te leggen). Echter, het is interessanter om met deze leerlingen in gesprek te gaan. Er valt leerwinst te behalen voor de zes leerlingen die hier de mist in gingen. Waarom zou er in de opdracht om vijf oplossingen gevraagd worden en niet om vier?

Het tweede voorbeeld is de opdracht uit Het Zwitserleven '05 lijn op eigen route'. Deze opdracht bespraken we ook in het tweede vooronderzoek (paragraaf 3.5.2, figuur 3.23). In deze opdracht moeten leerlingen de parameters van een lijn zo kiezen dat hij samenvalt met een andere. De leerlingen moeten dit voor minimaal drie verschillende lijnen doen. Voor een goed leerresultaat is het van belang dat leerlingen meerdere verschillende situaties uitproberen, zoals: (a) een positieve en een negatieve richtingscoëfficiënt, (b) een positief en een negatief snijpunt van de grafiek met de y-as , en (c) bijzondere gevallen zoals wanneer a en b gelijk aan 0 zijn.

Uit de loggegevens is af te lezen dat van alle leerlingen die in hun antwoord drie verschillende situaties geven (zie tabel 4.2) 50% van M-klas en 31% van de N-klas leerlingen slechts binnen één situatie (a en b gelijk) heeft gekeken. Een bijna even grote groep heeft twee situaties bekeken. In de M-klas heeft 33 % van de leerlingen a of b gewisseld (positief en negatief), in de N-klas geldt dit voor 46 % van de leerlingen. Er is slechts één leerling die alle drie de typen situaties heeft bekeken.

Tabel 4.2 *Voorbeeld van aantal verschillende situaties die leerlingen bij een opdracht bekijken*

Klas	aantal	a en b gelijk[1]	a gewisseld, b gelijk[1]	b gewisseld, a gelijk[1]	a en b gewisseld[1]	a en b gewisseld en a 0 [1 en 2]	a en b gelijk en b 0 [1 en 2]	a gewisseld, a 0 [1 en 2]
M	12	6	1	3	0	1	1	0
N	13	4	4	2	2	0	0	1

[1] gelijk betekent dat in alle drie de situaties de variabele (a of b) ofwel negatief, ofwel positief is geweest, gewisseld betekent dat de variabele zowel een keer positief als een keer negatief is gekozen
[2] 0 betekent dat de variabele minimaal 1 keer gelijk aan 0 is geweest

Wat kunnen we nu van deze uitkomst zeggen? Ten eerste valt op dat veel leerlingen voor de drie lijnen varianten binnen dezelfde situatie kiezen. Dit kan aanleiding zijn om de vraagstelling aan te passen. Ten tweede kunnen we concluderen dat de leerlingen elkaar aan kunnen vullen. Er is geen enkele leerling die iedere categorie en alle bijzondere gevallen heeft bekeken. De leerlingen kunnen allemaal een bijdrage leveren aan een eventueel gezamenlijke conclusie.

Evalueren

Uit de loggegevens blijkt dat leerlingen nogal eens onjuiste antwoorden geven. Bij een opdracht, die in zowel het tweede als derde vooronderzoek (in iets gewijzigde vorm) is gebruikt, blijkt beide keren dat veel leerlingen deze opdracht fout beantwoordden. De nieuwe situatie met een aanwezige docent heeft hierin dus geen verbetering gebracht. Eén van de twee leerlingen met het juiste antwoord laat in haar verklaring zien dat ze 'extreme' routes heeft uitgeprobeerd (zie figuur 4.17). Zij ontdekt daardoor dat voor afwijkende situaties niet hetzelfde geldt als voor 'gewone' situaties zodat het antwoord op de opdracht 'onwaar' moet zijn. Helaas voorziet de opzet van de lessen niet in dit soort leermomenten. Dat wil zeggen wanneer snel duidelijk is wat het antwoord is, en wie dit heeft gegeven, kan deze leerling een docentrol vervullen en medeleerlingen laten zien welke situaties zij heeft uitgeprobeerd.

Nee Edwin heeft geen gelijk, ik heb extreme routes uitgeprobeert en heb al aangetoond dat bij een langere route in de bergen de reistijd helemaal niet langer wordt. Zodra je dit een keer aan kunt tonen kun je het tegendeel dus al bewijzen.

Leerling 22, opdracht 07 binnen kortst, tabblad 'knikpunt', Zwitserleven, vooronderzoek 3, N-klas

Figuur 4.17 *Voorbeeld van leerlinge die meerdere situaties en 'extreme' situaties probeert voor het beantwoorden van een opdracht*

Interpreteren

Ook in het derde vooronderzoek zien we dat leerlingen resultaten niet altijd juist interpreteren. Een voorbeeld van een gebrekkige interpretatie is te zien in figuur 4.18. Leerling 63 in dit voorbeeld had op basis van de pogingen 11, 12 en 13 kunnen concluderen dat hij een getal kleiner dan 66 en groter dan 65 moest kiezen. De leerling kiest echter bij poging 14 een getal kleiner dan 65. Hij lijkt de uitkomst daarvoor juist te interpreteren door in poging 15 een groter getal te kiezen voor y om dan weer uit te komen op dezelfde getallen als in poging 13. In poging 17 verlaagt de leerling opnieuw de waarde voor y, om deze daarna weer te verhogen. Bij poging 19 lijkt de leerling zijn strategie te hebben gewijzigd en nu de x waarden gaat veranderen. In poging 24 is de leerling weer terug bij de x-waarde van pogingen 11 t/m 18. Het is niet bekend wat de leerling allemaal gedacht heeft. Maar de data geven duidelijk aan dat de leerling met veel minder dan 28 pogingen toe had gekund als hij zijn resultaten beter had geïnterpreteerd.

In de opdracht 'lengte en richting' wordt de leerlingen gevraagd de eindpunten van een lijnstuk dusdanig te kiezen dat de lengte de waarde 10 krijgt en de richting gelijk wordt aan de richting van een onderliggende lijn (3,26).

In de onderstaande tabel staan de waarden voor de x- en y-coördinaat die de leerling probeert en de bijbehorende resultaten voor de lengte en de richtingscoëfficiënt.

N	X	Y	afstand	richting
1	43.5259	30.6763	44.7941	6.84627
2	30.7241	13.3266	64.6156	3.19952
3	34.4483	25.1445	52.2247	3.20579
4	44.9224	59.5925	16.2226	3.03442
5	46.319	63.1127	12.4442	3.22933
6	46.7845	63.867	11.588	3.46226
7	46.7845	64.1185	11.3467	3.38406
8	46.7845	65	10.5043	3.10992
9	48	65	10.198	5
10	49	66	9.05538	9
11	47	67	8.54401	2.66667
12	47	66	9.48683	3
13	47	65	10.4403	3.33333
14	47	64.5	10.9202	3.5
15	47	64.75	10.68	3.41667
16	47	65	10.4403	3.33333
17	47	64.9	10.5361	3.36667
18	47	64.95	10.4882	3.35
19	47.75	64.95	10.2988	4.46667
20	47.95	64.95	10.257	4.90244
21	48.55	64.95	10.1541	6.93103
22	48	65	10.198	5
23	46	65	10.7703	2.5
24	47	65.95	9.53427	3.01667
25	47	66.55	8.96673	2.81667
26	48	66.55	8.68346	4.225
27	47.5	66.55	8.81205	3.38
28	47	65.46	10.0006	3.18

N	X	Y	afstand	richting
1	46	61	14.5602	3.5
2	47	61	14.5602	4.66667
3	45	60	15.8114	3
4	46	62	13.6015	3.25
5	47	64	11.4018	3.66667
6	47	66	9.48683	3
7	47	66	9.48683	3
8	48	66	9.21955	4.5
9	47	67	8.54401	2.66667
10	47	66	9.48683	3
11	47.5	66	9.34076	3.6
12	47	66	9.48683	3
13	47	67	8.54401	2.66667
14	47	66	9.48683	3
15	47	65	10.4403	3.33333
16	47	65.4	10.0578	3.2

Leerling 63 (links) en Leerling 46 (rechts), opdracht 03 lengte en richting, tabblad 'basismodel', Zwitserleven, vooronderzoek 3, M-klas

Figuur 4.18 *Voorbeeld van gebrekkige interpretatie*

Een verklaring kan zijn dat de leerling de invoer en resultaten van voorgaande pogingen is vergeten. Dat geldt bijvoorbeeld ook voor leerling 46 die meerdere keren de invoerwaarden (47,66) en (47,67) gebruikt. Vergelijkbare pogingen zien we ook bij andere leerlingen. Het lijkt er dus op dat leerlingen niet adequaat interpreteren doordat ze niet (zorgvuldig) noteren wat ze proberen en wat daarvan de resultaten zijn. Ook observaties in de klas waaruit blijkt dat veel leerlingen nauwelijks aantekeningen maken, ondersteunen dit. Dit stemt grotendeels overeen met het gedrag dat we in het tweede vooronderzoek al zagen.

Bewijzen/beredeneren/aantonen

Het conclusieschema is onder andere bedoeld om de leerlingen hun antwoord beter te laten beredeneren. Het is interessant om te zien wat leerlingen in het conclusieschema opschrijven. Een flink aantal leerlingen schrijft dat ze tot hun antwoord komen door te ‘proberen’. In tabel 4.3 is van de leerlingen uit de N-klas geturfd hoeveel leerlingen noteerden dat ze ‘geprobeerd’ hadden.

Tabel 4.3 *Voorbeeld van aantal keer dat leerlingen uit de N-klas opschrijven in conclusieschema dat ze ‘proberen’ en aantal keer dat ze niets opschrijven*

Opdracht in tabblad basismodel in Zwitserleven	aantal leerlingen ‘proberen’	aantal leerlingen niets
01 eigen beschrijving punt	0	3
02 vijf lengtes	4	2
03 lengte en richting	8	4
04 lijn over route	4	3
05 lijn op eigen route	5	2
06 t/m 09 abstract (on)juist ..	0	5

Slechts incidenteel komt uit de tekst naar voren dat leerlingen zelf inzien dat ‘proberen’ niet heel leerzaam is. In het voorbeeld in figuur 4.19 vraagt de leerlinge zich af ‘of er een manier voor is’ waarmee ze doelt op een andere manier van bewijsvoering.

> gewoon proberen, maar is er een manier voor? Klopt het trouwens dat het niet precies 10 hoeft te zijn?
>
> Leerling 40, conclusieschema, opdracht 03 ‘lengte en richting’, tabblad basismodel, Zwitserleven, vooronderzoek 3, N-klas

Figuur 4.19 *Voorbeeld van leerlinge die zich afvraagt of er ook een ‘beredeneerde’ manier bestaat*

Een ander voorbeeld van bewustwording komt uit de logbestanden. Ook dit voorbeeld (zie figuur 4.20) toont dat de leerling zich bewust wordt dat hij geen onderbouwing heeft.

ik snap de vraag wel, maar ik heb geen onderbouwing om een antwoord te geven. maar volgens mij heeft ie gelijk.

Leerling 44, opdracht 07 binnen kortst, tabblad 'knikpunt', Zwitserleven, vooronderzoek 3, M-klas

Figuur 4.20 *Voorbeeld van leerling die aangeeft geen onderbouwing van zijn antwoord te hebben*

Een aantal leerlingen beschrijft een beredenering in het conclusieschema. Bij de opdracht 'vind 5 lengtes van 10' (zie figuur 3.13) schrijven bijvoorbeeld drie leerlingen dat de stelling van Pythagoras gebruikt moet worden (zie figuur 4.21).

laat x hetzelfde en verander y met 10, laat y hetzelfde en verander x met 10, gebruik de stelling van pythagoras

Leerling 43, conclusieschema, opdracht 02 'vijf lengtes', tabblad basismodel, Zwitserleven, vooronderzoek 3, N-klas

Figuur 4.21 *Voorbeeld van leerling die de redenatie voor het verkrijgen van oplossingen beschrijft in het conclusieschema*

Net als in het tweede vooronderzoek gebruiken leerlingen soms een groot aantal pogingen om tot een antwoord te komen. Voor het vinden van 5 lengtes van 10 voert leerling 64 maar liefst 82 keer een SimQuest-berekening uit en leerling 59 verbruikt er 59. We concluderen daarom dat in een klassensituatie, net als in het tweede vooronderzoek, het 'alleen proberen met het programma' (zie dit deel paragraaf 3.4) regelmatig voorkomt.

Materiaal: het conclusieschema

De conclusieschema's lijken deels aan de verwachtingen te voldoen. We zagen al dat leerlingen daarin pogingen ondernemen om hun aanpak te abstraheren. We zagen ook dat leerlingen zich afvroegen of 'er een manier voor is'. In dit gedeelte beschrijven we het gebruik van de conclusieschema's in meer detail.

Inzet van de conclusieschema's

In de N-klas bestond in het begin van de lessenserie onduidelijkheid over wat er nu precies op het conclusieschema ingevuld moest worden. De docent werd daardoor overspoeld met vragen over de bedoeling van de schema's en hij besloot daar tijdens de eerste klassikale les aandacht aan te besteden (zie figuur 4.22). Ook in de M-klas is er vanaf het begin onduidelijkheid over wat de bedoeling van de schema's was. De docent van deze klas heeft hier geen expliciete klassikale aandacht aan geschonken en mede daardoor is de onduidelijkheid tot vrijwel het einde gebleven.

“Ja, dat betekent dus dat je inderdaad toch wel wat geleerd hebt in zo’n situatie. Nou dat is ook een beetje met dat programma wat je doet. Dingen ga je uitvogelen, ga je proberen, je gaat, je doet wat. Maar op een gegeven moment, dat zul je zelf ook wel tenminste dat neem ik aan wel bedenken, dat er een zekere logica, een zekere volgorde zit in je keuze mogelijkheden. Nou en eigenlijk moet je na afloop moet je opschrijven, en dat staat dus op dat blaadje dat Petra je heeft gegeven. Daar stond conclusie. Oké in de conclusie staat wat heb je nou van dat onderdeeltje geleerd. Want dat is altijd het lastigste natuurlijk, je hebt een vraag af die heb je gemaakt. Maar wat heb je daar nu van geleerd. Nou, het is de bedoeling dat je dat bij die conclusie opschrijft.”

docent N-klas, vooronderzoek 3, 4^{e} contactuur; 1ste klassikale les, N-klas

Figuur 4.22 *Aandacht van de docent voor noteren conclusies in schema*

Een vraag van een leerling over het conclusieschema staat in figuur 4.23. De leerling heeft een kloppend antwoord, maar weet niet wat hij daarover op moet schrijven. De docent helpt de leerling op weg en spoort hem tevens aan om een bepaald aspect verder uit te zoeken. De leerling heeft een antwoord gevonden voor één specifieke situatie, maar beseft dat dit niet voldoende is om een conclusie op te schrijven. Het moeten invullen van het conclusieschema zorgt ervoor dat de leerling, ook na het vinden van één specifiek antwoord, dieper in de stof duikt (mede door aansporing van de docent).

Leerling: We hebben wel iets maar. Kijk we hebben als je voor x ehm als je voor a die invult en voor b die en je vult voor x 0 in dan krijg je er -84 uit. En dat krijg je hier ook uit?

Docent: Ja dat klopt toch?

Leerling: Ja maar hoe moet je dan is dat dan de conclusie. Als je voor x 0 neemt, dan euh…

Docent: Ja, dus die b heeft iets te maken want als je voor x 0 neemt, dan krijg je een punt dat ligt op de

Leerling: x-as

Docent: Nee. (als je voor) x 0 neemt dan krijg je een punt dat ligt op de?

Leerling: (…)

Docent: Nee, als je x 0 neemt dan krijg je een punt dat ligt op de?
als x 0 is, kijk is hier. Dan is die tweede coördinaat dan moet je naar boven of naar beneden.

Leerling: naar boven

Docent: Oké maar waar kom je dan terecht?

Leerling: (…)

Docent: Hoe heet dat ding?

Leerling: ja y-as

Docent: Oké dus als je x 0 neemt, dan krijg je altijd een punt dat op de y-as ligt. Dus nou moet je een conclusie trekken die b heeft iets te maken met de y-as en die lijn. Nou, daar moet je eens over nadenken.

Leerling: heeft iets te maken met de y-as?

Docent: Probeer maar eens een aantal dingen. Probeer maar een aantal dingen uit dan.

geluidsopname, N-klas, vooronderzoek 3

Figuur 4.23 *Voorbeeld vraag van leerling over wat hij in conclusieschema moet invullen*

Impliciete aandacht voor structurering

Het conclusieschema structureert het trekken van conclusies door de vormgeving. Eén type ondersteuning komt van de ordening op onderwerp. Deze ordening is niet gelijk aan de volgorde van de opdrachten. De ordening is thematisch zodat leerlingen het schema niet simpelweg van boven naar beneden kunnen invullen. Ze moeten eerst nadenken over het (sub)thema dat past bij hun conclusie. Dit liep niet vlekkeloos. Het kwam regelmatig voor dat leerlingen hun conclusies op een verkeerde plek opschreven.

Een ander type ondersteuning wordt geboden door de aanwezigheid van een vak voor een algemene conclusie. Het conclusieschema bevatte één vak voor het invullen van een conclusie over opdrachten die varianten van elkaar waren. Leerlingen hadden het karakter van dit vak vaak niet door en vulden dit met hun conclusie over een volgende opdracht. Ze kwamen er vaak pas later achter dat ze vervolgens een invulvak te kort kwamen. In dit vak voor algemene conclusies herhaalden de leerlingen soms ook de aparte conclusies van elke opdracht; de overkoepelende conclusie ontbrak.

Uit deze resultaten concluderen we dat leerlingen door het conclusieschema wel aangezet worden om over de kern van één opdracht na te denken, maar niet of nauwelijks over verbanden tussen opdrachten.

Nadeel structuur en invulmomenten bepaald door ontwerper van conclusieschema: gebrek aan eigenaarschap

Door de vormgeving schreef het conclusieschema min of meer voor wanneer leerlingen iets zouden moeten concluderen. Een aantal episodes toont dat er leerlingen zijn die dit ook echt als ‘dwang’ ervaren. In het voorbeeld uit figuur 4.24 komt naar voren dat de dwang ook positieve gevolgen kan hebben. De leerling heeft namelijk een ‘eigen’ uitvinding gedaan.

Vraag: Wat heb je over deze opdracht opgeschreven in het conclusie schema?

Antwoord: De leerling heeft geprobeerd om iets nieuws te verzinnen. Ze had bij andere opdrachten al opgeschreven wat ze hierover kon concluderen.

Daadwerkelijk opgeschreven: als y hetzelfde getal is als x is de formule: y = x

Leerling 29, vooronderzoek 3, interview, N-klas

Figuur 4.24 *Voorbeeld nadeel verplichte invulmomenten en voorbeeld trekken ‘eigen’ conclusie*

Samenvatting en conclusie

Conclusieschema’s lijken de beoogde doelen in enige mate te bewerkstelligen. Om goed te werken moet aan een aantal voorwaarden zijn voldaan. De rol van de docent is van belang. In zijn huidige vorm maakt het conclusieschema leerlingen er meer van bewust dat ze moeten nadenken wat ze van een opdracht kunnen leren, maar het gebrek aan eigenaarschap is nadelig. Het conclusieschema moet aangepast worden zodat de leerlingen meer invloed krijgen op: (1) het moment van trekken van conclusies, (2) de structuur in het overzicht en (3) de vormgeving van het overzicht.

Materiaal: de deelopdrachten

In het tweede vooronderzoek werkten we met deelopdrachten om het abstraheren te ondersteunen, maar deze opdrachten werden niet gebruikt. Hoe was dit in het derde vooronderzoek? In het derde vooronderzoek is vaak expliciet naar de deelopdrachten verwezen, maar daarna werden ze wel bekeken. Sommigen keken zelfs nog alleen maar naar deelopdrachten. Dit is terug te zien in de logbestanden waar leerlingen alleen nog tijd besteden voor het doorlezen van de opdracht en dan veel tijd besteden aan de controle (uitgewerkte voorbeeld) opdrachten. Ook uit de conclusieschema's blijkt hoe sommige leerlingen over de deelopdrachten en hun belang denken (zie figuur 4.25).

De grijze tekst is door de leerling in het schema ingevuld.

onderwerp	welke plaats	welke conclusie
verband lengte – breedte	Niveau basisdeel	b (zonder artiestenruimte) = – l + 0,5 h
	opdracht 02	goed kijken naar de deelopdracht
	opdracht 03	kijk opdr 2
verband lengte - oppervlakte	Niveau basisdeel	O (zonder artiestenruimte) = – l² + 0,5 h l
	opdracht 04	dit moet je weten
	opdracht 05	deelopdrachten!

Leerling 47, vooronderzoek 3, conclusieschema, M-klas

Figuur 4.25 *Voorbeeld informatie uit de conclusieschema's over het belang van de deelopdrachten*

Ook de docent maakt in zijn logboek opmerkingen over het belang van de deelopdrachten, zoals geïllustreerd is in figuur 4.26.

Deelopdrachten waren heel hard nodig. Bijna iedereen kon de opgaven zonder deze opdrachten niet beantwoorden.

docent N-klas, vooronderzoek 3, logboek, dag 1

> En om dan ook nog eens de formule hiervoor op te schrijven, was iets teveel van het goede. Deelopdrachten waren hierbij heel hard nodig.
>
> docent N-klas, vooronderzoek 3, logboek, dag 2

> Bijna altijd zijn de deelopdrachten noodzakelijk om de originele vraag te kunnen begrijpen.
>
> docent N-klas, vooronderzoek 3, logboek, dag 4

Figuur 4.26 *Voorbeelden opmerkingen docent over belang deelopdrachten in zijn logboek*

In het derde vooronderzoek werden de deelopdrachten dus regelmatig gebruikt en waren ze belangrijk, maar er moet nog wel het een en ander verbeterd worden. De stapgrootte is bijvoorbeeld voor een deel van de leerlingen nog te groot, zo blijkt uit een antwoord van een leerling (zie figuur 4.27) en uit opmerkingen in de conclusieschema's.

> ik snap het niet en met de uitleg nog niet, dus ik kan deze opgave nog steeds niet maken! de formule = (y2-y1)/(x2-x1) de formule heb ik gekregen ma weet niet waarom dit het antwoord is
>
> Leerling 64, vooronderzoek 3, open antwoord, M-klas

Figuur 4.27 *Voorbeeld van gebrek aan begrip bij leerling door tonen stappen zonder uitleg waarom*

4.2.4 Resultaten: implementatie

In de volgende paragrafen bespreken we de gevolgen van het werken met nieuwe leerstof in een nieuwe werkvorm, het gebruik van meerdere leerbronnen en de aanwezigheid van meerdere sessies.

Nieuwe leerstof & werkvorm

Wat voor gevolg heeft het feit dat de leerstof en werkwijze nieuw is voor de leerlingen? Twee zaken zijn van belang. In de eerste plaats is dat de moeilijkheidsgraad van het materiaal. Deze lijkt (te?) hoog te zijn. Deelopdrachten zijn noodzakelijk, maar ook deze bieden niet altijd soelaas. Sommige leerlingen begrijpen ook dan de stof nog niet. In de tweede plaats valt op dat de leerlingen een andere verwachting hebben van de introductie van nieuwe leerstof dan nu geboden in de SimQuest-simulaties. Het werken met simulaties strookt niet met de opvattingen over het doen van wiskunde van de leerlingen. In de eerste klassikale les van de N-klas gaat de docent op dit verschil in verwachtingen in (zie figuur 4.28). Hij geeft vervolgens op bord een demonstratie van dezelfde aanpak zonder SimQuest-simulaties. Maar na afloop blijkt tijdens een interview dat een leerling (een erg sterke wiskundeleerling) nog steeds het gevoel heeft dat hij niet met wiskunde bezig is. Hij gebruikt de term 'prutsen' om zijn werkwijze te typeren.

> Ehm misschien moet ik eventjes nog iets zeggen over de afgelopen drie lesuren. Je hebt dan voor het eerst kennis gemaakt met een ehm laten we zeggen een andere manier eh van wiskunde bedrijven en voor sommigen was dat een zeer grote verassing. Een aantal van jullie zei zelfs van: "ja is dit nu wel wiskunde?". Enne ja, ik kan niet anders dan volmondig beamen dat dat inderdaad wiskunde is. Wiskunde is ook een beetje puzzelen. Wiskunde is ook proberen ergens iets te vinden op een zodanige manier dat je kunt terug grijpen op eerdere dingen.
>
> docent N-klas, vooronderzoek 3, 4^{e} contactuur; 1ste klassikale les, N-klas

Figuur 4.28 *Aandacht van de docent voor onverwachte manier van bedrijven wiskunde*

De docent van de N-klas is in het interview positief over het feit dat leerlingen geconfronteerd worden met een andere vorm van wiskunde dan ze gewend zijn. Hij geeft wel aan dat het nodig is de volgende keer de leerlingen vooraf beter te informeren en voor te bereiden op deze andere manier van werken.

Werken met meerdere bronnen

Wat voor gevolg heeft het dat het materiaal wordt gebruikt in een klassensituatie naast andere leerbronnen? Een van de opvallende zaken is dat leerlingen veel vragen stellen aan de docent. Vaak gebeurt dit nog voordat ze de (deel)opdrachten hebben bekeken, zo blijkt uit de interviews en geluidsopnamen. De leerlingen staken vrij snel hun pogingen om te werken met de simulaties en vragen de docent om hulp. In beide klassen werden de docenten overvraagd. De docent van de N-klas was blij dat hij assistentie had van een stagiair. Hij dacht dat hij het anders niet had aangekund. In de M-klas springt de onderzoekster na verloop van tijd bij.

Leerlingen hebben meteen al vragen over het begin van een opdracht. De docent van de N-klas zegt in het interview dat de vragen tijdens het werken met het programma vooral aan het begin kwamen. Meestal is dat achteraf als leerlingen in het antwoordenboekje zien dat hun antwoord afwijkt en daarna naar de docent stappen. Ook de docent van de M-klas geeft in het interview aan dat leerlingen vaak niet eens konden opstarten omdat ze niet begrepen wat ze moesten doen.

De leerlingen hebben nu ook te maken met het leerboek. De vraag is welke overeenkomsten en verschillen de leerlingen zien tussen boek en SimQuest-simulaties. De koppeling tussen beide zaken lijkt enigszins tegen te vallen. De M-docent zegt bijvoorbeeld tijdens de klassikale les tegen de onderzoekster: "het lijkt wel of er niets gebeurd is in de SimQuest lessen". De geringe mate van overdracht van de ene naar de andere situatie is ook aanleiding voor de docent om in het interview op te merken dat hij hier de volgende keer meer aandacht aan zal besteden. De geïnterviewde leerlingen bleken achteraf wel in staat van een aantal opdrachten uit de SimQuest-simulaties aan te geven bij welk deel van het boek ze horen.

Meerdere sessies

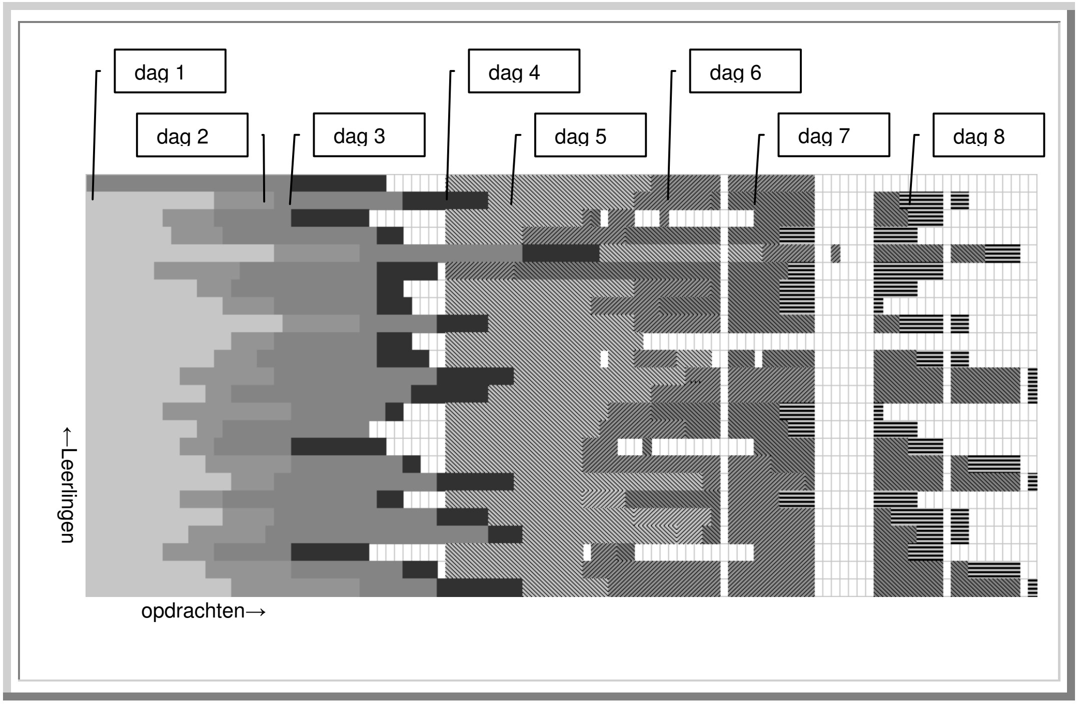
Wat valt op als we kijken naar het gebruik van het materiaal over meerdere sessies? We kijken naar: (1) aantal contacturen, (2) tempoverschillen, en (3) het totaal overzicht van de leerlingen.

Totaal aantal besteedde contacturen

In beide klassen zijn veel meer contacturen aan hoofdstuk 1 besteed dan de 9 contacturen die ervoor staan. In de N-klas zijn uiteindelijk 17 contacturen aan het hoofdstuk besteed, waarvan 12 met SimQuest-simulaties. De M-klas besteedde ook 17 contacturen waarvan 10 met SimQuest-simulaties.

Tempoverschillen

In de eerdere vooronderzoeken vonden we grote verschillen in het aantal gemaakte opdrachten. Hoe is dit in een reële klassensituatie? Zijn de verschillen vergelijkbaar of worden ze te niet gedaan bijvoorbeeld doordat leerlingen gaan samenwerken of de aanwezigheid van de docent? Om deze vragen te beantwoorden kijken we naar het verloop van de gemaakte opdrachten.



Figuur 4.29 *De gemaakte opdrachten in de verschillende lessen (N-klas)*

In figuur 4.29 is te zien welke opdrachten de leerlingen uit de N-klas in de lessen gemaakt hebben. Elke rij geeft een andere leerling weer. De kolommen zijn de verschillende opdrachten. Elke contactdag heeft een eigen grijstint of schakering. In totaal zijn er 8 kleurtinten. Het eerste blok is een blokuur (dubbel contactuur na elkaar op één dag). Het tweede is een enkel lesuur op de volgende dag. Het derde is weer een blokuur, het vierde een enkel uur enz. Opdrachten die leerlingen niet gemaakt hebben zijn wit gelaten. Op dag 5 is iedereen die daar nog niet mee begonnen was met de applicatie Tsunami gestart.

Het tempoverschil tussen de leerlingen is groot. Op dag 4 (de zwarte blokjes), beginnen de leerlingen op totaal verschillende plaatsen in het programma. Net als in het tweede vooronderzoek is het aantal gemaakte opdrachten per uur sterk uiteenlopend. Aan het einde van de lessenserie geeft de docent aan dat de leerlingen in ieder geval tot een bepaalde opdracht moeten komen, of anders in hun eigen tijd de opdrachten af moeten maken. Voor een aantal leerlingen is dat aanleiding om in het laatste uur veel meer opdrachten te maken dan gebruikelijk. Zes van de 23 leerlingen in die les lukt het niet om de opdrachten af te ronden. De docent schrijft hierover het volgende in zijn logboek (figuur 4.30):

Ook me voorgenomen na de herfstvakantie nog 3 lessen te besteden aan dit computerwerk. Iedereen moet dan klaar zijn (hoop ik). docent N-klas, vooronderzoek 3, logboek, dag 8
Bijzonder hard gewerkt door de leerlingen. Ik had ook aangegeven dat alleen nog deze maandag en morgen dinsdag aan de computer gewerkt kon worden. docent N-klas, vooronderzoek 3, logboek, dag 10
Wederom bijzonder hard gewerkt. …. Toch is bijna iedereen met de stof klaar gekomen. Degenen die ver genoeg zijn gekomen, moeten dit verder afmaken in de mediatheek. docent N-klas, vooronderzoek 3, logboek, dag 11

Figuur 4.30 *Voorbeelden opmerkingen docent over het tempo in zijn logboek*

In het interview met de docent geeft hij aan dat hij een volgende keer van tevoren een tijdpad zal bedenken en de leerlingen aangeven hoeveel ze per les minimaal af moeten hebben. De docent zou de lessen strakker plannen en de leerlingen hun werk eventueel thuis laten afmaken. De docent vond het niveau van de opdrachten zo dat leerlingen daar best sneller doorheen konden.

Het tempo van de leerlingen in de M-klas is lager, maar ook hier is een grote spreiding. Een aantal leerlingen slaat opdrachten over, en/of maakt aan het einde van de lessenserie helemaal geen opdrachten meer.

Het verloop van de inzet van leerlingen over de lessenserie

In het eerste vooronderzoek concludeerden we dat het met de algemene motivatie als beginvoorwaarde wel in orde leek. Voor een deel van de leerlingen rezen twijfels over hun betrokkenheid en doorzettingsvermogen. Hoe is dat in het derde vooronderzoek?

<u>De inzet in de N-klas</u>

In het begin zijn de leerlingen in de N-klas enthousiast. Dit lijkt door het nieuwe te komen. Ze vinden het autootje grappig en leuk om te laten rijden. Wanneer het nieuwe eraf is en het toch om wiskunde blijkt te gaan zakt het enthousiasme. Dat enthousiasme lijkt helemaal te verdwijnen als de opdrachten als moeilijk worden ervaren. De leerlingen vroegen toen of ze niet ‘gewoon uit het boek’ kunnen leren. De manier waarop de docent omging met de onzekerheid (“wat moeten we doen?”) droeg ertoe bij dat leerlingen met voldoende vertrouwen met de opdrachten doorgingen. Ondanks hun onzekerheden probeerden de leerlingen toch dingen uit en hun enthousiasme leek daarna weer toe te nemen. Ze probeerden vaker om diep in een opdracht te duiken en leken meer bereid om door te zetten. Ze gaan in de loop van de tijd ook steeds vaker op papier berekeningen uitvoeren en situaties schetsen. Kortom, het leek erop of de leerlingen een hobbel moesten overwinnen.

<u>De inzet in de M-klas</u>

Het animo in de M-klas was bij aanvang gelijk aan die in de N-klas. Misschien zelfs wel eerder dan in de N-klas zakt het enthousiasme. Maar in de M-klas lijkt het tij niet te keren. Veel leerlingen waren, vooral richting het einde van de lessenserie, druk met chatten en beluisteren van muziek. De balorigheid van een aantal leerlingen is te zien in de antwoorden. Een voorbeeld staat in figuur 4.31.

> De vraag in de opdracht luidde om een aantal verschillen tussen twee grafieken te verklaren. Leerling 51 geeft een antwoord waardoor het overkomt alsof zij geen interesse heeft om over deze zaken na te denken. In de logbestanden staat haar antwoord dat slechts luidt: 'dat gebeurd gewoon'
>
> Leerling 51, opdracht 06 verschil grafieken meters hek oppervlakte (vervolg opdracht), tabblad 'basismodel', benefiet, vooronderzoek 3, M-klas

Figuur 4.31 *Voorbeeld balorigheid leerlingen*

Een andere leerling beantwoordt alleen de eerste 10 open-antwoord opdrachten in de SimQuest-applicaties en daarna alleen nog maar meerkeuze- en optimalisatieopdrachten. Na een aantal lessen slaat deze leerling ook veel van deze opdrachten over. Bij een open-antwoord opdracht geeft hij zelfs een deel van de songtekst van een populair rap nummer (figuur 4.32). Met dit voorbeeld is gelogd wat voor veel meer leerlingen gold.

> nou check dit ik beschrijf nu mijn leven in zinnen ik heb 2 autos en wel zeven vriendinnen :$ ik loop zelfs liedjes over vrede te zinge ma togg kom ik die discotheken niet binnen ! Als je niet weet hoe het voelt om geweigerd te worden, Probeer dan doormiddel van deze rap wat wijzer te worden, Ik kan met duizenden woorden, Klagen over het belijd, Maar als er niemand luistert is het zonde van me tijd, '
>
> Leerling 46, opdracht 06 verschil grafieken meters hek oppervlakte (vervolg opdracht), tabblad 'basismodel', benefiet, vooronderzoek 3, M-klas

Figuur 4.32 *Voorbeeld afleiding onder andere door het luisteren naar muziek*

Kortom, bij veel leerlingen in de M-klas lijkt, vooral tegen het einde van de lessenserie, te weinig sprake van motivatie en betrokkenheid.

4.2.5 Resultaten: toetsing

In deze paragraaf bespreken we de voorbereiding en resultaten van de toetsen in beide klassen. In de N-klas hebben drie leerlingen geen klassikale lessen bijgewoond en ook niet met de SimQuest-applicaties gewerkt. Het was al snel duidelijk dat deze leerlingen de computertoets niet zonder extra ondersteuning konden maken. Ook de invulling en codering van de opdrachten in deze toets bleek moeilijker dan verwacht. Om deze redenen is afgezien van afname van een computertoets in het grootschalig onderzoek. We gaan in de volgende secties verder alleen in op de papieren toets.

Voorbereiding en resultaten van de papieren toetsen

Voorafgaand aan de toets was er in de N-klas enige onrust. De leerlingen hadden het gevoel niet goed voorbereid te zijn. Ze gaven aan alsnog het complete hoofdstuk in het boek door te willen werken. Velen hebben dat ook daadwerkelijk gedaan. Een vergelijkbare ervaring vermelden ook Joiner, Malone, & Haimes (2002). Na invoering van een innovatie met computers hadden de studenten in dat onderzoek ook het idee dat ze alsnog in hun eigen tijd de stof voor de toets moesten doorwerken.

Bijlage B.6 (toetsen in het derde vooronderzoek) beschrijft de toetsresultaten in detail. Hier vatten we de belangrijkste resultaten, geordend naar activiteit, kort samen.

Structureren

Een onderdeel van structureren is om de overeenkomsten en verschillen tussen opdrachten te zien. In de toetsuitwerkingen zien we voorbeelden waaruit blijkt dat sommige leerlingen de verschillen tussen opdrachten niet goed onderscheiden. Een aantal leerlingen schrijft bij een toetsopgave die lijkt op een opdracht in Het benefietconcert, het antwoord op dat gold voor de situatie van Het benefietconcert. Beide opdrachten hebben weliswaar dezelfde algemene aanpak en beide antwoorden hebben dezelfde vorm, maar het zijn varianten van elkaar waardoor de precieze getallen verschillen. Het is voor deze leerlingen wel duidelijk dat deze toetsvraag verwant is aan deze opdracht uit Het benefietconcert maar niet duidelijk waarin deze situatie verschilt en / of wat voor gevolgen deze verschillen hebben voor de oplossing. Zij hebben niet gezien dat er over één zijde een afzetting bij gekomen is en over een andere zijde één afscheiding minder en dat daardoor de precieze getallen (4 in plaats van 3 en 1 in plaats van 2) anders moeten zijn.

Evalueren

We zien in de resultaten dat onjuiste conclusies uit de SimQuest-opdrachten doorsijpelen naar de toets. Eén leerlinge heeft bijvoorbeeld enkele ideeën onvoldoende geëvalueerd tijdens het werken met SimQuest-simulaties. Zij heeft de foutieve conclusie getrokken dat de oppervlakte altijd maximaal is, als een object vierkant is. Deze foutieve conclusie gebruikt ze in de toets opnieuw om de oplossing te vinden. Zij beantwoordt een toetsvraag over deze stof op basis van de onjuiste conclusies uit de lessen. Het antwoord is dan ook verkeerd.

Evaluerende opmerkingen zoals ‘dit antwoord kan niet kloppen gezien de loop van de grafiek’ komen niet voor. Er zijn momenten genoeg waarop dit soort opmerkingen verwacht mogen worden, bijvoorbeeld als een leerling een negatieve uitkomst krijgt voor zijn berekening van de richtingscoëfficiënt terwijl de grafiek een stijgende lijn toont. Ofwel de leerlingen beschikken nog onvoldoende evaluerende vaardigheden, ofwel ze schrijven deze gedachten hier niet op.

Beredeneren/bewijzen/aantonen

Een opgave in de toets is om voor verschillende grafieken de formule op te stellen. Een deel van de leerlingen leest de waarde van het snijpunt van de grafiek met de y-as af, zonder een berekening uit te voeren. Dit gedrag zagen we ook al in het tweede vooronderzoek (3.4.1); leerlingen gebruiken de SimQuest-applicaties om dingen uit te proberen en geven dan hun antwoord door naar een resultaat op de grafiek te kijken. De werkwijze in het computerprogramma om globaal op zicht te werken en niet te preciseren en berekenen, werkt hier ongewenst door naar de beantwoording van de toets. Bij schuine grafieken is het aflezen van zowel de richtingscoëfficiënt als het snijpunt met de y-as niet voldoende nauwkeurig en is een berekening noodzakelijk.

Communiceren en presenteren

In de resultaten zagen we meerdere malen dat de leerlingen tekort schieten in hun wiskundige communicatie. Ze lijken onvoldoende te weten hoe ze op een wiskundig juiste wijze een formule opschrijven (bijvoorbeeld $p = ax + b$ in plaats van $p\colon y = ax + b$) of het domein en bereik noteren (bijvoorbeeld $D_f = (x_1,x_2)$ in plaats van $D_f = [x_1,x_2]$). Daarnaast hebben ze moeite met het precies formuleren van een antwoord. Een vraag uit de toets is bijvoorbeeld wat je over de maximale winst kunt zeggen indien de grafiek van de winst uitgezet tegen de prijs, een dalparabool is. Leerlingen geven antwoorden als “heeft geen einde”, “het is oneindig” (zonder te specificeren wat met ‘het’ bedoeld wordt) en “maximum wordt te groot”. Hieruit concluderen we dat er in de lessen meer aandacht nodig is voor de communicatie en presentatie.

4.3 Interpretatie van de resultaten

4.3.1 Werkwijze: Activiteiten en vormen van ondersteuning

In de reële klassensituatie zien we in het werken met SimQuest-simulaties vergelijkbare problemen optreden als in het tweede vooronderzoek. In deze sectie presenteren we kort enkele uitgangspunten voor verbetering van de ondersteuning.

Activiteiten

Voor veel activiteiten geldt dat een uitwisseling van ervaringen en ideeën gewenst is. Weinig precieze formuleringen, over het hoofd zien van toetsingsmogelijkheden en, bijvoorbeeld, onjuist getrokken conclusies kunnen tot belangrijke leermomenten getransformeerd worden als ze systematisch worden ingebracht in de lessen. We denken dan in het bijzonder aan de inbreng van de docent. In het gedachtegoed van het sociaal-constructivisme is de docent een belangrijke inbrenger van werkwijzen en overtuigingen uit het vakgebied (Lemke, 2001; Prawat, 1989; Vygotsky, 1978). In het volgende onderzoek is het gewenst te zoeken naar manieren om deze voorbeeldfunctie van de docent bij ervaren (of gemiste) problemen beter te benutten.

De docent speelt ook een belangrijke rol in de introductie van het materiaal. Om te voorkomen dat leerlingen te lang bezig blijven met onvruchtbare werkwijzen zoals ‘het proberen’ en om ze in te leiden in het werken met de SimQuest-applicaties is een goede voorbereiding van de leerlingen door de docent dringend gewenst.

Uit de toetsresultaten komt naar voren dat de notatie van de antwoorden nauwkeuriger moet. We zijn daarom nagegaan in hoeverre dit aspect van communicatie ook in het ontwikkelde materiaal zelf een plaats heeft gekregen. Dit blijkt verbeterd te kunnen worden; op meer plaatsen kan gebruik gemaakt worden van de notatie die ook van leerlingen verwacht wordt. Zo kan bijvoorbeeld in een opdracht over domein en bereik (‘Zorg ervoor dat het bereik [3] is voor een willekeurig domein’) de notitie van het bereik gebruikt worden (Zorg ervoor dat voor een willekeurig domein D_f geldt: B_f = [3]).

Conclusieschema

Het conclusieschema moet zo worden aangepast dat de leerlingen meer invloed krijgen op: (1) het moment van trekken van conclusies, (2) de structuur in het overzicht, en (3) de vormgeving van het overzicht. Bovendien zou een nieuw conclusieschema conclusies moeten bevatten over opdrachten uit zowel de SimQuest-applicaties als over opdrachten uit het boek.

Deelopdrachten

De deelopdrachten geven nog steeds onvoldoende ondersteuning bij het uitvoeren van kernactiviteiten. Er zal in de deelopdrachten meer expliciet aandacht besteed moeten worden aan deze activiteiten. We stellen daarbij voor een tweedeling te maken tussen aanpak (een stappenplan zonder concrete getallen) en uitwerking (een concreet getallenvoorbeeld van een oplossing waarbij de aanpak wordt uitgevoerd). In het huidige onderzoek moesten de leerlingen zelf een aanpak afleiden uit de terugkoppeling, die vooral een uitwerking bevatte met af en toe opmerkingen over de aanpak. Bij een aparte behandeling van aanpak en uitwerking kan meer aandacht geschonken worden aan het waarom. Ook de activiteiten zelf kunnen dan meer expliciet aan de orde komen.

Met de voorgestelde veranderingen krijgen de deelopdrachten steeds meer het karakter van uitgewerkte voorbeelden, die deels dienen als feedback. Het is lastig om bij complexe problemen specifieke feedback door het computerprogramma te laten genereren, omdat het uit de acties van leerlingen extreem moeilijk is om ze te herleiden naar bepaalde regels of procedurele stappen (Van Merriënboer, 1997). Dit dwingt ontwerpers tot de keuze tussen ofwel het inperken van de vrijheid van leerlingen zodat de herleiding makkelijker wordt ofwel het geven van algemene feedback los van de acties van leerlingen. Wij kiezen op dit moment voor het laatste.

Contexten
Naar aanleiding van de resultaten van dit vooronderzoek zijn er vraagtekens te zetten bij de contexten in Het Zwitserleven en Tsunami.

Het Zwitserleven In de N-klas werd veel meer tijd besteed aan de behandeling van Zwitserleven dan beschikbaar. In deze klas is dan ook een deel van de opdrachten geschrapt voordat de M-klas ermee ging werken. Met het schrappen van deze opdrachten viel in feite de context weg. De context bleek te omvattend. In het volgende onderzoek zal een andere context gekozen worden.

Tsunami De toetsresultaten laten zien dat de begrippen domein en bereik die bij Tsunami aan bod komen onvoldoende beheerst werden. Bij nadere beschouwing concluderen we dat de basis van deze begrippen in het materiaal niet aan bod is geweest en de context leidde tot bestudering van een ingewikkelde variant. We concluderen daarom dat deze context eerder tot verwarring leidt dan dat het de begripsvorming bevordert. Een extra overweging om het gebruik van contexten te heroverwegen is gelegen in het feit dat, met name bij dit soort begrippen, de wiskunde zelf prima als context kan fungeren (Drijvers, 2006).

4.3.2 Implementatie

De ervaringen in het derde vooronderzoek hebben ons meer inzicht gegeven in de implementatie en vraagstukken die daarbij horen. In deze paragraaf bespreken we de gevolgen van nieuwe aanpak, de ondersteuning van de docent en tempoverschillen tussen leerlingen.

Nieuwe aanpak

Leerlingen hadden erg veel *vragen* en deze vragen kwamen ook op andere dan gebruikelijke momenten. Veel vragen signaleerden dat leerlingen niet wisten hoe ze moesten beginnen. Dit komt overeen met wat Doyle en Carter (1984) vonden in hun onderzoek. Ook bij hen stelden leerlingen veel vragen en werd veel energie en actie van de docent gevraagd. Dit leidde ondermeer tot een veel nauwere taakinvulling dan oorspronkelijk bedoeld. Deze behoefte aan grotere specificiteit werd door de leerlingen op directe en indirecte manieren beïnvloed. Leerlingen leken op deze grotere specificiteit uit te zijn 'Students consistently sought, in other words, to reduce ambiguity and risk by clarifying task demands and obtaining feedback concerning the quality of their provisional writing efforts.' (Doyle & Carter, 1984; p.145). Wanneer deze grotere specifiekheid niet werd gegeven leidde dit tot onrust. De auteurs schrijven daarover 'The teacher was pushed, in other words, to choose between preserving conditions for students' self-direction and preserving order in the classroom.' (Doyle & Carter, 1984; p.146). Onze bevindingen lijken hiermee overeen te komen. Ook in dit onderzoek moest de docent er veel energie in steken om de lessen draaiende te houden. Bovendien leek vooral in de M-klas de opdrachten tot onrust (en demotivatie) te leiden (zie ook paragraaf 4.2.4; Het verloop van de inzet van leerlingen over de lessenserie). Aanpassen van de deelopdrachten kan ondersteuning bieden voor de aanvangstaken van de leerlingen. De docenten geven aan dat ze een volgende keer nieuwe leerstof eerst met het boek zouden behandelen.

Een bijzonder aandachtspunt is de *afstemming tussen boek en SimQuest-simulaties*. We zagen bijvoorbeeld dat veel leerlingen alsnog het hele boek doorwerkten als voorbereiding op de toets. De leerlingen gaven dan ook aan bij de voorbereiding van de toets beter te willen weten wat er van hen verwacht werd. Deze bevindingen signaleren dat leerlingen geen helder beeld hebben van de samenhang tussen boek en SimQuest-simulaties. Een mogelijke reden hiervoor is dat beide in de twee klassen erg gescheiden behandeld werden. Enige winst in afstemming lijkt mogelijk wanneer beide 'werkwijzen' in eenzelfde contactuur aan bod komen.

Er zijn meerdere signalen van een hoge *moeilijkheidsgraad* van de leerstof. De grote hoeveelheid tijd die het werken met het materiaal kostte signaleert een hoge belasting. Voorts bleken deelopdrachten noodzakelijk in plaats van aanvullend voor de zwakkere leerlingen. Al deze resultaten bij elkaar hebben ertoe geleid, dat we vermoeden dat 'zelf formules ontdekken' te veel gevraagd is van leerlingen. In het grootschalig onderzoek zal het doel daarom niet langer zijn het zelf ontdekken van formules, maar het onderzoeken van eigenschappen van formules.

De nieuwe aanpak heeft ook invloed op de verwachtingen van de leerlingen. Wanneer niet aan deze verwachtingen wordt voldaan kan het gevolg zijn dat: (1) leerlingen hun verwachtingen bijstellen en (2) leerlingen onzeker worden.

bijstellen verwachtingen Leerlingen verwachten niet dat deze manier van wiskunde bedrijven ook bij wiskunde hoort. De N-docent geeft aan dat het positief is dat leerlingen ook deze kant van de wiskunde zien. De nieuwe aanpak sluit aan bij de doelen van het wiskundeonderwijs en de activiteiten. Leerlingen moeten hun ideeën bijstellen over wat wel of niet wiskunde is. Er zal in het grootschalig onderzoek aandacht moeten worden besteed aan de aanpassing van verwachtingen.

onzekerheid Doordat dingen anders gaan, zijn leerlingen deels hun referentiekaders kwijt. Aan deze referentiekaders ontlenen leerlingen een bepaalde mate van zekerheid, omdat een leerling weet wat er van hem verwacht wordt (bijvoorbeeld het verhaal tot op zekere hoogte begrijpen om daarna met sommen aan de slag te gaan). In een nieuwe situatie zullen nieuwe referentiekaders ontwikkeld moeten worden.

Ondersteunen van de docent

Meer *ondersteuning van de docent* is gewenst. In beide klassen ontstonden flinke verschillen in werkwijze, zoals in het gebruik van de conclusieschema's. We concluderen voorzichtig dat de invloed van de docenten op een succesvolle invoering van de vernieuwing relatief groot is. Dit komt overeen met bevindingen uit ander onderzoek (o.a. Anderson, 2002; Gregoire, 2003; Stein et al., 1996; Willemsen, 1994). Het is daarom belangrijk om de docenten voorafgaand aan het volgende bruikbaarheidonderzoek goed te informeren, onder andere over de gewenste didactiek.

Docenten hebben ook behoefte aan meer aanwijzingen over de planning van hun lessen. Ze wisten bijvoorbeeld vooraf niet goed hoe ze het materiaal over de lessen moesten verdelen. Vooral aan het begin van de lessenserie zorgde dit voor een afwachtende houding van de docenten. De docent van de N-klas heeft tijdens het onderzoek zijn aanpak aangepast en is leerlingen nadrukkelijk gaan vertellen waar ze aan het einde van het contactuur dienden te zijn en hoeveel tijd ze nog voor de overige opdrachten kregen. De docenten in het grootschalig onderzoek hebben baat bij suggesties voor de planning.

Tempoverschillen

De *tempoverschillen* tussen leerlingen zijn groot. Voor opdrachten uit het boek evenals voor SimQuest-simulaties geldt dat de ene leerling daar aanzienlijk sneller doorheen gaat dan de andere leerling. Docenten weten uit ervaring hoe ze tempoverschillen met leerstof uit het boek kunnen opvangen. Ze verwachten bijvoorbeeld dat leerlingen opdrachten waar ze in de les niet aan toe gekomen zijn thuis afmaken. Ervaring in het werken met SimQuest-simulaties hebben de docenten echter niet en het opvangen van tempoverschillen lijkt lastiger omdat de voortgang door de leerstof (mede door deelopdrachten) minder doorzichtig is. Misschien dat het verplicht thuis uitwerken van opdrachten uit SimQuest-simulaties waar leerlingen in de les niet aan zijn toegekomen, maar dat wel zouden moeten, ook hier een oplossing biedt.

4.3.3 Toetsing

Uit de toetsresulaten komen enkele bevindingen naar voren die speciale aandacht vragen in het vervolgonderzoek. Deze zaken betreffen: (1) aanpak van trekken van onjuiste conclusies, (2) combineren van schatten en berekenen, (3) communiceren en presenteren, en (4) meting van onderzoeksvaardigheden en activiteiten.

Tijdens het werken met SimQuest worden *onjuiste conclusies* niet aan het licht gebracht. Die sijpelen dan ook door in de antwoorden op toetsvragen. We concluderen hieruit dat het wenselijk is om meer garantie te bieden dat leerlingen uiteindelijk de juiste conclusies trekken bij het werken in het SimQuest-materiaal. Dit kan bijvoorbeeld door het geven van uitgewerkte voorbeelden waarmee leerlingen hun oplossing kunnen vergelijken. Verder zouden medeleerlingen en docent een nadrukkelijker rol hierin gegeven kunnen worden.

SimQuest nodigt uit tot het doen van *schattingen* en dit werkt door in de toetsuitwerkingen. Maar dit is een onvoldoende basis voor wiskundig beredeneren/bewijzen/aantonen en evalueren. Schatten alleen is niet genoeg. Berekeningen zijn ook gewenst. Tijdens de lessenserie en vooral in het materiaal moet daar meer aandacht voor komen. Leerlingen moeten geconfronteerd worden met de wiskundige cultuur waarin schatten mag als evaluatie van (en als leidraad voor) het berekende antwoord, maar een berekening verplicht is voor het daadwerkelijke antwoord.

In de resultaten op de toets zagen we meerdere malen dat de wiskundige *communicatievaardigheden* van de leerlingen tekort schoten. In Tsunami richtte de uitleg zich expliciet op de notatiewijze. Dit bleek niet voldoende. Ook elders in het programma is meer aandacht voor notatie gewenst.

Wanneer we iets willen zeggen over de leereffecten van het ontwikkelde materiaal moeten deze getoetst worden. Bij leereffecten denken we dan niet alleen aan de beheersing van de lesstof, maar ook aan *onderzoeksvaardigheden* en de kwaliteit van verschillende *activiteiten*. Het toetsen van laatstgenoemde zaken is, zoals we in het derde vooronderzoek zagen, lastig. De ervaringen uit het derde vooronderzoek zijn dusdanig dat we in het grootschalig onderzoek niet dezelfde toetsonderdelen (zoals de opdracht in een SimQuest-simulatie) kunnen gebruiken. Daarom hebben we besloten om ons in het grootschalig onderzoek te beperken tot het toetsen van de beheersing van de lesstof.

5 Aanpassingen voor het grootschalig onderzoek

Op basis van de bevindingen uit het derde vooronderzoek is het materiaal opnieuw aangepast. Deze aanpassingen worden beschreven in hoofdstuk 5.1. Aanvullende ondersteuning en aanwijzingen worden besproken in hoofdstuk 5.2.

5.1 Aanpassing en uitbreiding van lesmateriaal voor wiskunde

In het grootschalig onderzoek zijn de applicaties Zwitserleven (in aangepaste vorm genaamd Mobieltjes), Het benefietconcert, Tsunami en Windmolen gebruikt. In deze paragraaf bespreken we van de eerder gebruikte applicaties een aantal aanpassingen. We zullen eerst enkele algemene aspecten van de uitgangspunten en het materiaal bespreken, voor we in de volgende paragraaf de concrete wijzigingen van het materiaal die daarvan het gevolg zijn, illustreren. Windmolen wordt kort geïntroduceerd.

5.1.1 Algemene richtlijnen voor het ontwikkelen en aanpassen van lesmateriaal

Aansluiting op het boek

Uit het derde vooronderzoek kwam naar voren dat leerlingen moeite hadden om verbanden tussen de stof uit het leerboek en uit de SimQuest-applicaties te zien. Om deze reden besloten we in het grootschalig onderzoek het leerboek als leidraad te nemen. Dit betekent dat in dat onderzoek de indeling van het boek gevolgd wordt en delen van applicaties bij onderdelen van het boek werden ingezet. Dit leidde onder andere tot de inzet van Windmolen.

Werken op papier

Een grote wijziging ten opzichte van de vooronderzoeken is dat we in het materiaal voor het grootschalig onderzoek het werken op papier nagestreefd hebben. Deze wijziging had een aantal oorzaken. Ten eerste is het werk op papier makkelijker mee te nemen en later opnieuw in te zien.[1] Ten tweede gold dat voor meerdere aspecten van het werken met SimQuest-applicaties al tot het werken op papier besloten was (zie deel 2, paragraaf 4.1.2). Ook het maken van aantekeningen en schetsen diende op papier te gebeuren. Ten derde hebben we besloten alleen nog vrije opdrachten te gebruiken. Leerlingen kunnen de antwoorden op deze opdrachten op papier geven waardoor er minder beperking is aan beschikbare ruimte. Vooral de oorspronkelijke optimalisatieopdrachten wekten de valse indruk dat een leerling 'klaar' was wanneer de gevraagde situatie was verkregen.[2] Ten vierde kunnen docenten op deze manier snel een beter overzicht krijgen van de vorderingen van de leerlingen. In de interviews gaven de docenten aan dat ze aan zo'n overzicht behoefte hadden. Wanneer leerlingen in een SimQuest-applicatie een nieuwe opdracht openen zijn hun antwoorden op de voorgaande opdrachten niet meer te zien. Op schrift is dit overzicht gemakkelijk en snel te zien door de docent.

Het onderwerp van het onderzoek van leerlingen

Bij aanvang van het ontwikkelingsonderzoek wilden we de leerlingen formules, zoals die voor de richtingscoëfficiënt, zelf laten ontdekken. We merkten dat dit te veel gevraagd was en dat de deelopdrachten zo sturend waren dat er moeilijk nog langer van zelf-ontdekken gesproken kon worden.

[1] Wanneer leerlingen afwisselend thuis en op school met een SimQuest-applicatie werken, dan kunnen ze in SimQuest hun eerder gegeven antwoorden op een andere computer niet inzien.
[2] Dit is in latere versies van SimQuest veranderd. Maar dat is na uitvoering van dit onderzoek gebeurd.

Eén van de argumenten voor zelf-ontdekkende activiteiten is dat het de motivatie zou verhogen (deel 1, hoofdstuk 3). Wanneer echter de kern van zaak is dat de formule een persoonlijk product moet zijn en daardoor beter blijft hangen, dan kunnen we ook op zoek gaan naar manieren om een gegeven formule tot persoonlijk product te maken. Met andere woorden in onze zienswijze heeft een verschuiving plaats gevonden van het ontdekken van een formule naar het zoeken naar een manier om te komen tot functioneel en hopelijk persoonlijk betekenisvol onderzoeken van eigenschappen van een formule. Deze verschuiving resulteert onder andere in vragen als ‘Hoe ziet de grafiek van deze formule eruit? Hoeveel snijpunten heeft de grafiek van deze formule met de x-as of nog breder met de grafiek van een lineaire formule? Waar liggen de asymptoten van de grafiek van deze formule?’

De rol en plaats van context in het materiaal

In deel 1, hoofdstuk 3 stelden we dat abstractie van wezenlijk belang is, maar dat de relatie met de concrete werkelijkheid bewaard moet blijven. De afwisseling van concrete en niet-concrete situaties is belangrijk. Daarmee is echter nog geen duidelijke richtlijn gegeven over de rol van contexten. We beschrijven nu eerst kort de balans tussen concrete en niet-concrete situaties in de vooronderzoeken en gaan dan in op de gewijzigde uitgangspunten.

In het materiaal van de vooronderzoeken zijn alle opdrachten verbonden aan de context. We merkten dat in Zwitserleven de context te omvangrijk bleek te zijn. Bij Tsunami schetsten we dat de context eerder voor verwarring zorgde en de moeilijkheidsgraad verhoogde dan bijdroeg aan de begripsvorming. Deze ervaringen hebben ons doen besluiten de balans tussen concrete en abstracte opdrachten meer naar de abstracte opdrachten te laten gaan. De vraag is nu hoe we de context over de verschillende opdrachten ‘verdelen’.

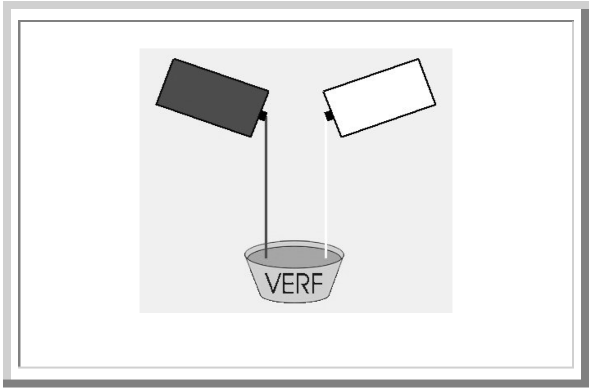
In deel 1, hoofdstuk 3 bespraken we dat concrete contexten een goede dienst kunnen bewijzen in het activeren van voorkennis. Om de context deze functie te laten behouden, kiezen we ervoor om de eerste opdrachten in een applicatie contextrijk te laten zijn. In de ontwikkelde applicaties start iedere serie opdrachten daarom steevast vanuit een voorbeeld uit het dagelijks leven. In vervolgopdrachten wordt vervolgens naar specifieke kenmerken van het voorbeeld gevraagd.

In een volgend niveau wordt in gedecontextualiseerde vorm verder ingegaan op deze specifieke kenmerken. Vaak vond er ook een overgang plaats van de specifieke vorm van het concept in het voorbeeld naar de algemene vorm van het concept. Wanneer dit het geval was, was altijd de eerste opdracht om de parameters in de algemene vorm zo te kiezen dat de specifieke vorm weer verkregen werd. De verdere tabbladen werkten dus niet langer met de concrete contexten uit het dagelijks leven maar met de daaruit geabstraheerde ideeën. De structuur van de algemene opbouw van de opdrachten in de applicaties in het grootschalig onderzoek is nu volgens het schema in figuur 5.1.

Opbouw opdrachten:
- Startpunt is bekende situatie voor leerlingen
- Bekende context met ‘wiskundige ogen’ bekijken
- De nieuw afgeleide wiskunde veralgemeniseren
- Algemene vorm met ‘wiskundige ogen’ bekijken

Figuur 5.1 *Algemene structuur van de opbouw van de applicaties*

We illustreren deze nieuwe benadering aan de hand van een ontwikkelde (maar in het onderzoek niet gebruikte) applicatie Verf. Het startpunt in deze applicatie is het mengen van verf (zie figuur 5.2).



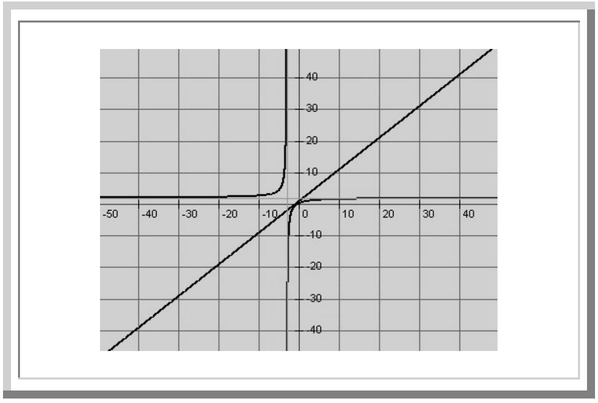
Figuur 5.2 *Voorbeeld van een bekend concreet startpunt van een applicatie*

Deze context wordt met wiskundige ogen bekeken. Hoe kun je het percentage witte verf in de bak berekenen? Hoe kan dat in een wiskundige formule uitgedrukt worden? De oplossing (linker formule figuur 5.3) kan veralgemeniseerd worden naar de algemene formule voor gebroken functies (rechter formule figuur 5.3). De overgangsvraag van de specifieke naar de algemene vorm is in dit geval ‘hoe moet je de waarden van a, b, c en d kiezen om de oorspronkelijke formule te krijgen?’.

$$\% = \frac{\text{rood}}{\text{rood} + \text{wit}} \longrightarrow y = \frac{ax + b}{cx + d}$$

Figuur 5.3 *Voorbeelden van bekijken met wiskundige ogen en het veralgemeniseren van het resultaat daarvan*

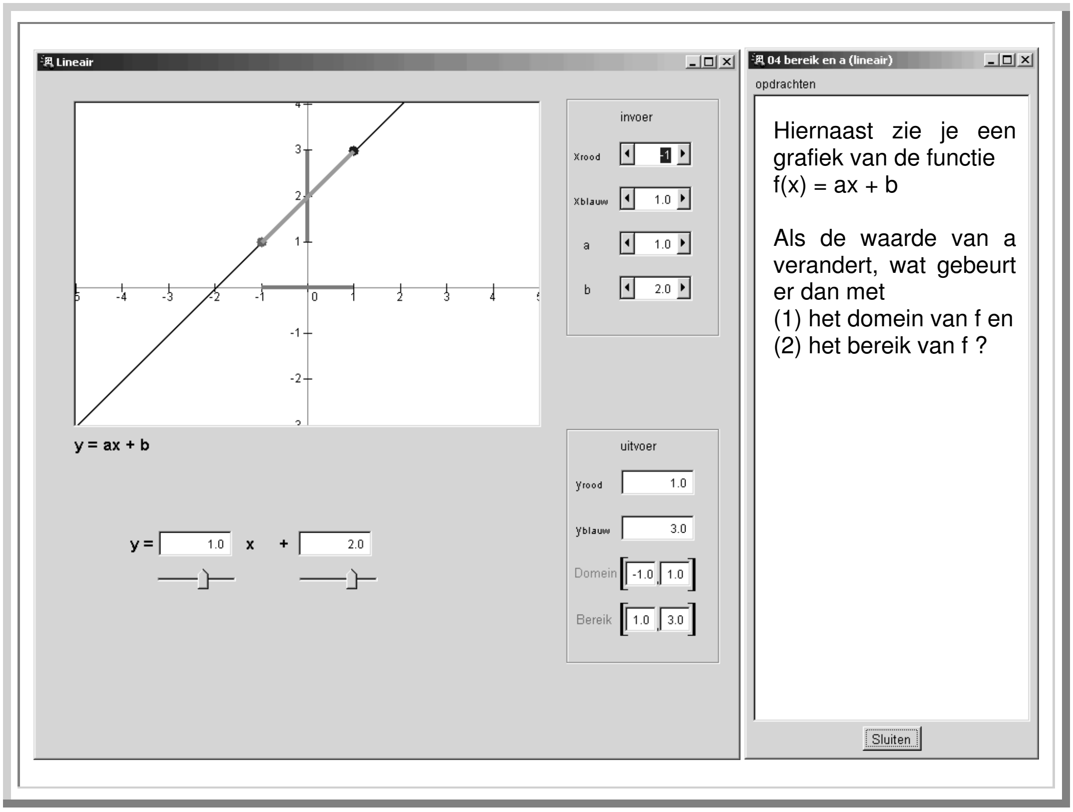
De laatste stap is om naar de kenmerken van deze algemene formule te kijken. Waar liggen de asymptoten? Hoe ziet de grafiek eruit? Waar liggen de snijpunten met de x-as of nog breder met een lineaire formule? Hoeveel snijpunten zijn er? Dit soort zaken kunnen onderzocht worden, onder andere door de grafiek te bekijken (zie figuur 5.4).



Figuur 5.4 *Voorbeeld onderzoeken van kenmerken van afgeleide algemene formule*

De deelopdrachten in het grootschalig onderzoek

Op basis van de ervaringen uit de vooronderzoeken zijn we tot een globaal stappenplan voor deelopdrachten gekomen dat we in deze paragraaf bespreken. Dit doen we aan de hand van een opdracht (zie figuur 5.5) uit het materiaal voor het grootschalig onderzoek.



Figuur 5.5 *Voorbeeld van een opdracht uit het materiaal voor het grootschalig onderzoek*

Deze opdracht vraagt de leerlingen naar de specifieke invloed van één variabele (a) op de waarde van twee uitvoervariabelen. De opdracht specificeert de keuze van de waarde van deze ene variabele in zeer beperkte mate. Voor dit specifieke geval geldt dat er een aantal categorieën mogelijkheden voor de keuze van ‘a’ zijn. De bijbehorende deelopdracht is in figuur 5.6 gegeven. Iedere deelopdracht bevat naast een deel waarin wordt gevraagd naar een mogelijke aanpak ook een deel met een voorbeelduitwerking. Deze uitwerking is een mogelijkheid voor de leerling om te kijken of zijn/haar conclusie met die van de ontwerpers overeen komt. De leerlingen zien deze stappen voor hun werkwijze en de voorbeelduitwerking in één scherm.

Aanpak
Stap 1: Kies een waarde van a. Bedenk dat het domein de invoerwaarden zijn en dus onafhankelijk van de functie waar je ze in stopt. Het domein verandert niet.

Stap 2: Bedenk welke mogelijkheden er allemaal zijn om a te veranderen.

Stap 3: Probeer de verschillende mogelijkheden uit.

Stap 4: Kijk terug op wat je gedaan hebt. Maakt het voor stap 2 en 3 uit welke waarde voor a je bij stap 1 gekozen hebt?

Een mogelijke uitwerking
Stap 1: bv. 2

Stap 2: Je kunt a vergroten of verkleinen. Bij verkleinen zijn er twee verschillende mogelijkheden: van a tot -a en vanaf -a.

Stap 3: Kies bv. a = 2 en schrijf het bijbehorende bereik op. Vergroot a zonder de andere invoerwaarden te veranderen. Je ziet dat het bereik groter wordt.
Kies bv. a = 1. Je ziet dat het bereik kleiner is dan bij a = 2.
Kies bv. a = -2. Je ziet dat het bereik gelijk is als bij a = 2.
Kies bv. a = -3. Je ziet dat het bereik groter is dan bij a = 2.

Stap 4: Voor de precieze getallen maakt het uit welk bereik je kiest. Maar voor de aanpak maakt het niet uit. De mogelijkheden bij stap 2 blijven gelijk.

Figuur 5.6 *Voorbeeld van een deelopdracht uit het grootschalig onderzoek*

Het algemene stappenplan ziet er als volgt uit:
Stap 1: bedenk welke variabele (n) je gaat veranderen en naar welke uitvoer je kijkt.
Stap 2: welke mogelijkheden zijn er allemaal voor de waarden van de variabele(n)?
Stap 3: probeer de verschillende mogelijkheden uit.
Stap 4: kijk terug op het proces. Wat kun je concluderen?

Stap 1 zet de leerlingen aan om precies te formuleren waar ze eigenlijk naar op zoek gaan. Wat is precies de vraag en hoe kun je die vraag beantwoorden? In stap 2 wordt het hoe van het beantwoorden verder uitgewerkt. Daarna stopt het denken vooraf en volgt het doen. In stap 3 voeren de leerlingen uit wat ze in stap 1 en 2 bedacht hebben. In stap 4 wordt nagedacht over wat leerlingen gezien hebben tijdens het uitvoeren in stap 3. Het is de bedoeling dat daarbij wordt teruggegrepen op de gedachten in de stappen 1 en 2.

5.1.2 Specifieke ontwikkelingen en aanpassingen van de applicaties

Aanpassen van Zwitserleven in Mobieltjes

Terugkijkend op de vooronderzoeken is er een aantal redenen waarom we de context van Zwitserleven minder geschikt zijn gaan vinden. We zijn daarom op zoek gegaan naar een betere context om onderwerpen als richtingscoëfficiënt en het opstellen van formules van grafieken aan bod te laten komen. In het ontwikkelingsdeel van dit onderzoek is Zwitserleven omgevormd tot Mobieltjes.

De leerstof wordt gepresenteerd in de context van het vinden van het goedkoopste abonnement voor een mobieltje. Leerlingen hebben tegenwoordig vrijwel allemaal een mobiel. Zo min mogelijk geld kwijt zijn voor jouw belgewoonten, daar speelt ook de reclame op in. Het voorbeeld uit de praktijk moet een berekening bevatten die is gebaseerd op een 'vaste waarde' als uitgangspunt plus een constant aantal maal de waarde van 'een variabele'. Bij de telefoonrekening is de vaste waarde de abonnementsprijs. Vervolgens komt daar per belminuut een bedrag bij. In de applicatie is de variabele het aantal gebelde minuten. De parameter die door leerlingen kan worden ingesteld is het aantal euro's per minuut. Dit sterk vereenvoudigde model voor de hoogte van de telefoonrekening ziet er dus als volgt uit: Rekening (in euro's) = aantal euro per minuut · aantal gebelde minuten + abonnementsprijs.

Aanpassen van Tsunami

We concludeerden in het derde vooronderzoek dat meer aandacht voor de basis van het onderwerp 'domein en bereik' gewenst is. In de applicatie hebben we de context van Tsunami weg gehaald. De context van de begrippen domein en bereik is daarmee puur wiskundig geworden.

Ontwikkelen van Windmolen

De applicatie Het benefietconcert is te groot om kort bij modelleren besproken te worden. De applicatie Windmolen is toegevoegd om modelleren, dat als onderwerp in het begin van het hoofdstuk aan bod komt, met een aparte applicatie te behandelen. De inhoud wordt gepresenteerd in de context van het opwekken van energie met behulp van windmolens. De hoeveelheid energie die wordt opgewekt is afhankelijk van de windsnelheid. Deze afhankelijkheid kan uitgedrukt worden in een derdegraads functie: neemt de windsnelheid met een factor x toe, dan neemt het opgewekte vermogen met een factor x^3 toe (bijvoorbeeld wanneer het 2 maal zo hard gaat waaien, dan wordt 8 maal ($2^3 = 8$) zo veel vermogen opgewekt). Windmolen is volgens dezelfde principes vorm gegeven als de andere applicaties.

Aanpassen van Benefietconcert

De keuze om de structuur van het boek te volgen en wiskundig gezien meer structuur aan te brengen, leidt tot versnippering van de applicaties (en daarmee de context). Zo worden, in navolging van de structuur van het boek, eerst de onderwerpen 'domein en bereik' en 'vergelijkingen en ongelijkheden' behandeld voordat 'toepassingen' aan bod komen.

Als gevolg hiervan moesten de applicaties worden aangepast. Bijvoorbeeld Het benefietconcert valt voornamelijk onder het boekdeel 'toepassingen'. In de eerdere versies van Het benefietconcert werd eerst de formule opgesteld waarna onderwerpen als 'vergelijkingen' aan bod kwamen. Om meer aan de volgorde van het boek vast te houden en die delen van Het benefietconcert die over bijvoorbeeld 'vergelijkingen' gaan eerder te kunnen behandelen, hebben we aanpassingen aan de volgorde in Het benefietconcert gedaan. Dat heeft onder meer als gevolg dat in de tabbladen 'domein en bereik' en 'vergelijkingen en ongelijkheden' de formule al gegeven wordt. Deze formule moeten de leerlingen later zelf afleiden.

5.1.3 Uitgangspunten bij het ontwerpen van opdrachten en aanpassingen als gevolg daarvan binnen de applicaties

In de loop van de vooronderzoeken zijn er voor het ontwerpen van opdrachten een aantal voorwaarden bijgekomen. We stelden dat structureel ingebedde oriëntatieopdrachten en deelopdrachten belangrijk zijn. Daarnaast beginnen we met een concrete situatie om daar steeds meer van te abstraheren (zie figuur 5.1). In de opdrachten willen we ook vaker volgens de formeel wiskundige manier formuleren en noteren. Daarnaast willen we dat in de vraagstelling duidelijker naar voren komt dat het niet om het eindantwoord maar om de aanpak, berekeningen en concepten gaat. We zullen nu aan de hand van voorbeelden uit het materiaal laten zien hoe dit allemaal in de opdrachten in het materiaal is vorm gegeven.

Abstraheren

De opdrachten zijn aangepast zodat ze in de in paragraaf 5.1.1 (de rol en plaats van context in het materiaal) beschreven opzet passen. Zo gaan in Mobieltjes alleen de eerste opdrachten over abonnementen en belminuten. In de latere opdrachten worden de abstracte begrippen ‘a’ (richtingscoëfficiënt) en ‘b’ (het snijpunt van de grafiek met de y-as) gebruikt.

Structureren

In de vooronderzoeken kwam naar voren dat leerlingen soms moeite hebben met het zelf kiezen van waarden. Om leerlingen hierin te ondersteunen worden bij enkele deelopdrachten in stap 1 suggesties gedaan over de keuze van de overige parameters. Een voorbeeld hiervan staat in figuur 5.7.

> Aanpak
> Stap 1: Je kiest een waarde voor a en blijft er daarna van af (wanneer je zowel a als b verandert, weet je niet precies wat het gevolg is van de verandering van a en wat het gevolg is van de verandering van b). Kies bv. a = 2.
>
> (deelopdracht d02 invloed van b, tabblad ‘een lijn’, Mobieltjes grootschalig onderzoek)

Figuur 5.7 *Voorbeeld (1) aandacht voor keuze overige paramaters*

Niet alleen in deelopdrachten is er aandacht voor de eigen keuze van leerlingen, ook in de opdrachten zelf is er meer expliciete aandacht voor deze keuze. Een voorbeeld hiervan staat in figuur 5.8.

> Hiernaast zie je een grafiek van de functie
> y = ax + b.
> In deze grafiek zijn de grenzen van de functie aangegeven met een rode en een blauwe stip.
> Bij het openen van de opdracht geldt: D = [-1,1].
>
> 1. Kies zelf een bereik.
>
> 2. Verander de waarden in de invoer, zodat je bij de uitvoer dit bereik krijgt. Hoe kun je dit voor elkaar krijgen?
>
> (opdracht 02 bereik (lineair), tabblad ‘domein en bereik’, Tsunami grootschalig onderzoek)

Figuur 5.8 *Voorbeeld (2) aandacht voor keuze overige paramaters*

Uit het derde vooronderzoek kwam ook naar voren dat leerlingen moeite hadden om verbanden te zien tussen wat het boek en wat de simulaties behandelen. Daarom zijn in het SimQuest-materiaal verwijzingen naar het boek toegevoegd (zie figuur 5.9 allereerste zin).

Deze opgave sluit aan op opgave 37 in het boek.

In de interface kun je nog meer machtsfuncties bekijken. Je hebt al lineaire en kwadratische functies bekeken. Let op: je kunt voor c alleen positieve gehele getallen kiezen.

Bekijk nu ook hogere machten. Neem de volgende tabel over in je schrift en vul hem verder in:

macht	maximaal aantal snijpunten
1	1
2	2
3	..
4	..
5	..

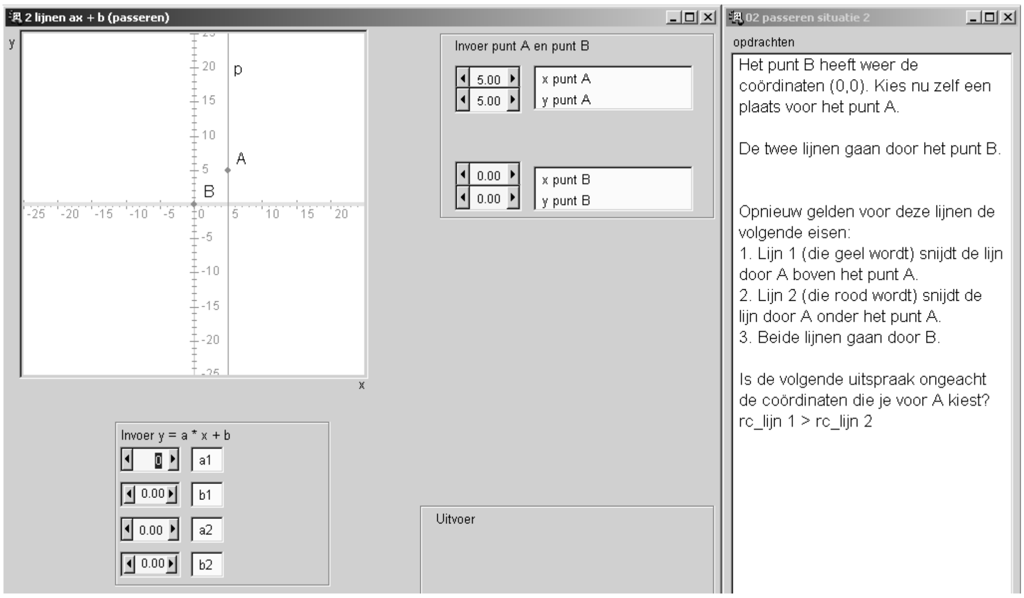
Tot slot: hoe groot zou het maximaal aantal snijpunten zijn tussen een lineaire functie en een 100ste-macht functie? Onderbouw hoe je aan dit antwoord komt.

Dit laatste is een typische wiskundige activiteit. In eenvoudige gevallen kun je nog 'gewoon wat proberen'. Bij grote getallen kost dit te veel tijd en probeer je te beredeneren wat de uitkomst zal zijn.

(opdracht 07 Opgave 37 (slot), tabblad ‘abstract model’, Windmolen grootschalig onderzoek)

Figuur 5.9 *Voorbeeld expliciete aandacht structurering in opdrachten*

In de beschrijving van het derde vooronderzoek lieten we zien dat op het gebied van structureren ook voor sterke wiskundeleerlingen uitdagingen liggen. In het materiaal voor het grootschalig onderzoek is hierop ingespeeld door er expliciet opdrachten over te formuleren. Een voorbeeld staat in figuur 5.10. De vraag is of de stelling waar is ‘ongeacht de coördinaten die je kiest’. Dit is, met andere woorden, de vraag: ‘is de stelling waar voor alle mogelijke plaatsen van A’.



(opdracht 02 passeren situatie 2, tabblad ‘twee lijnen’, Mobieltjes grootschalig onderzoek)

Figuur 5.10 *Voorbeeld van opdracht over verschillende mogelijkheden*

De bijbehorende deelopdracht gaat ook op deze kwestie in. De tekst luidt: ‘Zolang A een positieve x- en y-coördinaat heeft, is het antwoord vergelijkbaar met situatie 1. Maar het kan zijn dat de x- en/of y-coördinaat negatief is. Je moet dus een situatie in elk kwadrant bekijken (stap 1).’ Leerlingen worden hier expliciet gewezen op de mogelijkheid van negatieve getallen.

Aandacht voor structureren komt ook naar voren in verwijzingen naar eerdere opdrachten of eerdere getrokken conclusies. Daarbij wordt aandacht besteedt aan overeenkomsten en verschillen zodat leerlingen ook geïnformeerd worden over het waarom van de structurering.

Evalueren

In het derde vooronderzoek is in het materiaal meer aandacht besteed aan evaluatie. Ook in het grootschalig onderzoek blijven we in deelopdrachten aandacht aan evaluatie besteden. In Mobieltjes besteden we er extra aandacht aan. Zo wordt er in het voorbeeld van figuur 5.11 in stap 2 gevraagd om telkens opnieuw deelevaluaties uit te voeren en in stap 3 een uiteindelijke evaluatie uit te voeren.

Aanpak
Deze opdracht is bijna gelijk aan de opdracht '03 passeren situatie 3'. Het verschil is dat je nu A zelf neer kunt leggen.

Stap 1: Bedenk welke plaatsen allemaal interessant zijn om te bekijken.

Stap 2: Trek voor elke plaats een conclusie over het waarheidsgehalte van de uitspraak.

Stap 3: Is de uitspraak onwaar ongeacht waar je A kiest?

Voorbeeld van een uitwerking
Zolang A een positieve x- en y-coördinaat heeft, is het antwoord vergelijkbaar met situatie 3. Maar het kan zijn dat de x- en/of y-coördinaat negatief is. Je moet dus een situatie in elk kwadrant bekijken (stap 1). Kies bv. voor A (-5, 5), (-5,-5) en (5,-5). Bij het laatste voorbeeld is de uitspraak niet langer waar (stap 2). Om lijn 1 de lijn q links van A te laten snijden moet a1 positief gekozen worden, bv a1 = 0,4 en dan is b1 = -2. Om lijn 2 de lijn q rechts van A te laten snijden moet a2 negatief gekozen worden bv. a2 = -1 en dan is b2 = 5. De uitspraak is waar, want 1 > -1. Nu we een voorbeeld gezien hebben van onwaar (opdracht 03) en waar, kunnen we concluderen dat de uitspraak niet ongeacht de plaats van A onwaar is (stap 3).

(deelopdracht d04 passeren situatie 4, tabblad 'twee lijnen', Mobieltjes grootschalig onderzoek)

Figuur 5.11 *Voorbeeld aandacht voor evaluatie in deelopdracht*

Interpreteren

Bij de beschrijving van het algemene stappenplan van deelopdrachten is te zien dat in de laatste stap de vraag 'wat kun je concluderen?' gesteld wordt. Dit is dezelfde vraag als 'wat interpreteer je uit je verkregen resultaten?'. In het voorbeeld van een deelopdracht in figuur 5.12 is deze laatste stap verwoord als 'wat gebeurde er?'. In dit voorbeeld is ook in eerdere stappen aandacht voor interpretatie, bijvoorbeeld door het zinsdeel 'wat denk je dat er gaat gebeuren als je nogmaals …?' in stap 3.

Stap 3: Kies een beginwaarde voor b. Kies bv. b = 4. De grafiek van y = 2 x + 4 is nu getekend. Begin met de eerste mogelijkheid van het veranderen van b. Je kunt bv. b vergroten. Klik één maal op de rechter button van het invoerveld. Wat zie je gebeuren? Wat denk je dat er gaat gebeuren als je nogmaals op de button klikt? Doe dit en kijk of je voorspelling klopt.

Stap 4: Herhaal stap 3 voor de overige mogelijkheden van b.

Stap 5: Kijk terug op wat je hebt gedaan. Wat gebeurde er wanneer je b op de verschillende manieren veranderde?

Een mogelijke oplossing
Je kunt b of vergroten of verkleinen.
Vergroten (stap 3 uit de aanpak):
De nieuwe grafiek is een grafiek evenwijdig aan de oorspronkelijke grafiek.
De nieuwe grafiek ligt boven de oorspronkelijke grafiek.

Verkleinen (stap 4 uit de aanpak):
De nieuwe grafiek is een grafiek evenwijdig aan de oorspronkelijke grafiek.
De nieuwe grafiek ligt onder de oorspronkelijke grafiek.

Algemene conclusie (stap 5 uit de aanpak):
Wanneer je b verandert, dan verandert de steilheid van de grafiek niet. De lijn verschuift wel omhoog en omlaag.

(deelopdracht d02 invloed van b, tabblad 'een lijn', Mobieltjes grootschalig onderzoek)

Figuur 5.12 *Voorbeeld van aandacht voor interpretatie in een deelopdracht*

Beredeneren/bewijzen/aantonen

Leerlingen worden soms expliciet gewezen op het belang van beredeneren. In het voorbeeld van figuur 5.9 staat bijvoorbeeld: 'Dit laatste is een typische wiskundige activiteit. In eenvoudige gevallen kun je nog 'gewoon wat proberen'. Bij grote getallen kost dit te veel tijd en probeer je te beredeneren wat de uitkomst zal zijn.'. Ook in figuur 5.13 wordt de leerling gevraagd te beredeneren, om te onderbouwen met argumenten. De leerlingen kunnen proberen of ze een manier kunnen vinden om meer dan drie snijpunten te vinden. Maar ze kunnen onmogelijk alle mogelijke waarden voor alle invoervariabelen uitproberen. Dus zullen ze de uitkomsten van hun SimQuest-berekeningen moeten gaan gebruiken om van proberen naar argumenteren te gaan.

Zijn er meer dan 3 snijpunten mogelijk tussen de grafieken van y1 en y2?
Onderbouw je antwoord met argumenten.

(opdracht 02 Aantal snijpunten (vervolg), tabblad 'abstract model', Windmolen grootschalig onderzoek)

Figuur 5.13 *Voorbeeld opdracht waarin aangespoord wordt om het antwoord te beredeneren*

Het materiaal bevat ook opdrachten die leerlingen opdragen om een berekening uit te voeren. Een voorbeeld is te zien in figuur 5.14.

De formule voor het verband tussen de lengte en de breedte is:
b = - l + h / 2
met b = breedte, l = lengte en h = aantal meters hek.

Kies een waarde voor 'aantal meters hek'.

Bereken de lengte waarbij de breedte gelijk aan 17 m wordt. Controleer in het linker gedeelte of je antwoord klopt.

(opdracht 1 berekenen breedte, tabblad 'vergelijkingen en ongelijkheden', Het benefietconcert, grootschalig onderzoek)

Figuur 5.14 *Voorbeeld expliciete opdracht tot doen van een berekening*

Presenteren en communiceren

Uit de resultaten van de papieren toetsen van het derde vooronderzoek kwam naar voren dat leerlingen problemen hadden met notatiewijzen. Bij beschouwing van het materiaal kwamen we tot de conclusie dat er in het materiaal op meer plaatsen genoteerd zou moeten worden volgens de regels. In figuur 5.15 staat een voorbeeld (in dit geval gaat het om de officiële notatie 'p: x=5').

> Het punt A heeft de coördinaten (5,5) en het punt B heeft de coördinaten (0,0). Door het punt A is de lijn p: x=5 getekend.
>
> Twee andere lijnen gaan door het punt B. Voor deze lijnen gelden de volgende eisen:
> 1. Lijn 1 (die geel wordt) snijdt de lijn p boven het punt A.
> 2. Lijn 2 (die rood wordt) snijdt de lijn p onder het punt A.
> 3. Beide lijnen gaan door B.
>
> Verander de a en b van beide lijnen, zodat aan deze twee eisen is voldaan.
>
> Klopt de volgende uitspraak?
> rc_lijn 1 > rc_lijn 2
>
> (opdracht 01 passeren situatie 1, tabblad 'twee lijnen', Mobieltjes grootschalig onderzoek)

Figuur 5.15 *Voorbeeld impliciete aandacht notatie*

5.2 Aanvulling op en gebruik van lesmateriaal in klassensituatie

Er is meer materiaal ontwikkeld om het gebruik van de simulaties door docenten en leerlingen te ondersteunen. Zo zijn de conclusieschema's omgevormd tot leerstofoverzichten en is er een docentenhandleiding ontwikkeld. Deze handleiding biedt docenten enige houvast over bijvoorbeeld de afwisseling en afstemming van lessen met het boek en werken met SimQuest-simulaties. We introduceren eerst de lesdoelen en lesfasen uit deze handleiding. Vervolgens gaan we in op de bespreking van de inzet van het klassengesprek en het leerstofoverzicht.

5.2.1 Lesdoelen en lesfasen in de docentenhandleiding

In de docentenhandleiding zijn *lesdoelen* beschreven en worden aanwijzingen gegeven hoe en wanneer docenten deze doelen als denkgereedschap kunnen inzetten (zie figuur 5.16). Volgens Van Rens (2005; p.132) is het belangrijk dat in een les voor leren onderzoeken de docent de leerdoelen ten overstaan van leerlingen expliciteert en dat het ontwerp van de les aanwijzingen geeft voor de wijze waarop de docent dit kan doen.

> In de lessenserie staan drie algemene doelen centraal:
> - De **relatie** tussen **formule en opdrachten** expliciteren (D1)
> - De **mogelijkheden** (D2.1), **grenzen** (D2.2) en **bijzondere gevallen** (D2.3) van leerstof expliciteren (D2)
> - De **onderlinge relaties** tussen **opdrachten** expliciteren (D3)
>
> Door expliciet aandacht te besteden aan deze doelstellingen leren leerlingen ontdekken welke wiskundestof nodig is bij het oplossen van opdrachten. Het is belangrijk dat leerlingen ook zelf deze doelstellingen leren kennen.

Doelen als denkgereedschap
De drie doelen geven richting aan het wiskundig denken en doen van de leerlingen. Ze moeten zich dan ook geregeld afvragen welk doel ze nastreven. Dus gedurende de lessenserie moeten ze zichzelf steeds vaker afvragen “Wat zijn de grenzen van de toepasbaarheid van deze formule?” of “Wat is het verschil tussen deze opgave en de opgave uit de vorige les?” Door de doelstellingen te formuleren als vragen werken ze als denkgereedschap. De vragen ondersteunen het wiskundig redeneren en argumenteren tijdens het werken met simulaties en geven richting aan de communicatie in de klas.

Doelen expliciteren in lesmomenten
In de lessenserie kunnen de drie algemene doelen op verschillende momenten aan bod komen in de les. Bij de oriëntatie, het klassengesprek en in het opbouwen van een leerstofoverzicht kunt u telkens en afwisselend de aandacht richten op één doel. De instructies bij de simulaties wijzen de leerlingen op tal van plaatsen op de algemene doelen.

(docentenhandleiding, grootschalig onderzoek)

Figuur 5.16 *Aanwijzingen voor docenten over lesdoelen*

We willen docenten handvatten geven hoe ze het boek en de simulaties afwisselend in hun lessen kunnen inzetten. Om dit te kunnen doen, hebben we de verschillende onderwerpen in *lesfasen* verdeeld: oriëntatie, inleiding, verwerking en recapitulatie (zie ook figuur 5.17). Bij elk van deze fasen hebben we vervolgens aangegeven welke onderdelen van de applicaties gebruikt kunnen worden.

De *Oriëntatie* richt zich op twee zaken: (a) het activeren van voorkennis en, (b) het toelichten van het belang van wiskundestof. Het activeren van voorkennis is van belang om verbanden te kunnen leggen met eerder besproken wiskundestof. Dit sluit aan bij de derde algemene doelstelling (D3). Het toelichten van het belang maakt voor leerlingen duidelijk in welke situaties of voor welke echte problemen wiskundestof relevant is. Dit sluit aan bij de eerste algemene doelstelling (D1).

De *Introductie* richt zich op de presentatie van de nieuwe wiskundestof. Het gaat hierbij vaak om een bespreking van één mogelijkheid. Dit sluit aan bij het eerste onderdeel van de tweede algemene doelstelling (D2.1).

In de *Verwerking* komen meerdere mogelijkheden en speciale gevallen van de wiskundestof aan bod. Dit sluit aan bij de eerste twee onderdelen van de tweede algemene doelstelling (D2.1 & D2.2). Bij enkele opdrachten moeten de leerlingen aandacht besteden aan de grenzen van de toepasbaarheid. Dit sluit aan bij het derde onderdeel van de tweede doelstelling (D2.3). In deze fase kunt u de onderlinge relaties tussen opdrachten expliciet aangeven om de derde doelstelling te realiseren (D3). Iedere opdracht richt de aandacht van de leerling op de wiskundestof in die opdracht. Dit sluit aan bij de eerste doelstelling (D1).

De *Recapitulatie* richt zich op het ontwikkelen van een totaalplaatje van de stof uit de voorgaande fasen. De belangrijkste zaken uit deze fasen moeten een plaats krijgen in het Leerstof-overzicht.

(docentenhandleiding, grootschalig onderzoek)

Figuur 5.17 *Omschrijving van verschillende lesfasen*

Tijdens de oriëntatiefase kan aandacht besteed worden aan het overtuigen van authenticiteit. Eén van de rollen van de docent (en materiaal) is om leerlingen te overtuigen van authenticiteit (Honebein, Duffy, & Fishman, 1993; Petraglia, 1998a). Hiermee wordt bedoeld dat leerlingen overtuigd moeten worden van de bruikbaarheid en relevantie van het geleerde ofwel dat de problemen echte problemen uit het dagelijks leven zijn.

Tijdens de introductiefase wordt de nieuwe stof geïntroduceerd. Hiermee sluiten we aan op de suggestie om niet langer de leerlingen zelf formules en concepten te laten ontdekken. Het introduceren van concepten is volgens Driver, Asoko, Leach, Morimer en Scott (1994) een belangrijke taak van de docent. Een dergelijke introductie is bedoeld om ervoor te zorgen dat leerlingen gebruik maken van, dan wel kennis maken met, bestaande wetenschappelijke kennis (adopteren van wetenschappelijke gebruikelijke concepten). Tijdens een introductiefase introduceert de docent nieuwe concepten. Na de introductie is het belangrijk om leerlingen de middelen en ondersteuning te geven om zich deze concepten eigen te maken. De leerlingen krijgen het concept en/of de formule gepresenteerd met een korte uitleg van het gebruik. Er blijft genoeg te onderzoeken over. Wat voor karakteristieken (zoals categorieën, grenzen of bijzondere gevallen) heeft het nieuwe concept en/of de nieuwe formule? Welke problemen kun je er op welke manier mee aanpakken?

Tijdens de recapitulatiefase is er ruimte voor concluderen (het nadenken over de kern van de opdracht en de plaats van de nieuwe kennis in het geheel). In het derde vooronderzoek hebben we hiervoor het conclusieschema geïntroduceerd. In dat onderzoek kwamen deze zaken echter niet goed genoeg uit de verf. We willen in het grootschalig onderzoek meer plek inruimen voor het samennemen van opgedane ervaringen en het verkrijgen van een overzicht daarvan. Dit betekent concreet dat er een apart moment genomen wordt om een onderwerp ook echt af te sluiten. Er is een moment van recapitulatie; een afrondingsfase.

5.2.2 Het klassengesprek

De resultaten van de vooronderzoeken zijn op meerdere punten voor ons aanleiding geweest om het middel ‘klassengesprek’ in te zetten ter ondersteuning van een aantal activiteiten. We vatten eerst de belangrijkste aanleidingen samen. Ten eerste, voor veel activiteiten is een *confrontatie* gewenst. Denk hierbij aan een confrontatie met een weinig precieze formulering van een antwoord, aan mogelijkheden die niet gezien worden en onjuist getrokken conclusies. De leerlingen kunnen bijvoorbeeld wel ideeën of beweringen evalueren met het interactieve gedeelte, maar het is de vraag of hun activiteiten daarin toereikend zijn en tot juiste conclusies leiden. Een confrontatie met de invullingen van anderen kan hierbij helpen. Leerlingen en docent hebben met de opgedane ervaringen een uitstekende basis om met elkaar in gesprek te gaan. Ten tweede, een onderdeel van bewijzen is het *overtuigen van anderen*; een bewijs dient een ander ervan te overtuigen dat de stelling afleidbaar is vanuit de als waar geaccepteerde wiskundige ondergrond (Van Schalkwijk, 1998). Om een ander te overtuigen, moet je met een ander in gesprek gaan. Dat kan in een klassengesprek.

Klassengesprekken, wat zegt de literatuur?

Een klassengesprek biedt een goede mogelijkheid om ervaring te transformeren in leren (Baker, Jensen, & Kolb, 1997; Howe, Tolmie, Duchak-Tanner, & Rattray, 2000) en om laboratoriumactiviteiten voor de leerlingen meer betekenisvol te maken (Gunstone & Champagne, 1990). Een klassengesprek lijkt ook een goed middel om leerresultaten te verhogen bij wiskunde. Zo ontdekten Evertson, Anderson, Anderson, & Brophy (1980) dat meer succesvolle wiskundedocenten onder andere meer tijd besteden aan klassengesprekken.

Sfard (2001) geeft een alternatief gezichtspunt op het leren van wiskunde waarbij zij denken gelijkstelt aan communiceren. Het gaat daarbij om zowel communiceren met zichzelf als met anderen. Zij gaat ertoe over om leren van wiskunde te zien als het starten van een gesprek (Sfard, 2001; p.28):

> 'Learning mathematics may now be defined as an initiation to mathematical discourse, that is, initiation to a special form of communication known as mathematical.'

Men zou kunnen denken dat het opschrijven voldoende is omdat daarmee het gesprek met zichzelf gevoerd wordt. Bakker (2005) komt echter tot de conclusie dat klassengesprekken soms beter zijn dan nog meer schriftelijke vragen. Hij schrijft daarover (Bakker, 2005; p.8):

> Hoewel we ons best hebben gedaan om in de schriftelijke vragen zoveel mogelijk reflectie op te roepen, bleken de klassendiscussies toch steeds de beste redeneringen uit te lokken. Dit geeft te denken over de sterke tendens om leerlingen zelfstandig te laten werken. Natuurlijk is er niets mis met zelfstandig leren, maar de invulling ervan leidt er vaak toe dat leerlingen een groot aantal sommetjes afwerken en daarin niet voldoende diepgang bereiken. Als er een antwoord staat, is het in de ogen van leerlingen vaak oké (Van den Boer, 2003). Tijdens groeps- of klassendiscussies kan de docent doorvragen en processen als predikatie en hypostatische abstractie beter bewerkstelligen. Daarmee wil ik niet zeggen dat het makkelijk is: het vergde in mijn onderzoek enkele lessen voordat leerlingen geneigd waren serieus deel te nemen aan discussies. Ze waren onder het mom van zelfstandig werken gewend om aan de hand meegenomen te worden langs een serie minuscule deelvragen.

Miri, David en Uri (2007) vonden in hun onderzoek dat wanneer docenten open-einde klassendiscussies aanmoedigden er een goede kans was dat leerlingen ook kritisch denkvermogen verwierven. Ook voor Prawat (1989) speelt communicatie een grote rol. Hij pleit voor (1) het expliciet laten verbaliseren van kennis en strategieën, (2) het laten opschrijven van ideeën en (3) het laten discussiëren in kleine groepen. Kortom klassengesprekken, die gedirigeerd zijn en op basis van de hands-on activiteiten gevoerd kunnen worden, zijn veelbelovend.

Voorgestelde implementatie

De handleiding geeft docenten meer informatie over de mogelijkheden en het verloop van het klassengesprek in het onderzoek (zie figuur 5.18).

> Er zijn drie facetten in de lessenserie waardoor we denken dat het *Klassengesprek* iets anders zal verlopen dan gewoonlijk. Ten eerste, de leerlingen werken met simulaties die tal van mogelijkheden bevatten om de lesstof te verkennen. Het is waarschijnlijk dat de leerlingen tijdens de lessenserie daardoor meer uiteenlopende ervaringen opdoen. Die verschillen kunnen een goede basis vormen voor een gesprek over de verschillende aanpak van problemen en de aanwezigheid van meerdere oplossingen. Ten tweede, de lessenserie richt zich op de bewustwording van drie algemene doelen. Die doelen moeten richting geven aan het denken van de leerlingen. Dat lukt alleen wanneer ze expliciet en herhaaldelijk aan bod komen. Het klassengesprek is bij uitstek hiervoor geschikt. Ten derde, het klassengesprek is het beste middel om te komen tot het Leerstofoverzicht. Door tijdens het gesprek dit overzicht op te bouwen zien leerlingen hoe wiskundige kennis stap voor stap ontstaat uit wat ze al (zouden moeten) weten. Bij de stap-voor-stap opbouw kunnen zaken expliciet worden gemaakt en aanleiding geven tot discussie.
>
> (docentenhandleiding, grootschalig onderzoek)

Figuur 5.18 *Tekst over klassengesprek in handleiding*

Naast deze algemene opmerking gaf de handleiding bij iedere les ideeën voor het klassengesprek. Eén van de suggesties heeft betrekking op het stellen van vragen die de leerlingen kunnen aanzetten tot abstractie. In figuur 5.19 staat een voorbeeld van zo'n vraag naar de achtergrond van variabelen in het ontwikkelde materiaal.

> Waarom hebben de ontwerpers van de simulatie ervoor gekozen een negatieve waarde voor de abonnementsprijs of de prijs per belminuut niet toe te staan?
>
> Inleiding op Mobieltjes, handleiding grootschalig onderzoek

Figuur 5.19 *Voorbeeld oriëntatievraag over parameters in interactief gedeelte*

Andere suggesties richten de aandacht op structurerende activiteiten (zie figuur 5.20 en figuur 5.21).

> Welke mogelijkheden zijn er bij het kiezen van een punt in SimQuest opdracht '02 passeren situatie 2' en '04 passeren situatie 4'?
>
> Verwerking 'lineaire formules en grafieken', handleiding grootschalig onderzoek

Figuur 5.20 *Voorbeeld suggestie klassengesprek: de verschillende mogelijkheden*

> Wat zijn de overeenkomst tussen opgave 3c uit het boek en '04 evenwijdige lijn' uit de simulatie?
>
> Verwerking 'opstellen formule m.b.v. een grafiek', handleiding grootschalig onderzoek

> Hoe verandert de oplossingsstrategie wanneer je in plaats van $3x^2 - 6 = 3x$ (voorbeeld blz. 22), $3x^2 - 6 > 3x$ wilt oplossen?
>
> Introductie 'ongelijkheden', handleiding grootschalig onderzoek

Figuur 5.21 *Voorbeeld suggestie klassengesprek: de overeenkomsten (boven) en verschillen (onder) tussen opdrachten*

Ook zijn er suggesties voor het evalueren en bewijzen/aantonen/beredeneren (zie figuur 5.22).

Kun je bij b.v.02 de oplossing van de vergelijking - $l^2 + (h / 2) \cdot l = -100$ controleren? Waarom wel/niet?

Verwerking ‘vergelijkingen’, handleiding grootschalig onderzoek

Figuur 5.22 *Voorbeeld suggestie klassengesprek over evalueren in de handleiding*

Bij het doen van onderzoek hoort onzekerheid. Wanneer heb je voldoende situaties bekeken? Ook dit kan bespreekbaar gemaakt worden in het klassengesprek (zie figuur 5.23).

Welke waarden van de lengte heb je bekeken en waarom vond je dit voldoende?

Introductie ‘toepassingen’, handleiding grootschalig onderzoek

Figuur 5.23 *Voorbeeld suggestie klassengesprek over evalueren en aantonen in handleiding, waarbij werkwijze en onzekerheid aangestipt kan worden*

5.2.3 Het leerstofoverzicht

In het derde vooronderzoek zijn conclusieschema’s ingezet om onderzoekend leren met de SimQuest-simulaties te ondersteunen. Uit het vooronderzoek bleek dat leerlingen bij het invullen van de conclusieschema’s te weinig invloed hadden op het moment van trekken van conclusies, en op de structuur en vormgeving van het overzicht. In de conclusieschema’s werd ook niet toegewerkt naar één uiteindelijk overzicht. De schema’s hingen, ook fysiek, min of meer als losse conclusies aan elkaar. In een vernieuwde vorm zouden conclusies uit uiteenlopende bronnen, ook fysiek, bijeen geplaatst moeten (kunnen) worden.

Leerstofoverzicht, wat zegt de literatuur?

Reigeluth, Merill, Wilson en Spiller (1980) spreken over bijeenvoegen (synthesize) en samenvatten als belangrijke onderdelen van het ontwerpen van lesmateriaal. Van Patten, Chao en Reigeluth (1986) komen in een literatuuroverzicht tot de conclusie dat er wel veel goede ideeën zijn om deze onderdelen in te richten maar dat hun empirische onderbouwing ontbreekt. Eén van de voorgestelde benaderingen is het maken van begrippenkaarten (concept maps). In een overzichtstudie vonden Horton et al. (1993) dat het laten maken of gebruiken van begrippenkaarten het leren positief beïnvloeden. Ook in de recente studie van Gijlers (2005) werd een positief leereffect gevonden van het maken van begrippenkaarten. Kortom, het maken van een leerstofoverzicht, wat gezien kan worden als het maken van een vorm van begrippenkaart, wordt in de literatuur als veelbelovend gezien.

Voorgestelde implementatie

Het vernieuwde conclusieschema noemen we het ‘leerstofoverzicht’ (zie figuur 5.24). De leerlingen en de docent bepalen samen hoe dit overzicht eruit ziet (de vorm en de inhoud). De docentenhandleiding geeft een voorbeeld van zo’n leerstofoverzicht. De handleiding adviseert docenten ook om op momenten waarop zij een voorbeeldrol vervullen hardop conclusies te trekken en de geabstraheerde wiskundige kern en mogelijkheden samen te vatten en deze conclusies te gebruiken bij het maken van een leerstofoverzicht. In de docentenhandleiding is bij iedere fase waarin een onderwerp wordt afgerond, de recapitulatiefase, aangegeven welke delen uit het voorbeeld in leerstofoverzicht ingevuld zouden kunnen worden.

> Het *leerstof-overzicht* is een nieuw onderdeel van de klassikale les. Het leerstof-overzicht bouwt u op tijdens de verschillende recapitulatie-momenten. Waar het op neer komt is dat u samen met de leerlingen tot een overzicht van de belangrijkste punten uit de totale stof komt. Beperkt u zich tot het noemen van de geïntroduceerde begrippen en strategieën. In de introductie heeft u waarschijnlijk de nieuwe begrippen en strategieën kort toegelicht. In de verwerking wordt soms een nieuw begrip geïntroduceerd, zoals bijvoorbeeld de speciale gevallen ‘horizontale en verticale lijnen’.

Figuur 5.24 *Algemene tekst over leerstofoverzicht in docentenhandleiding*

Deel 3

Een onderzoek naar leereffecten in een authentieke klassensituatie

1 Inleiding

In deel 2 hebben we de ontwikkeling beschreven van materiaal en de inbedding van dit materiaal in een lessenserie in een authentieke klassensituatie. Tijdens deze ontwikkeling namen de simulaties een centrale rol in. We beschreven in het laatste hoofdstuk van deel 2 onze keus om in het grootschalig onderzoek het boek een meer centrale rol te geven en de (inzet van) simulaties daarop af te stemmen. In dat hoofdstuk beschreven we ook de aanvullende materialen die we hebben ontwikkeld om deze afstemming te ondersteunen.

In het grootschalig onderzoek vergelijken we de leereffecten van twee groepen leerlingen. De ene groep, de controle groep, krijgt les op een manier zoals de leerlingen dat gewend zijn. De andere groep, de experimentele groep, krijgt les waarbij de docenten gevraagd is om het ontwikkelde materiaal in te zetten. Deze docenten beschikken over de ontwikkelde simulaties en een handleiding met lesplanner, leerstofoverzicht en suggesties voor het klassengesprek. De docenten bepaalden zelf wanneer en hoe ze dit materiaal in de les gebruikten.

In het grootschalig onderzoek bekijken we één experimentele klas in detail. In deze zogenaamde diepteklas bestudeerden we de keuzen die de docent maakte en hoe het gebruik van de aangeboden onderdelen uitpakte.

Op basis van de ervaringen in de experimentele klassen, vooral die van de diepteklas, trekken we enkele conclusies over de wijzigingen zoals die voorgesteld werden in deel 2, hoofdstuk 4. Onze vraagstelling daarbij is: hoe werkt deze methode in de praktijk?

2 Methode en procedure

Het ontwikkelde materiaal (zie voor een gedetailleerde beschrijving hoofdstuk 5 deel 2) is in het grootschalig onderzoek op een groot aantal scholen ingezet. In het eerste gedeelte bespreken we de deelnemers (de scholen, de docenten en de leerlingen). Vervolgens bespreken we welke data verzameld werden. Tot slot zullen we de procedure voor de verschillende groepen (de experimentele groep, de diepte klas en de controle groep) bespreken.

2.1 Deelnemers

De deelnemers zijn op drie verschillende manieren geworven. De secties wiskunde van een groot aantal scholen met een VWO-afdeling zijn aangeschreven met het verzoek om deel te nemen aan het onderzoek. Daarnaast is een oproep gedaan in een elektronische nieuwsbrief die wekelijks verstuurd wordt aan geïnteresseerden met belangstelling voor het voortgezet wiskunde onderwijs. Tot slot is er een oproep gedaan tijdens een studiemiddag voor wiskundedocenten op de universiteit Twente. In reactie hierop heeft een flink aantal docenten zich opgegeven. Dit gebeurde in het schooljaar voorafgaand aan het jaar waarin het onderzoek zou plaats vinden. Daardoor was van te voren onbekend hoeveel leerlingen zouden deelnemen en welk profiel en geslacht de leerlingen hadden. Docenten die zich van te voren hadden opgegeven, kozen ervoor om deel te nemen in de experimentele conditie. Wanneer ze meerdere 4 VWO klassen hadden is hen gevraagd ook deel te nemen in de controle conditie. De meeste docenten gaven hieraan gehoor. Bovendien is gevraagd of ze aan collega's wilden vragen of zij deel wilden nemen in de controle conditie. Of een klas een experimentele- dan wel controle klas was, is van te voren besloten door de contactpersoon van de school. De verdeling was dus niet willekeurig.

Aan het grootschalig onderzoek namen 11 scholen deel met in totaal 20[1] klassen. Uiteindelijk ging het in totaal om 418 leerlingen, waarvan 206 mannen en 212 vrouwen. De klassen waren 4 VWO klassen. De leeftijd van de leerlingen was rond de 15/16 jaar. Van de 20 klassen zaten er 7 klassen in de controle conditie en 13 in de experimentele conditie. Het aantal leerlingen per klas varieerde van 14 tot 31. In totaal zaten 140 leerlingen in de controle conditie en 278 leerlingen in de experimentele conditie.

De scholen kwamen uit het westen, midden en oosten van het land. De scholen stonden zowel in grote steden als in relatief kleine steden, wat meer streekscholen waren. De scholen waren van verschillend signatuur (christelijk, katholiek, openbaar en één daltonschool). Twee scholen waren gelieerd aan voetbalclubs en hadden speciale regelingen voor getalenteerde leerlingen.

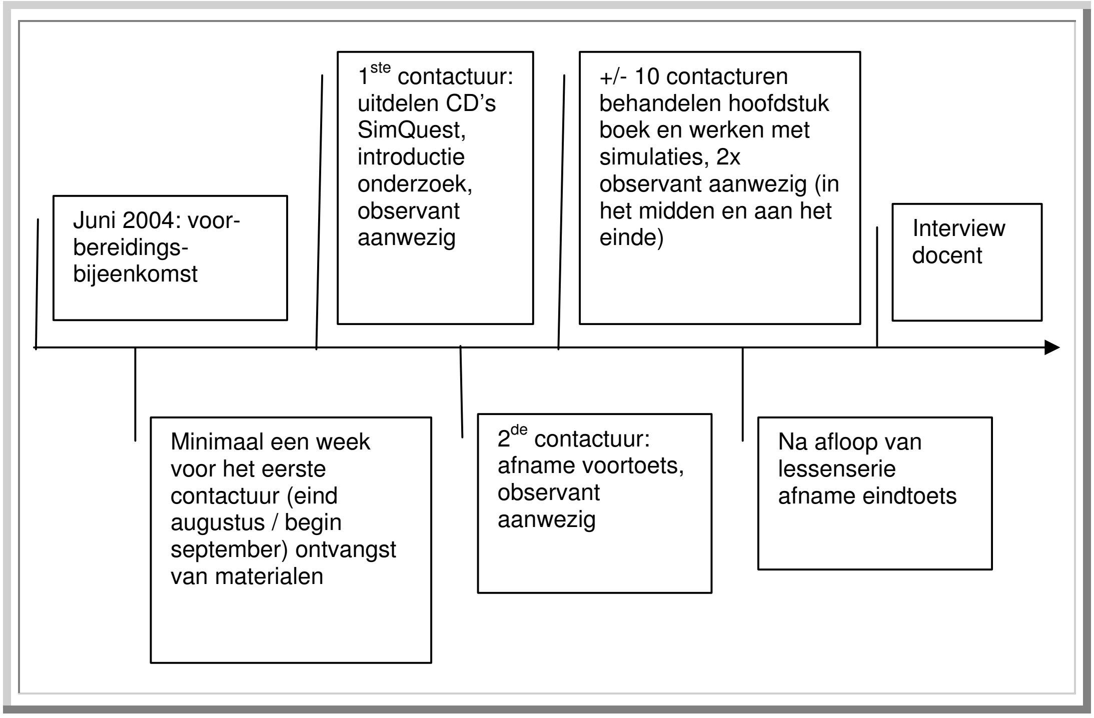
De ervaring die docenten van de experimentele klassen hadden met het gebruik van computers in de wiskunde les varieerde van geen ervaring tot het zelf programmeren van dergelijke programma's. Sommige docenten hadden nog nooit een les waarin computers werden gebruikt gegeven, anderen gaven regelmatig lessen in het computerlokaal. De docenten waren redelijk tot zeer ervaren docenten, ze hadden allemaal minimaal 5 jaar leservaring in het voortgezet onderwijs.

[1] Aan de start van het grootschalig onderzoek waren dit 21 klassen. Gedurende het onderzoek is 1 klas afgevallen.

2.2 Procedure

2.2.1 Algemene procedure experimentele groep

In het onderstaande tijdsschema (figuur 2.1) is te zien welke activiteiten wanneer hebben plaatsgevonden bij de experimentele klassen. In het vervolg van deze paragraaf zullen we aspecten uit dit tijdsschema toelichten.



Figuur 2.1 *Procedure in de experimentele groep*

Voorbereidingen

In juni 2004 (voor de zomervakantie voorafgaand aan het studiejaar waarin het ontwikkelde materiaal gebruikt zou worden) vond op de Universiteit Twente een voorbereidingsbijeenkomst plaats. Tijdens deze bijeenkomst is aan de docenten achtergrondinformatie gegeven over het onderzoek. Daarnaast kregen de docenten instructies voor het doceren. Verder hebben de docenten een handleiding gehad voor het installeren en eerste gebruik van het programma. Tot slot kregen de docenten het lesrooster, waarin was aangegeven (uitgaande van 12 contacturen) wat er per contactuur van het boek en van het computerprogramma behandeld diende te worden.

De docenten hebben tijdens deze bijeenkomst korte tijd met enkele simulaties gewerkt, zodat zij het programma al vast enigszins leerden kennen. De tijd voor het bekijken van het materiaal was beperkt en dientengevolge te kort om een goed beeld van het materiaal en van de mogelijke inzet in de lessen te krijgen. De docenten hebben voorafgaand aan de lessen nog zelf veel tijd moeten steken in de bestudering van het materiaal en aan de inpassing in de les. Voor dat laatste konden zij wel beschikken over globale richtlijnen voor inpassing van het materiaal.

Van iedere school met experimentele klassen heeft minstens één docent de voorbereidingsbijeenkomst op de universiteit bijgewoond. Niet alle docenten van een experimentele klas waren bij deze bijeenkomst aanwezig.

Minimaal één week voor de eerste les ontvingen de docenten voor alle leerlingen uit de experimentele klassen een installatie CD met daarop de applicaties en een handleiding voor het installeren en eerste gebruik van SimQuest en SimQuest-applicaties. De handleiding voor de leerlingen was dezelfde als die van docenten. De voortoetsen werden ook in de week voor de eerste les toegestuurd.

Verder kregen de docenten een docentenhandleiding (zie deel 2, paragraaf 5.2) met informatie over de algemene doelen van de lessenserie. Daarnaast bevatte de handleiding informatie over de inhoud van het computerprogramma. Er waren voorbeelden van vragen die de docent bij de verschillende onderdelen in het programma kon stellen. Er stonden ook voorbeelden in van vragen over de opgaven in het boek. Tot slot stonden in de handleiding voorbeelden van afsluitende conclusies van een thema, wanneer die getrokken konden worden en hoe deze in een overzicht te plaatsen waren.

Op een aantal scholen werd nog gebruik gemaakt van de oude druk van het leerboek van Getal en Ruimte. De desbetreffende docenten hebben een kopie van de nieuwe druk van het hoofdstuk (en de bijbehorende antwoorden) voor zichzelf en hun leerlingen toegestuurd gekregen. Voor deze docenten en enkele andere docenten die de nieuwe druk dit schooljaar voor het eerst gebruikten, was de inhoud van het hoofdstuk nieuw (niet de onderwerpen, maar wel de opgaven, de stukken tekst en de volgorde van de onderwerpen). Dit betekende dat deze docenten zich naast het computerprogramma ook het vernieuwde boek eigen moesten maken.

De lessenserie

De leerlingen uit de experimentele klassen kregen het eerste contactuur de CD en handleiding uitgereikt. Bij het opstarten van de lessen van de experimentele klassen is, voor zover mogelijk, iemand vanuit het onderzoeksteam aanwezig geweest bij de eerste twee contacturen. Deze persoon was er onder andere ook voor het beantwoorden en doorspelen van vragen van zowel de docent als van de leerlingen. Bovendien heeft deze observant een kort observatieverslag gemaakt.

Tijdens het tweede contactuur is de voortoets afgenomen. Tijdens de volgende contacturen werd het vervolg van de lesstof behandeld. Tijdens deze lessen is waar mogelijk 2 maal geobserveerd in de experimentele klassen, waarbij geluidsopnamen zijn gemaakt. In een aantal klassen is dit door omstandigheden slechts één maal of zelfs geen enkele maal gebeurd. Deze observaties vonden rond de 7de les en de 11de les plaats.

De lesindeling zoals voorgesteld in de docentenhandleiding staat in bijlage B.7. De leerinhoud is daarin onderverdeeld in zeven onderwerpen. De volgorde van behandeling van applicaties in de lessen is grofweg als volgt: eerst Mobieltjes, gevolgd door Windmolen (voor de M-klassen werd aanbevolen deze applicatie over te slaan), daarna Tsunami en tot slot Het benefietconcert.

De behandeling van de applicaties krijgt volgens de docentenhandleiding deels een plek in de oriëntatie en klassikale introductie en deels tijdens de verwerking. Tijdens de klassikale introductie heeft de docent een overdragende rol. De SimQuest-applicaties kunnen dan ingezet worden ter demonstratie. In de verwerkingsfase is het de bedoeling dat leerlingen zelf met de applicatie(s) aan de slag gaan. Naast het werken aan de SimQuest-applicaties moesten de leerlingen sommen uit het boek maken. Dit was meestal tijdens de verwerking gepland, maar soms ook tijdens de oriëntatie. Elk onderwerp wordt afgesloten met een recapitulatie waarin het leerstofoverzicht moet worden uitgebreid.

Afsluiting

Na afloop is de eindtoets (zie dit deel hoofdstuk 3) afgenomen. De tijd tussen de laatste les en het maken van deze toets verschilde per school en liep uiteen van 1 dag tot 1,5 week. De eindtoetsen zijn opgestuurd naar het onderzoeksteam dat de eindtoetsen heeft nagekeken, een score toegekend en teruggestuurd naar de scholen. De docenten konden zelf een waardering toekennen aan de resultaten. Deze waardering telde voor de leerlingen mee voor het rapportcijfer. Op sommige scholen telde het cijfer niet mee voor het eindcijfer van het schoolexamen.

Na afronding van het onderzoek zijn alle docenten van de experimentele klassen geïnterviewd, ook de docente die afhaakte. Van deze interviews zijn geluidsopnamen gemaakt.

2.2.2 Procedure diepte klas

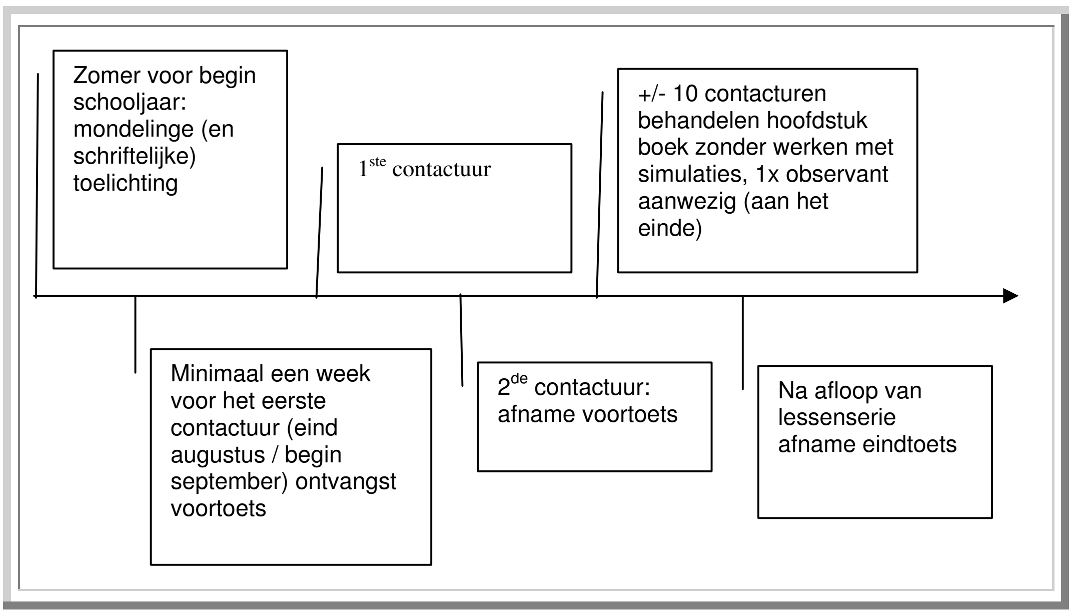
Bij één klas is een dieptestudie uitgevoerd. De procedure was in deze klas in grote lijnen gelijk aan die in de andere klassen.

In deze klas is één van de onderzoekers vrijwel iedere contactuur aanwezig geweest. Na afloop van deze contacturen heeft er vaak overleg plaats gevonden tussen de docent en de onderzoekster. Dit overleg ging over het verloop van de lessen en de mogelijkheden om die te verbeteren. Het contact en de uitwisseling van ideeën met de onderzoekers was dus veel intensiever dan bij alle andere klassen. Van iedere bijgewoonde les is een geluidsopname gemaakt.

Na afloop van het project heeft de docent van deze speciale klas de leerlingen gevraagd naar hun ervaringen en meningen over de lessen met de simulaties. De onderzoekster was hierbij aanwezig en had de gelegenheid de leerlingen enkele vragen te stellen.

2.2.3 Procedure controle klassen

In het onderstaande tijdsschema (figuur 2.2) is te zien welke activiteiten wanneer hebben plaatsgevonden bij de controle klassen. In het vervolg van deze paragraaf zullen we aspecten uit dit tijdsschema toelichten.



Figuur 2.2 *Procedure controle klassen*

Voorbereidingen

Er is voor de docenten van de controleklassen geen aparte voorbereidingsbijeenkomst geweest. Van de docenten die alleen les gaven in een controle klas (sommige docenten gaven les in beide type klassen) is niemand op de voorbereidingsbijeenkomst geweest. Deze docenten hebben voorafgaand aan de start van het schooljaar een toelichting gekregen over het onderzoek, maar ze kregen geen handleiding of lesrooster. De docenten is gevraagd om de lessen te geven zoals zij gewend waren. Minimaal één week voor de eerste les ontvingen ze, net zoals in de experimentele klassen, voor alle leerlingen de voortoetsen.

Op scholen waar nog gewerkt werd met de oude druk van Getal en Ruimte werd de kopie van de nieuwe druk toegestuurd.

De lessenserie

Tijdens het tweede contactuur is de voortoets afgenomen. Tijdens de volgende contacturen werd het vervolg van de lesstof behandeld. Het computerprogramma werd niet gebruikt. Tijdens deze lessen is er indien mogelijk 1 maal geobserveerd, waarbij geluidsopnamen zijn gemaakt. In een aantal klassen is dit door omstandigheden geen enkele maal gebeurd. Deze observaties vonden rond de 11de les plaats.

Afsluiting

Na afloop is de eindtoets (zie deel 3, hoofdstuk 3) afgenomen, opgestuurd naar het onderzoeksteam dat ze heeft nagekeken en gescoord. Daarna zijn de resultaten teruggestuurd naar de scholen. Ook deze docenten konden zelf een waardering toekennen aan de resultaten en deze al dan niet laten meetellen voor het rapportcijfer.

2.3 Verzamelde data

2.3.1 Kwantitatieve data

voortoets

De voortoets is ontwikkeld door de wiskundedocent uit het onderzoeksteam. Afname duurde 20 minuten. De toets gaat over delen van de leerstof uit het derde leerjaar: het oplossen van eerste- en tweedegraads vergelijkingen en ruimtemeetkunde. Omdat het oplossen van vergelijkingen wordt herhaald in hoofdstuk 1 van het leerboek van 4 VWO, wordt dit gedeelte van de voortoets gebruikt om te bepalen in hoeverre de bekend veronderstelde stof nog beheerst wordt. Een ander deel van de voortoets gaat over ruimtemeetkunde. Deze stof kwam niet in hoofdstuk 1 van het leerboek van 4 VWO ter sprake. Met dit toetsdeel willen we een beeld krijgen van het wiskundig inzicht van de leerlingen.

eindtoets

Na afloop van de behandeling van het hoofdstuk is een eindtoets afgenomen. Deze eindtoets is mede door de wiskundedocent uit het onderzoeksteam ontwikkeld. Deze eindtoets is beschreven in hoofdstuk 3 (dit deel). De eindtoets is niet gelijk aan de voortoets.

vragenlijst meningen

De docenten hebben de leerlingen voor en na het onderzoek gevraagd een vragenlijst over hun wiskundebeleving in te vullen. De vragenlijst stond op internet. Ondanks herhaald aandringen is deze lijst nauwelijks ingevuld. Er wordt daarom niet verder over gerapporteerd.

2.3.2 Kwalitatieve data

Observatieverslagen

Tijdens een aantal contacturen is een observant bij de lessen aanwezig geweest (zie paragraaf 2.2), die een observatieformulier heeft ingevuld. Bijlage B.11 bevat een leeg observatieformulier.

Geluidsopnamen

Van een deel van de bijgewoonde contacturen is een geluidsopname gemaakt.

Interviews

Na afloop van de lessenserie zijn de docenten van de experimentele klassen geïnterviewd door één persoon van het onderzoeksteam. Met behulp van een schema (bijlage B.12) werd een gestructureerd interview afgenomen, waarbij op reacties dieper kon worden ingegaan. Van deze interviews zijn geluidsopnamen gemaakt.

Mails van docenten

Gedurende het onderzoek heeft een aantal docenten regelmatig contact gezocht met de onderzoekster via de mail. In deze mails stonden hun ervaringen beschreven en stelden de docenten vragen.

2.4 De feitelijke procedure

De deelnemers kwamen van diverse scholen (zie paragraaf 2.1). Dit heeft als gevolg dat voor leerlingen factoren varieerden, zoals aantal contacturen, inzet van de SimQuest-simulaties en inrichting van de lessen. In hoofdstuk 6 (dit deel) gaan we in op deze variaties. In deze sectie bespreken we enkele organisatorische zaken.

De contacturen

Het aantal contacturen per week varieerde van 2 tot 4 uur. De duur van de contacturen varieerde van 45 tot 60 minuten. Sommige klassen hadden blokuren, dat wil zeggen twee contacturen achter elkaar. Het gemiddelde totaal aantal contacturen gedurende het onderzoek was ongeveer 12 contacturen.

Gebruik van de SimQuest-simulaties

De leerlingen uit de experimentele klassen kregen het eerste contactuur de CD en handleiding uitgereikt. Op sommige scholen was dit uur ook het eerste contactuur van het hele schooljaar en betekende dit dat er ook een kennismaking plaats moest vinden en soms ook boeken en/of Grafische Rekenmachines verdeeld moesten worden. Op andere scholen waren eerdere lessen gebruikt voor een project (samen met natuurkunde) of het introduceren van de Grafische Rekenmachine. Of de Grafische Rekenmachine, die nieuw is voor de leerlingen, apart vooraf of geïntegreerd met het hoofdstuk werd behandeld verschilde per school.

In veel klassen is het niet alle leerlingen gelukt om het programma geïnstalleerd te krijgen. Op een aantal scholen was het vanaf het begin van het onderzoek mogelijk om op school zelfstandig met het programma te werken, op een aantal scholen kwam die mogelijkheid in de loop van de tijd. Een aantal scholen bood af en toe de gelegenheid om, onder de aanwezigheid van een docent, in een computerlokaal met het programma te werken. Enkele scholen boden de leerlingen geen mogelijkheid om op school zelfstandig met het programma te werken (zie ook deel 3, hoofdstuk 8).

De beschikbaarheid van de SimQuest-simulaties tijdens de contacturen verschilde op de scholen. Sommige scholen hadden iedere les een laptop en beamer tot hun beschikking. Op sommige scholen is een deel van de lessen in een computerlokaal gegeven. Op andere scholen werden beamerlessen en computerlessen afgewisseld. Voor alle experimentele klassen geldt dat in minstens de helft van alle contacturen aandacht is geweest voor het computerprogramma. Voor een groot deel van de docenten was dit frequente, intensieve gebruik van computerprogramma's als onderdeel van hun lessen nieuw.

In contacturen die in het computerlokaal plaatsvonden was hetzelfde te zien als bij het derde vooronderzoek; leerlingen die erg snel door de opdrachten heen gaan, leerlingen die andere dingen zitten te doen, leerlingen die het nut van het programma ter discussie stellen, leerlingen zonder boek of schrift op tafel en de docent die erg moeilijk klassikaal iets kan zeggen.

Keuzen van docenten

In veel klassen is de lesplanner uit de docenthandleiding uitgedeeld aan de leerlingen. In meerdere M-klassen uit de experimentele conditie hebben docenten in de loop van de lessenserie onderdelen geschrapt om binnen beperkte tijd het hoofdstuk af te kunnen ronden. De docent bepaalde welke onderdelen er precies geschrapt werden.

Slechts enkele docenten hebben tijd vrij kunnen maken om een leeroverzicht te maken. Vrijwel alle docenten hebben regelmatig klassengesprekken gevoerd.

2.5 Uiteindelijke deelnemers

Bij aanvang van het onderzoek bestond de totale groep uit 470 leerlingen. Tijdens het onderzoek is één experimentele (N) klas met 25 leerlingen afgehaakt.[2] De data van deze leerlingen zijn niet geanalyseerd. Tijdens de afname van de voortoets waren 18 leerlingen afwezig. Van 2 leerlingen kregen we geen informatie over het geslacht. Van de overgebleven leerlingen hebben 7 leerlingen geen eindtoets gemaakt. De data van deze 52 leerlingen zijn verwijderd uit de analyses. De analyses in dit hoofdstuk zijn gebaseerd op de gegevens van 418 leerlingen.

[2] De docente, die afwezig was op de voorbereidingsbijeenkomst, gaf tijdens een telefoongesprek aan met het project te stoppen vanwege:
- de tijdrovende voorbereiding; de voorbereiding kostte veel tijd waardoor de voorbereiding voor andere klassen in het gedrang kwam
- de ongelukkige timing (aanvangsdatum) van het project
- de mening en inzet van enkele leerlingen uit de klas
- tijdnood
- familieomstandigheden.

3 De eindtoets in het grootschalig praktijkonderzoek

De bevindingen van het derde vooronderzoek zijn verwerkt in een eindtoets (zie deel 2, hoofdstuk 4). In dit hoofdstuk zullen we kort de uiteindelijke eindtoets bespreken.

3.1 Samenvatting ontwerp eindtoets

Er zijn vier eindtoetsversies ontwikkeld, omdat op sommige scholen meerdere klassen waren die op verschillende uren getoetst moesten worden en om leerlingen te toetsen die bij eerdere afname afwezig waren. De toetsversies verschilden in: (1) itemvolgorde (a, b, enz.) binnen opgaven (1, 2, 3, 4, 5 en 6) en (2) itemvariatie. Opdrachten waren uiterlijk verschillend (bijvoorbeeld verschillende getallen), maar inhoudelijk gelijk.

Met de eindtoets willen we zoveel mogelijk de onderwerpen behandelen uit hoofdstuk 1. Alle hoofdonderwerpen zijn erin gepresenteerd. In tabel 3.1 is van elke deelopgave het onderwerp aangegeven. De indeling over de verschillende onderwerpen is gebaseerd op het voorbeeld leerstofoverzicht uit de docentenhandleiding (zie deel 2, hoofdstuk 5).

Tabel 3.1 *Dekking van het hoofdstuk in de eindtoets*

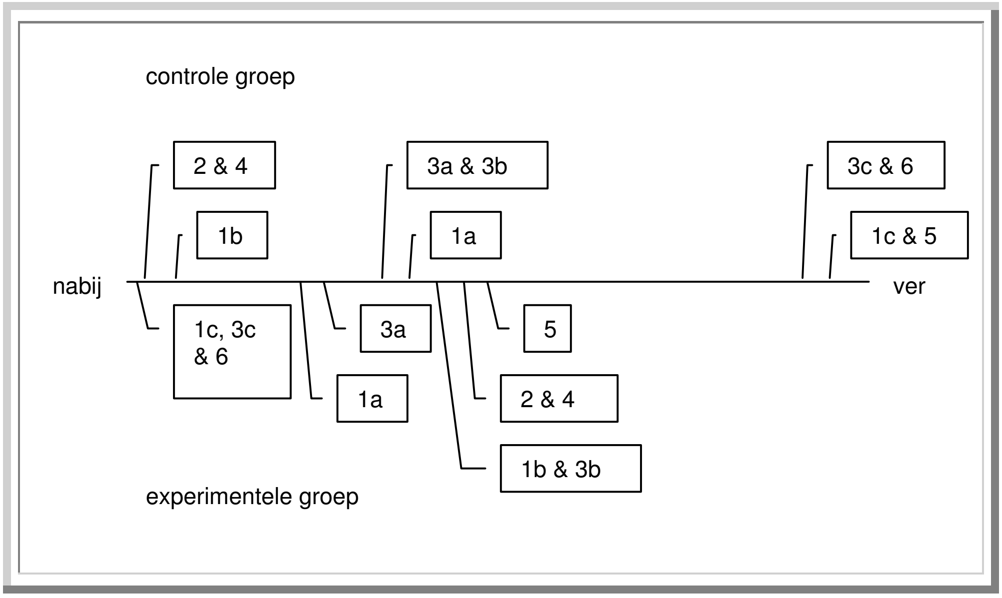
hoofdonderwerp	deelonderwerp	toetsopgave	percentage punten[1]
Lineaire formules	opstellen formules	1a, 1b	20,6 %
	begrip grafiek	1c, 6	19,0 %
Functies onderzoeken	domein en bereik	5a, 5b, 5c	19,0 %
	plotten en berekenen met GR	3b	6,3 %
Vergelijkingen en ongelijkheden	1[ste] graads vergelijking	2a	3,2 %
	2[de] graads vergelijking	2b, 2c, 2d	12,7 %
	ongelijkheid	4	6,3 %
Toepassingen	modelleren	3a, 3c	12,7 %
	economisch model	-	-

[1] Het gaat hierbij om het maximaal aantal punten van de toetsopgaven als percentage van het maximale totaal aantal punten van de eindtoets

De leerlingen moesten flink doorwerken om de eindtoets binnen de tijd af te krijgen (waarbij het mogelijk is dat de zwakkere leerlingen de eindtoets niet afkrijgen). Dit omdat, zoals eerder uitgelegd, zowel het oplossen als de snelheid waarmee dat gebeurt, belangrijk is. Het is daarom te verwachten dat de resultaten van met name de laatste opgave gekleurd worden doordat niet alle leerlingen aan deze opgave toe gekomen zijn.

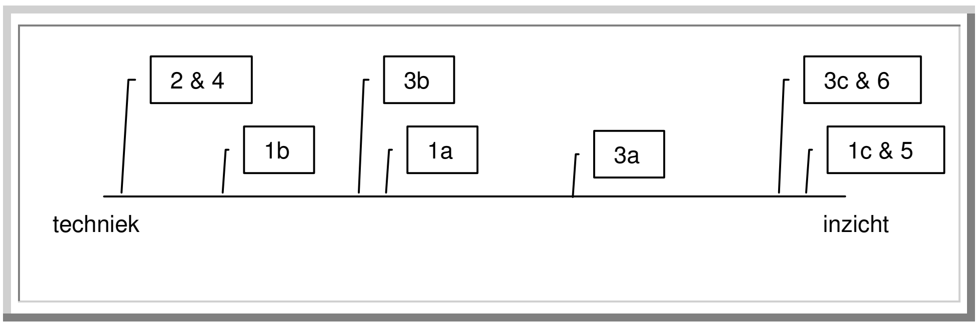
In tabel 3.1 is te zien dat op één na alle onderwerpen uit hoofdstuk 1 aanwezig zijn. Dat er geen opgave over het economische model is, komt vanwege ruimtegebrek. We hebben ervoor gekozen om de toetsvragen over dit onderwerp uit vooronderzoek 3 (zie deel 2, hoofdstuk 3) weg te laten omdat het één van de varianten van modelleren is. In het overzicht wordt dit onderwerp apart genoemd omdat het vooral voor de M-leerlingen een belangrijk onderwerp is. Door deze keuze neigt de eindtoets enigszins naar de N-kant.

Toetsopgaven die lijken op opgaven die leerlingen eerder hebben geoefend, zijn relatief makkelijk om te maken (nabije transfer). Wanneer de opgaven nauw aansluiten op de opgaven uit het boek of de SimQuest-simulaties dan wordt één van beide groepen bevoordeeld. We hebben daarom getracht ervoor te zorgen dat de toetsopgaven lijken op opgaven die beide of geen van beide groepen heeft gemaakt. Binnen de toetsopgaven zit soms één onderdeel dat lijkt op een SimQuest-opgave en daarna één onderdeel dat lijkt op een boekopgave. Dit betekent onder andere dat we opgaven met een rijke context, opgaven met een wiskundige context en opgaven zonder context aan de eindtoets hebben toegevoegd. In figuur 3.1 is voor de verschillende toetsopgaven aangegeven in hoeverre ze voor de condities leken op de tijdens de lessen gemaakte opgaven.



Figuur 3.1 *De mate van gelijkenis van de eindtoetsopgaven voor beide condities*

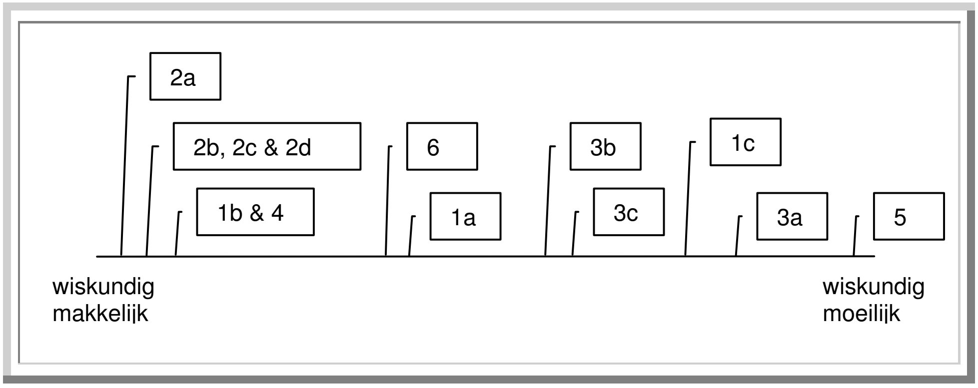
We spraken al vaker over opgaven die inzicht toetsen en opgaven die de beheersing van technieken toetsen. De eindtoets bevat opgaven van beide soorten. Een overzicht is gegeven in figuur 3.2. Om inzicht te toetsen hebben we ook opgaven toegevoegd waarbij de Grafische Rekenmachine niet kan worden ingezet omdat er met letters wordt gewerkt in plaats van met getallen. Leerlingen moeten bijvoorbeeld in een dergelijke opgave weten hoe ze een bereik kunnen bepalen en kunnen de zoomoptie (en bijbehorende afleesfunctie) die op de Grafische Rekenmachine zit, niet gebruiken.



Figuur 3.2 *De mate van techniek of inzicht van de verschillende opgaven uit de eindtoets*

Aansluitend hierop hebben we sommige opgaven ‘grafisch’ gemaakt. De leerlingen krijgen grafieken en niet de formule. Ze kunnen daardoor niet direct de Grafische Rekenmachine gebruiken, omdat de eerste stap het invoeren van een formule is. Een andere reden voor opname van dit soort opgaven was dat de leerlingen die met de SimQuest-simulaties gewerkt hebben, veel met grafieken hebben gewerkt. Om de opgaven op de eindtoets te laten lijken op de geoefende opgaven (zie bovenstaand punt), zijn er dus grafische opgaven aan de toets toegevoegd.

Een andere balans die we hebben geprobeerd te realiseren in de eindtoets is die tussen formeel wiskundig moeilijke - en makkelijke opgaven. Wanneer leerlingen zich hebben ingezet (opgaven gemaakt, opgelet tijdens de contacturen, enz.) moet het mogelijk zijn om voldoende punten te halen. Voor de sterke wiskundeleerlingen moeten er opgaven zijn, die ook voor hen lastig zijn. Een overzicht van de veronderstelde formele wiskundige moeilijkheidsgraad van de toetsopgaven is gegeven in figuur 3.3.



Figuur 3.3 *De veronderstelde formeel wiskundige moeilijkheidsgraad van de toetsopgaven*

3.2 Verwachtingen bij de eindtoetsopgaven

We hebben slechts voorzichtige verwachtingen over verschillen tussen de experimentele- en controle conditie op de eindtoets. Voor sterke, uitgesproken verwachtingen hebben we te beperkt inzicht in het leerproces van de leerlingen en de invloed daarop van de instructie. Bovendien is er de afweging in tijd tussen inoefenen en inzicht (zie onder andere deel 1, hoofdstuk 3.3). We hopen dan ook dat de eindtoets hier enig inzicht in geeft.

Een uitgebreide motivatie van onze voorzichtige verwachtingen is gegeven in bijlage B.10. In tabel 3.2 staan onze uiteindelijke verwachtingen.

Tabel 3.2 *Samenvatting verwachtingen toetsvragen*

toetsopgave	voorkeur voor controle (c) groep, experimentele (e) groep of neutraal (-)
1a	-
1b	c
1c	e
2	c
3a	-
3b	-
3c	e
4	c

5	e
6	e
totaal eindtoets	?

3.3 Scoringsvoorschrift

De eindtoets is nagekeken door twee personen, één van de onderzoekers en een wiskundedocent in opleiding. In bijlage B.9 is het scoringsvoorschrift gegeven. Er is één verschil tussen het scoringsvoorschrift en de uiteindelijke analyses. Bij opgave 5 van de eindtoets maken veel leerlingen de fout dat ze alleen naar de y waarden van de grenzen van het domein kijken. Deze twee waarden gebruiken ze om de vraag, wat het bereik is, te beantwoorden. De leerlingen die dit consequent doen scoren volgens het scoringsvoorschrift toch nog 5 van de 12 punten. Daarentegen geldt dat de leerlingen die bewust meer berekenen dan deze twee waarden en bij erop volgende stappen een fout maken, soms minder punten scoren. We gaven daarom de leerlingen die bij alle drie de deelopgaven deze fout gemaakt hebben in totaal 0 punten voor vraag 5. In onze analyses rekenen we met deze gecorrigeerde waarde.[1]

[1] De correctie is sub-optimaal. Leerlingen die een fout maken bij het berekenen van de standaardfout en leerlingen die niet alle deelvragen hebben gemaakt krijgen bijvoorbeeld wel punten. In verdere analyses zouden we de gecorrigeerde waarden en de ongecorrigeerde waarden kunnen geven. Omwille van de eenvoud geven we alleen de gecorrigeerde waarden.

4 Resultaten: beschrijving van de groepen

4.1 Beschrijving van de groepen

Zoals reeds in paragraaf 2.1 (dit deel) vermeld, was de verdeling van de groepen niet willekeurig. We beschrijven daarom eerst hoe de verschillende groepen eruit zagen en of beide groepen vergelijkbaar waren. We kijken daarbij per conditie naar de verdeling van leerlingen met een bepaald profiel, de verdeling van geslacht, de rapportcijfers en de resultaten op de voortoets.

4.1.1 De verdeling van de profielen over de condities

In de vierde klas hebben de leerlingen op de meeste scholen voor een profiel gekozen. Op een aantal scholen worden de leerlingen ook naar deze profielen ingedeeld. Op de meeste scholen (in het algemeen maar ook op de deelnemende scholen) maakt men slechts onderscheid tussen een M- en N-profiel (zie deel 1, paragraaf 2.2). In tabel 4.1 staan de gegevens van de verdeling van de leerlingen per profiel over de condities.

Tabel 4.1 *Verdeling van de leerlingen over de condities en profielen*

profiel		controle groep	experimentele groep	totaal
M	aantal	40	115	155
	verwacht aantal[1]	51,9	103,1	
N	aantal	100	163	263
	verwacht aantal[1]	88,1	174,9	
totaal	aantal	140	278	418

[1] Het gaat hier om de aantallen die verwacht mogen worden bij een willekeurige verdeling.

Bij beide profielen wijken de verwachte aantallen af van de werkelijke aantallen. Een Pearson Chi-kwadraat toets levert $\alpha = 0{,}013$ ($R^2 = 6{,}53$, $n = 418$, tweezijdig getoetst) op. De groepen zijn scheef verdeeld met in verhouding meer M-leerlingen in de experimentele groep en meer N-leerlingen in de controle groep.

4.1.2 De verdeling van geslacht over de condities

Omdat er meer leerlingen met het M-profiel in de experimentele groep zitten, en er over het algemeen meer vrouwen een M-profiel kiezen en mannen een N-profiel, verwachten we ook qua geslacht een scheve verhouding, met relatief meer vrouwen in de experimentele conditie.

Tabel 4.2 *Verdeling van de leerlingen over de condities en geslachten*

geslacht		controle groep	experimentele groep	totaal
man	aantal	76	130	206
	verwacht aantal[1]	69,0	137,0	
vrouw	aantal	64	148	212
	verwacht aantal[1]	71,0	141,0	
totaal	aantal	140	278	418

[1] Het gaat hier om de aantallen die verwacht mogen worden bij een willekeurige verdeling.

Uit de bovenstaande tabel (tabel 4.2) blijkt dat deze trend inderdaad aanwezig is. Er zitten relatief meer vrouwen in de experimentele groep zitten dan op basis van toeval verwacht mag worden (Pearson's Chi-kwadraat toets $\alpha = 0{,}089$, $R^2 = 2{,}11$, $n = 418$, eenzijdig getoetst).

Het totaalplaatje is gegeven in tabel 4.3.

Tabel 4.3 *Verdeling van de leerlingen over de condities, profielen en geslachten*

profiel	geslacht		controle groep	experimentele groep	Totaal
M	man	aantal	21	42	63
		verwacht aantal[1]	16,3	46,7	
	vrouw	aantal	19	73	92
		verwacht aantal[1]	23,7	68,3	
	totaal	aantal	40	115	155
N	man	aantal	55	88	143
		verwacht aantal[1]	54,4	88,6	
	vrouw	aantal	45	75	120
		verwacht aantal[1]	45,6	74,4	
	totaal	aantal	100	163	263
totaal		aantal	140	278	418

[1] Het gaat hier om de aantallen die verwacht mogen worden bij een willekeurige verdeling.

4.1.3 De voorkennis van leerlingen

De voorkennis van de leerlingen is bepaald aan de hand van hun overgangscijfers van 3 naar 4 VWO en de resultaten op de voortoets. Omdat er naar verhouding meer M-leerlingen in de experimentele conditie zitten, is de verwachting dat de experimentele groep ook naar verhouding lager scoort op voorkennis.

De scores op de voortoets

In de onderstaande tabel (tabel 4.4) staan de resultaten van de voortoets.

Tabel 4.4 *Scores op de voortoets*

conditie	profiel	geslacht	aantal	gemiddelde	standaard deviatie
controle conditie	M	man	21	16,57	4,94
		vrouw	19	18,95	5,03
		totaal	40	17,70	5,06
	N	man	55	20,95	6,54
		vrouw	45	20,82	7,42
		totaal	100	20,89	6,91

	totaal		140	19,98	6,58
experimentele conditie	M	man	42	12,69	5,99
		vrouw	73	11,31	5,66
		totaal	115	11,81	5,80
	N	man	88	16,22	8,06
		vrouw	75	16,85	7,41
		totaal	163	16,51	7,75
	totaal		278	14,56	7,37
totaal			418	16,38	7,56

Zoals verwacht scoort de experimentele conditie inderdaad lager dan de controle conditie. Het verschil bedraagt maar liefst ruim 5 punten op een totaal van maximaal 40. Een regressie-analyse, gebruik makend van het enter model, levert een significant model op ($F_{1,423} = 53,874$, $p < 0,001$) voor de voortoetsscores met de factor conditie. Het verschil in de gemiddelde score tussen beide condities is volgens dit model significant, $n = 418$, $df = 416$, $t = -7,34$, $p < 0,001$ (tweezijdig getoetst).

Dit komt niet alleen doordat er in verhouding meer leerlingen met een M-profiel in de experimentele conditie zitten. Wanneer we in tabel 4.4 kijken dan zien we dat uitgesplitst naar profiel en geslacht de experimentele groep telkens minimaal 3 punten lager scoort. Een regressieanalyse, gebruik makend van het enter model met de factoren conditie, geslacht, profiel en de interacties tussen deze drie, levert opnieuw een significant model op, $F_{7,410} = 14,140$, $p < 0,001$ (tweezijdig getoetst). Uit het model blijkt dat niet alleen de verdeling qua profiel en geslacht scheef is, maar dat de experimentele conditie in dit model ook lager scoort op de voortoets, $n = 418$, $df = 410$, $t = -6,57$, $p < 0,001$ (tweezijdig getoetst). Er is geen verschil in score op de voortoets voor de verschillende geslachten, $n = 418$, $df = 410$, $t = 0,487$, $p > 0,1$ (tweezijdig getoetst). Er is echter wel een significant verschil tussen de profielen, $n = 418$, $df = 410$, $t = 4,972$, $p < 0,001$ (tweezijdig getoetst). Er zijn geen interactie-effecten tussen conditie, profiel en geslacht (voor alle vier mogelijke interacties, namelijk conditie-profiel, conditie-geslacht, profiel-geslacht en conditie-profiel-geslacht), $p > 0,1$ (tweezijdig getoetst).

Correlatie met overgangscijfers

Hoe accuraat zijn de resultaten op de voortoets? Omdat we de overgangscijfers van de leerlingen hebben, kunnen we nagaan in hoeverre deze correleren met hun resultaten op de voortoets. Leerlingen komen van verschillende scholen. Daarom is het te verwachten dat de correlatie tussen overgangscijfers en voortoets niet heel hoog is. De rapportcijfers correleren significant met de scores op de voortoets, Spearman's Rho is gelijk aan 0,458 (n = 394[1]), $p < 0,001$ (tweezijdig getoetst). Kortom de uitkomsten voor de voortoets komen naar onze mening voldoende overeen met de resultaten die de leerlingen 'normaal' bij wiskunde scoren. Ze geven een redelijk accuraat beeld.

De scores op de voortoets: enkele kanttekeningen

Wanneer we naar de scores op de voortoets kijken, dan is er, naast een verschil in beide condities, een minstens even interessant zo niet veel interessanter uitkomst te rapporteren. Dat is namelijk de hoogte van die scores. De voortoets bestond uit opgaven over leerstof die in de derde klas behandeld was. De scores zijn, zo bezien, wel erg laag. Het hoogste gemiddelde (20,95) is net iets meer dan de helft van

[1] Van een aantal leerlingen is het overgangscijfer onbekend omdat ze bijvoorbeeld van het derde naar het vierde jaar van school zijn veranderd (vandaar dat n = 394 in plaats van 418).

het aantal mogelijke punten (40). Voor veel groepen is de score nog lager. De voorkennis is behoorlijk weggezakt.

De matige scores zijn misschien deels te weten aan het feit dat de tijd (met opzet) beperkt was. Veel leerlingen zijn niet aan alle opgaven toegekomen. De snelheid waarmee leerlingen werken is in dat geval onvoldoende. Met andere woorden hun kennis is onvoldoende geautomatiseerd. Ook dat rekenen we tot een gebrekkige voorkennis.

Een deel van de leerstof uit in de voortoets komt in hoofdstuk 1 in 4 VWO als herhaling aan de orde. Met deze lage scores is het maar de vraag of 'even opfrissen' voldoende is. Misschien moet de docent meer tijd besteden aan de (na)behandeling van deze voor bekend veronderstelde onderdelen.

4.1.4 De diepteklas

De diepteklas was een N-klas met in totaal 17 leerlingen. In deze klas zaten 3 vrouwen en 14 mannen. De scores van de diepteklas op de voortoets staan in tabel 4.5. Een regressieanalyse, gebruik makend van het enter model met de factoren geslacht en wel/niet diepteklas, levert geen significant model op ($F_{2,160} = 0{,}156$, $p = 0{,}856$) en geen significante verschillen tussen deze klas en de andere N-klassen in de experimentele conditie ($n=163$, $t = 0{,}216$, $p > 0{,}1$ tweezijdig getoetst).

Tabel 4.5 *Scores op de voortoets van diepteklas*

conditie	profiel	geslacht	aantal	gemiddelde	standaard deviatie
experimenteel	N	man	14	16,36	4,85
		vrouw	3	18,33	9,29
totaal			17	16,71	5,52

.

5 Resultaten: resultaten eindtoets

In deel 2 hoofdstuk 4 hebben we de aanwijzingen voor de docenten van de experimentele conditie beschreven. Deze waren nog niet onderzocht in de vooronderzoeken. Het blijkt dat de voorgestelde implementatie niet volledig haalbaar was voor docenten. We beschrijven dit in hoofdstuk 7. Eén van de oorzaken is ontbrekende faciliteiten (zie hoofdstuk 8). Een gevolg was onder andere dat de implementatie in enkele experimentele klassen vergelijkbaar was met de implementatie in het derde vooronderzoek. Tijdens observaties bleken vergelijkbare ongewenste situaties op te treden als in het derde vooronderzoek (zoals leerlingen die in die klassen ook tijdens het contactuur spelletjes op internet zaten te spelen), situaties die we met de nieuwe voorgestelde implementatie juist hoopten te voorkomen. Bij het lezen van dit hoofdstuk is het van belang om in gedachten te houden dat de implementatie in de experimentele klassen vaak achter bleef bij de verwachtingen en dat dit (mogelijk) in het nadeel heeft gewerkt van de experimentele conditie.

5.1 De eindkennis van leerlingen op de complete eindtoets

Van niet alle leerlingen is een volledige dataset verkregen. In sectie 2.5 is aangegeven dat uiteindelijk van 418 (van 470) leerlingen de data in alle analyses konden worden gebruikt. De betrouwbaarheid van de toets is adequaat, Cronbach's α is 0,68.

5.1.1 De scores op de eindtoets van de totale groep

In tabel 5.1 staan de resultaten van de eindtoets. Een regressie-analyse, gebruik makend van het enter model, levert een significant model ($F_{7,410} = 15{,}805$, $p < 0{,}001$) op voor de eindtoetsscores met de factoren conditie, profiel, geslacht en de interacties tussen deze drie (conditie-profiel, conditie-geslacht, profiel-geslacht, conditie-profiel-geslacht).

Tabel 5.1 *Resultaten op de eindtoets*

conditie	profiel	geslacht	aantal	gemiddelde	standaard deviatie
controle conditie	M	man	21	23,62	11,13
		vrouw	19	23,76	7,34
	N	man	55	32,82	10,35
		vrouw	45	35,02	10,40
	totaal		140	30,92	11,07
experimentele conditie	M	man	42	23,31	8,51
		vrouw	73	20,93	7,32
	N	man	88	32,06	10,14
		vrouw	75	29,04	10,82
	totaal		278	26,98	10,46
totaal			418	28,30	10,82

Volgens het model scoort de controle groep opnieuw significant beter dan de experimentele groep, n = 418, df = 410, t = -2,301, p = 0,022 (tweezijdig getoetst). Echter, het relatieve verschil (absolute verschil / totaal aantal punten) tussen de gemiddelde score van beide condities is afgenomen (van 13,6 % naar 6,3 %).

Een regressie-analyse, gebruik makend van het enter model, levert geen significant model op ($F_{3,151}$ = 1,196, p = 0,314) voor de eindtoetsscores van alleen de M-leerlingen met de factoren conditie, geslacht en de interactie tussen conditie en geslacht. Wanneer we desondanks dit model gebruiken en naar de afzonderlijke profielen kijken dan is het verschil tussen de controle groep en de experimentele groep voor de M-leerlingen niet langer significant, n = 155, t = -1,076, p > 0,1 (tweezijdig getoetst).

Een regressie-analyse, gebruik makend van het enter model, levert een significant model ($F_{3,259}$ = 3,836, p = 0,010) voor de eindtoetsscores van alleen de N-leerlingen met de factoren conditie, geslacht en de interactie tussen conditie en geslacht. De controle conditie scoort nog wel significant hoger dan de experimentele conditie bij de N-leerlingen, n = 263, t = -2,533, p = 0,012 (tweezijdig getoetst).

De vraag is nu of deze verschillen blijven bestaan wanneer we corrigeren voor het verschil in voorkennis. Een regressie-analyse, gebruik makend van het enter model, levert een significant model op ($F_{8,409}$ = 25,361, p < 0,001) voor de eindtoetsscores met de factoren conditie, profiel, geslacht, de interacties tussen deze drie en de scores op de voortoets als covariaat. De uitkomst laat zien dat de factor conditie nu niet langer significant is, n = 418, df = 409, t = 0,260, p = 0,80 (tweezijdig getoetst). De factor profiel is significant van betekenis, n = 418, df = 409, t = 7,01, p < 0,001 (eenzijdig getoetst), de factor geslacht niet (tweezijdig getoetst), n = 418, df = 409, t = -0,93, p > 0,1. Het resultaat op de voortoets is significant van invloed op het resultaat op de eindtoets, n = 418, df = 409, t = 8,54, p < 0,001 (eenzijdig getoetst). Er zijn geen significante interactie-effecten voor de totale groep leerlingen.

5.1.2 De scores op de eindtoets in de diepteklas

In tabel 5.2 zijn de resultaten op de eindtoets van de diepteklas gegeven.

Tabel 5.2 *Resultaten op de eindtoets diepteklas*

conditie	profiel	geslacht	aantal	gemiddelde	standaard deviatie
experimentele conditie	N	man	14	34,89	11,67
		vrouw	3	32,00	18,66
totaal			17	34,38	12,47

Een regressie-analyse, gebruik makend van het enter model, levert geen significant model op ($F_{3,113}$ = 0,373, p = 0,773) voor de eindtoetsscores van de controleleerlingen met een N-profiel en de leerlingen uit de diepteklas met de factoren conditie, geslacht en de interactie tussen conditie en geslacht. De diepteklas scoort volgens dit model vergelijkbaar met de N-leerlingen uit de controle conditie, n = 117, df = 113, t = -0,281, p > 0,1 (tweezijdig getoetst).

Dezelfde analyse, maar nu met voorkennis als covariaat toegevoegd, levert wel een significant model op ($F_{4,112}$ = 3,145, p = 0,017). Het resultaat is een model voor de eindtoetsscores van de controleleerlingen met een N-profiel en de leerlingen uit de diepteklas met de factoren conditie, geslacht en de interactie tussen conditie en geslacht en met de voortoetsscores als covariaat. Wanneer we corrigeren voor de voortoets resultaten dan scoren beide groepen volgens dit model vergelijkbaar, n = 117, df = 112, t = 0,200, p > 0,1 (tweezijdig getoetst).

Een regressie-analyse, gebruik makend van het enter model, levert een significant model op ($F_{3,159}$ = 19,793, p < 0,001) voor de eindtoetsscores van de experimentele leerlingen met een N-profiel met de factoren wel/niet diepteklas, geslacht en met de voortoetsscores als covariaat. De diepteklas scoort vergelijkbaar met de overige experimentele N-klassen, t = 0,839, p > 0,1 (tweezijdig getoetst).

5.2 Enkele opvallende resultaten voor delen van de eindtoets

Voor iedere opgave van de eindtoets hebben we gekeken hoe de leerlingen uit de verschillende groepen daarop scoorden. We bekeken de groep als geheel (n = 418) en de beide profielen apart (bij N geldt n = 263, bij M geldt n = 155). We voerden telkens een regressie-analyse uit. Bij de totale groep was dat met de factoren conditie, profiel, geslacht, de vier interacties tussen deze drie en de score op de voortoets als covariaat. Bij de afzonderlijke profielen was dat met de factoren conditie, geslacht, de interactie tussen conditie en geslacht en de score op de voortoets als covariaat. In deze paragraaf bespreken we enkele opvallende resultaten.

Conditie

De totaalscore verschilt niet tussen de beide condities. Is er wel een verschil te vinden op onderdelen van de toets? In paragraaf 3.2 gaven we onze voorzichtige verwachtingen hierover aan.

Voor alle opgaven waarbij we in tabel 3.2 aangaven te verwachten dat de controle leerlingen beter zouden scoren, hebben we de scores bij elkaar opgeteld. Het resultaat voor deze totaalscore is voor beide condities met elkaar vergeleken. Een regressie-analyse, gebruik makend van het enter model, levert een significant model op ($F_{8,409}$ = 10,372, p < 0,001) met de factoren conditie, profiel, geslacht en de vier interacties tussen deze drie en met als covariaat de scores op de voortoets. De resultaten van dit model laten zien dat de controle leerlingen significant beter scoren op deze opgaven, n = 418, df = 409, t = -1,763, p = 0,040 (eenzijdig getoetst). Verder komt een trend naar voren dat vrouwen beter scoren in de controle conditie en mannen in de experimentele conditie (n = 418, df = 409, t = -1,688, p = 0,092 tweezijdig getoetst). Dit resultaat blijkt vaker voor te komen. We komen hier later op terug.

Voor de opgaven waarvan we verwachtten dat de experimentele leerlingen beter zouden scoren, deden we hetzelfde. Een regressie-analyse voor deze totaalscores, gebruik makend van het enter model, levert een significant model op ($F_{8,409}$ = 10,858, p < 0,001) met de factoren conditie, profiel, geslacht en de vier interacties tussen deze drie en met als covariaat de scores op de voortoets. Beide condities scoren nu gelijk (n = 418, df = 409, t = 0,466, p = 0,321 eenzijdig getoetst).[1] Uit de resultaten blijkt dat er een trend is dat de mannen beter scoren dan de vrouwen (n = 418, df = 409, t = -1,835, p = 0,067 tweezijdig getoetst). Volgens figuur 3.3 gaat het in deze analyse om opgaven waarvan de moeilijkheidsgraad redelijk hoog is. Uit onderzoek (Spencer, Steele, & Quinn, 1999) is gebleken dat wanneer wiskunde opgaven moeilijk worden mannen beter scoren dan vrouwen. Onze resultaten komen hiermee overeen. Tot slot komt er uit de resultaten een trend naar voren dat er een interactie-effect is tussen conditie en profiel (n = 418, df = 409, t = -1,751, p = 0,081 tweezijdig getoetst): de M leerlingen doen het beter in de experimentele conditie, terwijl de N-leerlingen het beter doen in de controle conditie.

Tot slot hebben we opnieuw regressie-analyses uitgevoerd, maar nu met de methode *stepwise*. Voor de totale groep levert dit voor de eindtoets scores een significant model op (R^2 = 0,325, $F_{3,414}$ = 66,557, p < 0,001) met drie voorspellers, namelijk scores op de voortoets (beta = 0,380, p < 0,001 eenzijdig getoetst), profiel (beta = 0,302; N-profiel scoort beter, p < 0,001 eenzijdig getoetst) en interactie tussen geslacht en conditie (beta = -0,095; vrouwen scoren beter in controle conditie en mannen scoren beter in experimentele conditie, p = 0,020 tweezijdig getoetst). Bij deze methode komt de interactie tussen conditie en geslacht dus als significante voorspeller naar voren. Analyses met de methode stepwise

[1] Van opgave 3c verwachtten we dat de experimentele conditie deze opgave beter zou maken. Uit de resultaten van de regressie-analyse van de totale groep komt dit inderdaad naar voren (t = 2,05; p = 0,021). Bovendien scoort de experimentele conditie, onverwacht, over heel opgave 3 beter dan de controle conditie (t = 2,07; p = 0,039 tweezijdig getoetst). Voor de overige deelopgaven van opgave 3 geldt dat geen van beide condities significant beter scoort dan de andere.

voor de totaal scores van ‘de verwachting controle beter’ en voor de totaal scores van ‘de verwachting experimentele beter’ leveren dezelfde resultaten als de analyses met de methode enter.[2]

Interactie conditie en geslacht

Bij een aantal opdrachten scoren mannen beter in de experimentele groep en vrouwen beter in de controle groep. Voor een aantal opgaven geldt dit voor beide profielen, voor een aantal opgaven alleen voor de leerlingen met een N-profiel. Ook is er een aantal maal sprake van een trend. De opgaven waarbij sprake is van een significant effect of een trend staan in tabel 5.3.

Tabel 5.3 *Interactie tussen conditie en geslacht (tweezijdig getoetst)*

toetsopgave	p < 0,05	0,05 ≤ p < 0,1
1a totaal	man: e, vrouw: c t = -2,07; p = 0,039	
1 totaal		man: e, vrouw: c t = -1,94; p = 0,053
2b	N-leerlingen man: e, vrouw: c t = -2,06; p = 0,040	
2 totaal	N-leerlingen man: e, vrouw: c t = -2,11; p = 0,036	
5c		N-leerlingen man: e, vrouw: c t = -1,78; p = 0,076
6	voor een aantal situaties	voor een aantal situaties
totaal	N-leerlingen man: e, vrouw: c t = -2,16; p = 0,032	

[2] Voor de totaal scores van ‘de verwachting controle beter’ levert een regressieanalyse met de methode stepwise, een significant model op (R2 = 0,238, F2,415 = 64,983, p < 0,001) met significante voorspellers, namelijk scores op de voortoets (beta = 0,364, p < 0,001 eenzijdig getoetst) en profiel (beta = 0,232; N-profiel scoort beter, p < 0,001 eenzijdig getoetst). Wanneer we de grenzen van de analyse groter kiezen om ook trends mee te nemen (opnemen bij 0,1 en verwerpen bij 0,11) krijgen we een significant model (R2 = 0,250, F4,413 = 34,335, p < 0,001) met vier voorspellers, namelijk scores op de voortoets (beta = 0,336, p < 0,001 eenzijdig getoetst), profiel (beta = 0,222; N-profiel scoort beter, p < 0,001 eenzijdig getoetst), conditie (beta = -0,082; controle conditie scoort beter, p = 0,072 tweezijdig getoetst) en interactie tussen geslacht en conditie (beta = -0,075; vrouwen scoren beter in controle conditie en mannen scoren beter in experimentele conditie, p = 0,082 tweezijdig getoetst).

Voor de totaal scores van ‘de verwachting experimentele beter’ levert een regressieanalyse met de methode stepwise, een significant model op (R^2 = 0,155, $F_{3,414}$ = 39,225, p < 0,001) met twee significante voorspellers, namelijk profiel (beta = 0,251; N-profiel scoort beter, p < 0,001 eenzijdig getoetst) en scores op de voortoets (beta = 0,242, p < 0,001 eenzijdig getoetst). Wanneer we opnieuw de grenzen van de analyse groter kiezen om ook trends mee te nemen (opnemen bij 0,1 en verwerpen bij 0,11) krijgen we een significant model (R^2 = 0,165, $F_{4,413}$ = 27,200, p < 0,001) met drie voorspellers, namelijk profiel (beta = 0,241; N-profiel scoort beter, p < 0,001 eenzijdig getoetst), scores op de voortoets (beta = 0,241, p < 0,001 eenzijdig getoetst) en geslacht (beta = -0,076; mannen scoren beter, p = 0,095 tweezijdig getoetst).

Totaal overzicht

Tot slot geven we in tabel 5.4 per opgave de resultaten weer voor alle p waarden kleiner dan 0,1.

Tabel 5.4 *Overzicht per opgave van de totale groep (n = 418)*

toets-opgave	conditie (c) [2]	profiel (p) [2]	geslacht (g) [2]	interactie c en p [2]	interactie c en g [2]	interactie p en g [2]	interactie c, p en g [2]	totaal [1,2]
1	-	N t = 4,29 p < 0,001	-	-	man: e vrouw: c t = -1,94 p = 0,053	-	-	t = 4,52 p < 0,001
2	-	N t = 3,59 p < 0,001	-	-	-	-	-	t = 6,29 p < 0,001
3	e t = 2,07 p = 0,039	N t = 5,44 p < 0,001	-	-	-	-	-	t = 5,99 p < 0,001
4	-	N t = 2,84 p = 0,005	-	-	-	-	-	t = 4,83 p < 0,001
5	-	N t = 4,30 p < 0,001	-	-	-	-	-	t = 4,00 p < 0,001
6	-	N t = 1,70 p = 0,091	man t = -2,16 p = 0,032	-	-	-	N-v: c M-v: e N-man: e M-man: c t = -1,75 p = 0,081	t = 3,34 p = 0,001
totaal eindtoets	-	N t = 7,01 p < 0,001	-	-	-	-	-	t = 8,54 p < 0,001

[1] telkens hoe hoger totaal (voortoetsscore), hoe hoger de score op de toetsopgave
[2] alle niet genoemde p's zijn hoger dan 0,1

5.3 Tempo

Zoals in paragraaf 3.1 beschreven bevat de eindtoets een flink aantal items gegeven de beschikbare tijd. Niet alle leerlingen zullen daarom, zo werd verwacht, alle opgaven binnen de tijd afkrijgen. Omdat opgave 6 een relatief makkelijke opgave is, waarbij snel een antwoord aangekruist kan worden, hebben relatief veel leerlingen opgave 5 overgeslagen. Daarom kijken we nu specifiek naar opgave 5 van de eindtoets. In tabel 5.5 is gegeven hoeveel leerlingen opgave 5 gemaakt hebben.

Tabel 5.5 *Het aantal leerlingen dat opgave 5 van de eindtoets gemaakt heeft*

conditie	profiel	geslacht	aantal	gemaakt[1]	percentage[2]
controle conditie	M	man	21	14	66,7
		vrouw	19	14	73,7
	N	man	55	49	89,1
		vrouw	45	39	86,7
	totaal		140	116	82,9
experimentele conditie	M	man	42	24	57,1
		vrouw	73	38	52,1
	N	man	88	72	81,8
		vrouw	75	53	70,7
	totaal		278	187	67,3
totaal			418	303	72,5

[1] Ook leerlingen die alleen deelvraag a of de deelvragen a en b gemaakt hebben, zijn meegeteld
[2] Dit is het percentage leerlingen dat opgave 5 gemaakt heeft van het totale aantal leerlingen in die groep

Voor iedere deelgroep (geslacht/profiel) geldt dat het percentage leerlingen dat opgave 5 heeft gemaakt voor de experimentele conditie lager is dan bij de controle conditie. Het gemiddelde van deze vier percentages is voor de controle conditie 79,1% en voor de experimentele conditie 65,4%. We veronderstelden dat in de experimentele conditie de toegenomen aandacht voor inzicht ten koste kan gaan van het automatiseren. Het is te verwachten dat dit leidt tot een lager werktempo. De gegevens van het aantal leerlingen dat opgave 5 gemaakt heeft, lijkt deze redenering te ondersteunen.

We hebben dit met een logistische regressie[3] getoetst, gebruikmakend van de methode *forward* waarbij we trends ook meenemen (grenzen bij 0,1 en 0,11), met de factoren, conditie, profiel, geslacht en de interacties tussen deze drie en met de score op de voortoets als covariaat. Dit levert een significant model op met drie voorspellers (R^2 = 0,099 (Cox & Schnell), 0,143 (Nagelkerke), model χ^2 (3) = 43,672). Er zijn significante effecten van het profiel (N maakt de opgave vaker, n = 418, exp(B) = 2,368, p < 0,001 eenzijdig getoetst), voortoets (hoe hoger de score, hoe vaker gemaakt, n = 418, exp(B) = 0,945, p = 0,001 eenzijdig getoetst) en conditie (n = 418, exp(B) = 0,623, p = 0,047 eenzijdig getoetst). Het blijkt dat de leerlingen uit de controle conditie significant vaker opgave 5 gemaakt hebben.

5.4 Moeilijkheidsgraad en transfer

In figuur 3.3 is de veronderstelde formeel wiskundige moeilijkheid aangegeven. Stemmen de resultaten hiermee overeen? In tabel 5.6 staan voor iedere deelopgave de scores van de leerlingen.

[3] Omdat de uitvoervariabele slechts de uitvoer wel gemaakt / niet gemaakt heeft, is gebruik gemaakt van een logistische regressie.

Tabel 5.6 *Scores op deelvragen door de totale groep*

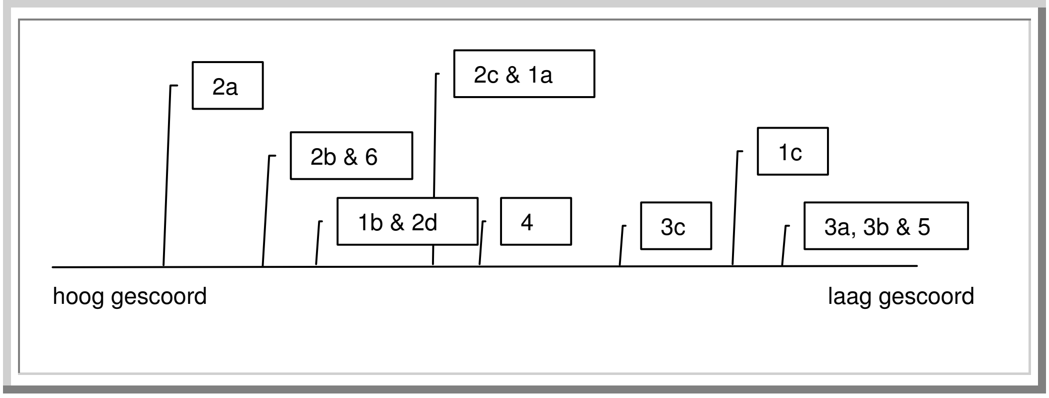
<table>
<tr><th>toets-opgave</th><th>gemiddelde</th><th>standaard-deviatie</th><th>percentage[1] (%)</th><th>veronderstelde rang[2]</th><th>daadwerkelijke rang[3]</th></tr>
<tr><td>1a</td><td>5,12</td><td>2,91</td><td>51,2</td><td>6</td><td>5</td></tr>
<tr><td>1b</td><td>1,83</td><td>1,21</td><td>61,0</td><td>3</td><td>3</td></tr>
<tr><td>1c</td><td>0,73</td><td>0,81</td><td>36,5</td><td>9</td><td>8</td></tr>
<tr><td>2a</td><td>1,70</td><td>0,67</td><td>85,0</td><td>1</td><td>1</td></tr>
<tr><td>2b</td><td>2,10</td><td>1,10</td><td>70,0</td><td rowspan="3">2</td><td rowspan="3">4</td></tr>
<tr><td>2c</td><td>1,03</td><td>0,85</td><td>51,5</td></tr>
<tr><td>2d</td><td>1,77</td><td>1,18</td><td>59,0</td></tr>
<tr><td>3a</td><td>1,11</td><td>1,69</td><td>22,2</td><td>10</td><td>9</td></tr>
<tr><td>3b</td><td>0,79</td><td>1,23</td><td>19,8</td><td>7</td><td>11</td></tr>
<tr><td>3c</td><td>1,13</td><td>1,30</td><td>37,7</td><td>8</td><td>7</td></tr>
<tr><td>4</td><td>1,90</td><td>1,33</td><td>47,5</td><td>4</td><td>6</td></tr>
<tr><td>5a</td><td>0,96</td><td>1,38</td><td>24,0</td><td rowspan="3">11</td><td rowspan="3">10</td></tr>
<tr><td>5b</td><td>0,86</td><td>1,45</td><td>21,5</td></tr>
<tr><td>5c</td><td>0,70</td><td>1,38</td><td>17,5</td></tr>
<tr><td>6</td><td>6,61</td><td>2,98</td><td>66,1</td><td>5</td><td>2</td></tr>
</table>

[1] Dit is het percentage van het maximaal aantal te behalen punten voor deze deelopgave behaald door de totale groep
[2] De opdrachten zijn op volgorde van veronderstelde moeilijkheid gezet, waarbij enkele opgaven samen zijn genomen.
[3] De opdrachten zijn op volgorde van het behaalde percentage gezet, waarbij enkele opgaven samen zijn genomen.

Opgaven 3b en 4 wordt minder goed beantwoord dan verwacht. Opgave 6 wordt beter beantwoord dan verwacht. In figuur 5.1 zijn de opgaven op rij gezet aan de hand van de scoringspercentages. De veronderstelde moeilijkheid correleert goed met het scoringspercentage, $r_s = 0{,}83$.[4] In grote lijnen stemmen de gevonden scores overeen met de veronderstelde moeilijkheid

Wanneer we de rangorde voor beide condities vergelijken, blijken deze in grote mate overeen te komen, $r_s = 0{,}95$. Kortom opgaven die laag gescoord zijn, zijn door beide condities slecht gemaakt en opgaven die hoog gescoord zijn, zijn door beide condities goed gemaakt.

[4] Bij deze berekening is geen rekening gehouden met de afstand tussen de verschillende percentages.



Figuur 5.1 *Deelvragen van de eindtoets op volgorde van scoringspercentage gezet*

Eventuele verbanden tussen factoren als profiel, voorkennis, conditie en veronderstelde makkelijke (1b, 2 en 4) en moeilijke (1c, 3 en 5) opgaven zijn onderzocht. De verondersteld makkelijke opgaven correleren met de verwachting 'controle beter' (zie voor de resultaten paragraaf 5.2 [5]) De verondersteld moeilijke opgaven worden beter gemaakt door leerlingen met een N-profiel. Hoe hoger de voortoets score, hoe hoger deze score.[6]

We hebben vervolgens gekeken naar de relatie tussen de daadwerkelijk hooggescoorde opgaven (70 % of hoger) en een aantal factoren. Een regressie-analyse, gebruik makend van het enter model, levert een significant model op ($F_{8,409}$ = 5,968, p < 0,001) voor deze scores met de factoren conditie, profiel, geslacht en de interacties tussen deze drie en de scores op de voortoets als covariaat. De factor conditie is niet significant, n = 418, df = 409, t = -0,249, p > 0,1 tweezijdig getoetst. De factor profiel is significant van betekenis, n = 418, df = 409, t = 2,39, p = 0,009 eenzijdig getoetst (de N-leerlingen scoren significant hoger), de factor geslacht is significant van betekenis, n = 418, df = 409, t = -1,976, p = 0,049 tweezijdig getoetst (mannen scoren significant hoger) en het resultaat op de voortoets is significant van invloed, n = 418, df = 409, t = 4,47, p < 0,001 (eenzijdig getoetst). Tot slot is er een significant interactie-effect tussen conditie, profiel en geslacht, n = 418, df = 409, t = -2,18, p = 0,030 tweezijdig getoetst (de vrouwelijke M-leerlingen scoren beter in de experimentele conditie, de mannelijke M-leerlingen scoren beter in de controle conditie, de vrouwelijke N-leerlingen scoren beter in de controle conditie en de mannelijke N-leerlingen scoren beter in de experimentele conditie). Er zijn verder geen significante interactie-effecten (tweezijdig getoetst).

Regressieanalyses voor de daadwerkelijk laag gescoorde opgaven (30 % of lager) leiden niet tot opmerkelijke resultaten.[7] De uitkomst dat mannen niet beter of slechter presteerden op

[5] Deze opgaven worden beter gemaakt door leerlingen met een N-profiel en hoe hoger de voortoets score, hoe hoger deze score. Bovendien is er een trend dat de controle conditie beter scoort en dat vrouwen het beter doen in de controle conditie en mannen het beter doen in de experimentele conditie.

[6] Een regressie-analyse, gebruik makend van het enter model, levert een significant model op ($F_{8,409}$ = 22,651, p < 0,001) voor de scores 'met een hoge veronderstelde moeilijkheidsgraad' met de factoren conditie, profiel, geslacht en de interacties tussen deze drie en de scores op de voortoets als covariaat. Dit model levert dat de factor conditie niet significant is, n = 418, df = 409, t = 0,879, p = 0,38 (tweezijdig getoetst). De factor profiel is significant van betekenis; N-leerlingen scoren beter, n = 418, df = 409, t = 7,98, p < 0,001 (eenzijdig getoetst), de factor geslacht niet, n = 418, df = 409, t = -1,05, p > 0,1 (tweezijdig getoetst) en het resultaat op de voortoets is significant van invloed, n = 418, df = 409, t = 6,89, p < 0,001 (eenzijdig getoetst). Er zijn geen significante interactie-effecten voor de totale groep leerlingen (tweezijdig getoetst).

[7] Een regressie-analyse, gebruik makend van het enter model, levert een significant model op ($F_{8,409}$ = 15,183, p < 0,001) voor deze scores met de factoren conditie, profiel, geslacht en de interacties tussen deze drie en de scores op de voortoets als covariaat. Dit model levert dat de factor conditie niet significant is, n = 418, df = 409, t =

daadwerkelijk laag gescoorde opgaven is echter in tegenspraak met de eerder besproken bevindingen dat mannen vaak hoger scoren op moeilijke wiskundeopdrachten (Spencer et al., 1999).

Tot slot kijken we nog naar de transfer. Zoals in figuur 3.1 is aangegeven, hebben we voor beide condities apart de mate van transfer bepaald aan de hand van verschillende opgaven omdat we de mate van transfer typeren aan de hand van de geoefende opgaven. Voor de controle conditie is de indeling dezelfde als voor de opgaven met de verwachting ‘controle beter’ (zie voor de resultaten opnieuw paragraaf 5.2). Maar voor de transfer voor de experimentele groep zijn er enkele kleine afwijkingen. We nemen de verre transfer voor deze groep door de resultaten van 1b, 2, 3b, 4 en 5 op te tellen. We nemen de nabije transfer voor deze groep door de resultaten van 1c, 3c en 6 op te tellen.

Een regressie-analyse, gebruik makend van het enter model, levert een significant model op ($F_{8,409}$ = 22,406, p < 0,001) voor de score van de *verre transfer* met de factoren conditie, profiel, geslacht en de interacties tussen deze drie en de scores op de voortoets als covariaat. De factor conditie is niet significant, n = 418, df = 409, t = -1,042, p = 0,30 (tweezijdig getoetst). De factor profiel is significant van betekenis (N scoort beter), n = 418, df = 409, t = 6,74, p < 0,001 (eenzijdig getoetst), de factor geslacht niet, n = 418, df = 409, t = 0,25, p > 0,1 (tweezijdig getoetst), er is een significant interactie-effect tussen geslacht en conditie n = 418, df = 409, t = -1,962, p = 0,050 tweezijdig getoetst (de vrouwen doen het beter in de controle groep, terwijl de mannen het beter doen in de experimentele groep) en het resultaat op de voortoets is significant van invloed, n = 418, df = 409, t = 7,63, p < 0,001 (eenzijdig getoetst).

Een regressie-analyse, gebruik makend van het enter model, levert een significant model op ($F_{8,409}$ = 5,779, p < 0,001) voor de score van de *nabije transfer* met de factoren conditie, profiel, geslacht en de interacties tussen deze drie en de scores op de voortoets als covariaat. De factor conditie is niet significant, n = 418, df = 409, t = 0,983, p = 0,33 (tweezijdig getoetst). De factor profiel is significant van betekenis, n = 418, df = 409, t = 3,56, p < 0,001 (eenzijdig getoetst), de factor geslacht ook; mannen scoren significant beter, n = 418, df = 409, t = -2,28, p = 0,023 (tweezijdig getoetst) en het resultaat op de voortoets is significant van invloed, n = 418, df = 409, t = 3,95, p < 0,001 (eenzijdig getoetst). Er zijn geen significante interactie-effecten voor de totale groep leerlingen.

0,472, p > 0,1 (tweezijdig getoetst). De factor profiel is significant van betekenis, n = 418, df = 409, t = 5,74, p < 0,001 eenzijdig getoetst (de N-leerlingen scoren significant hoger), de factor geslacht is niet significant van betekenis, n = 418, df = 409, t = -0,389, p > 0,1 (tweezijdig getoetst) en het resultaat op de voortoets is significant van invloed, n = 418, df = 409, t = 6,23, p < 0,001 (eenzijdig getoetst). Er zijn geen significante interactie-effecten voor de totale groep leerlingen(tweezijdig getoetst).

6 Resultaten: observaties van diepteklas

In deel 2, hoofdstuk 5 deden we een aantal suggesties voor de inbedding van het materiaal. Tijdens het grootschalig onderzoek is één klas vrijwel ieder contactuur geobserveerd. Aan de hand van de in deze klas verzamelde data gaan we in dit hoofdstuk na hoe deze suggesties uitpakten.

6.1 Zelf onderzoeken?!

In de literatuur wordt vaak gesproken over leerlingen die enthousiast aan de slag gaan wanneer ze hun eigen onderzoek mogen uitvoeren (bijvoorbeeld Tsui & Treagust, 2003). Voldoet het ontwikkelde materiaal aan de voorwaarden om dit te realiseren? Voeren leerlingen enthousiast eigen onderzoek uit met het ontwikkelde materiaal? In het derde vooronderzoek zagen we hier nauwelijks iets van en leken leerlingen, behalve aan het begin van de lessenserie, ook nauwelijks enthousiast. Ook in het grootschalig onderzoek lijkt de animo voor zelf onderzoeken niet groot te zijn.

In de geobserveerde diepteklas zijn leerlingen over het algemeen tijdens de zelfwerktijd niet hun eigen vragen aan het onderzoeken. Er is geen opleving in de klas over iets wiskundigs dat leerlingen ontdekt hebben. Die is er wel als enkele leerlingen iets 'vreemds' in de animatie ontdekken (zie figuur 6.1 eerste voorbeeld). Dat heeft echter niets met wiskunde van doen, maar is slechts het gegeven dat er na manipulatie rare draaiende wieken in de animatie zitten.

> Een aantal leerlingen heeft ontdekt dat je delen van de animatie kunt verslepen. Wanneer je dan op start drukt, draaien de wieken van de windmolen raar in het rond. Dit levert een hoop hilariteit op. Andere leerlingen proberen dit ook voor elkaar te krijgen. Twee leerlingen zijn fanatiek aan het uitproberen hoe raar ze de animatie kunnen krijgen.
>
> diepteklas (22-09-05), grootschalig onderzoek

> Een aantal leerlingen heeft gezien dat als je de verschillende schermen over elkaar heen schuift (bv. de interface over de opdracht) en dan weer weghaalt, je dan een grijs scherm krijgt. Ze spelen hier ijverig mee en laten resultaten aan hun buren zien.
>
> diepteklas (29-09-05), grootschalig onderzoek

Figuur 6.1 *Leerlingen zijn erg actief met het onderzoeken van 'rarigheden' in het programma*

Iets soortgelijks zagen we ook in vooronderzoek 3 waar één leerling veel met het interactieve gedeelte deed "omdat die zo lief lacht". Thuis gaan de leerlingen niet zelf aan de slag met de SimQuest-simulaties (zie figuur 6.2). Het enthousiasme lijkt klein.

> Terug naar het huiswerk. De docent vraagt de leerlingen wie wat gedaan heeft aan het leerstofoverzicht en de simulaties. Niemand heeft iets aan een van deze twee gedaan. De docent vraagt de leerlingen waarom ze niets aan de simulaties hebben gedaan. Een antwoord is 'geen zin'. Een ander heeft de vorige middag de hele tijd geslapen. De volgende dacht dat hij voorliep, omdat het niet in de les gedaan was. Een ander heeft eerst het gewone huiswerk gedaan en wilde later nog met de computer aan de slag maar dat is er niet meer van gekomen. Iemand merkt op dat ze liever gewoon uit het boek werkt. De docent trekt de conclusie dat hij dan in de klas maar meer aan de computer moet doen in de les. Hij zegt dat hij geen tijd aan het boek besteedt, tenzij de leerlingen daarom vragen.
>
> Na afloop van de les is er enige tijd om na te praten met de docent. De docent geeft een reactie op het feit dat niemand thuis iets heeft gedaan. De docent had zelf wel verwacht dat een aantal niets gedaan zouden hebben, maar helemaal niemand had hij niet verwacht. Hij verwacht niet dat ze thuis speciaal voor dit huiswerk de computer aanzetten.
>
> diepteklas (27-09-05), grootschalig onderzoek

Figuur 6.2 *Gebrek aan enthousiasme van leerlingen om zelf thuis met simulaties aan de slag te gaan*

In de loop van de lessen verandert dit. Een aantal leerlingen gaat wel thuis aan de slag. Dit blijkt onder andere doordat zij tijdens klassengesprekken aangeven zelf andere oplossingen gevonden te hebben of dat zij thuis problemen met de SimQuest-applicaties hadden en maar de helft van het interactieve gedeelte kregen. Een deel van deze verandering komt mede omdat de docent aangeeft dat hij van de leerlingen verwacht dat ze de volgende les een aantal oplossingen of schetsen in hun schrift moeten hebben.

In de vooronderzoeken zagen we dat er grote verschillen zitten tussen de mate waarin leerlingen de opdracht bestuderen. Sommige leerlingen gaan er heel snel doorheen. Ook bij de geobserveerde les in de diepteklas gebeurt in eerste instantie iets soortgelijks. De docent speelt hier in zijn derde klassikale les tijdens een klassengesprek op in (zie figuur 6.3).

> De docent begint met 'Ik kreeg de reactie dat een aantal van jullie snel klaar is met de opdrachten. Ik ben gisteravond bezig geweest en ik was helemaal niet snel klaar. In eerste instantie misschien wel, maar ik kwam erachter dat er veel meer achter zit.'.
>
> diepteklas (21-09-05), grootschalig onderzoek

Figuur 6.3 *Opmerking van docent over de (verborgen) complexiteit van een opdracht*

Later geeft de docent dit commentaar nog een keer (zie figuur 6.4). De leerlingen reageren ditmaal verrast over de tijd die het de docent heeft gekost.

> Hierna schakelt de docent over naar Tsunami; domein en bereik. Dit maal hebben er wel 2 leerlingen naar gekeken. De docent vertelt dat hij opnieuw erg lang met de SimQuest-simulatie bezig is geweest (20.30u tot 23.30u). De leerlingen reageren verbaasd als de docent dit vertelt. De docent zegt erbij dat hij ook iets vooruit heeft gewerkt om de leerlingen voor te blijven, dus dat niet al die tijd aan dit onderwerp is besteed. De docent vraagt naar dingen die de leerlingen die de simulatie wel bekeken hebben zijn opgevallen, maar daar krijgt hij niet echt reactie op. Een leerling vertelt wel een verhaal (als hij steiler wordt neemt domein toe), maar daar gaat de docent niet verder op in.
>
> diepteklas (29-09-05), grootschalig onderzoek

Figuur 6.4 *Tweede voorbeeld van docent die zijn tijdsbesteding aan de opdrachten noemt*

We zullen in de loop van dit hoofdstuk voorbeelden laten zien die signaleren dat tijdens de klassengesprekken wel enig enthousiasme lijkt te ontstaan. Eén zo'n signaal is dat leerlingen in de loop van de tijd tijdens een klassengesprek eigen vragen beginnen te stellen. Een voorbeeld hiervan staat in figuur 6.5.

> Het klassengesprek gaat over Domein en Bereik aan de hand van een simulatie opdracht waarin een lineaire formule centraal staat. Nadat de docent een slotconclusie heeft getrokken, vraagt een leerling de docent of je aan het domein, het bereik of de combinatie zou kunnen zien of het een stijgende - dan wel dalende lijn is.
>
> diepteklas (27-09-05), grootschalig onderzoek

Figuur 6.5 *Voorbeeld van een eigen vraag van een leerling tijdens een klassengesprek*

Maar ook tijdens momenten van zelfwerkzaamheid komen leerlingen soms met eigen vragen. Een voorbeeld hiervan staat in figuur 6.6. Het is echter twijfelachtig of de leerling diens eigen vraag ook geprobeerd heeft te beantwoorden.

> Vanuit ergens anders uit de klas wordt geroepen 'wat nou als ik alles op 0 zet?' waar iemand anders op reageert 'dan zie je niks meer' (dit is niet waar, maar er wordt verder niet meer klassikaal op in gegaan door te roepen, ik weet niet of de leerling in kwestie dit ook uitgeprobeerd heeft).
>
> diepteklas (29-09-05), grootschalig onderzoek

Figuur 6.6 *Voorbeeld van een eigen vraag van een leerling tijdens het zelfstandig werken (1)*

Een ander voorbeeld komt van een leerlinge die een vraag stelt tijdens een les waarin ze zelf op de computer bezig is (zie figuur 6.7). Er gebeurt iets dat de leerlinge verrast en ze vraagt zich af waarom dit zo is. Na een kort intermezzo met de onderzoekster vraagt ze zich af hoe ze de verklaring, die ze bedacht heeft, met behulp van de interface kan controleren.

Leerlingen zijn verbaasd wanneer ze van de derdegraads functie een horizontale lijn krijgen (a=0). Ze vragen zich hardop af ‘hoe kan dat nou’. Bij één leerlinge ga ik hier verder op in. Ze heeft op een gegeven moment het idee dat het ligt aan het feit dat ze haar a gelijk aan 0 heeft gekozen. Ik zeg haar dat ze kan uitproberen of haar idee klopt. Ze reageert met de vraag hoe je dat dan uit kan proberen. Ik ga even kort in op het feit dat dit een goede vraag is ‘hoe doe je dat, hoe probeer je dat uit’.

diepteklas (29-09-05), grootschalig onderzoek

Figuur 6.7 *Voorbeeld van een eigen vraag van een leerlinge tijdens het zelfstandig werken (2)*

Vragen zijn niet de enige signalen van actieve betrokkenheid van de leerlingen. Zo merkt de docent op, na het 7de contactuur (op 03-10-2005) waarin alleen uit het boek wordt gewerkt, dat de leerlingen die les voor zijn gevoel veel minder goed meededen dan de voorgaande lessen.

En een voorval in het 8ste contactuur (op 04-10-2005) geeft aan dat voor sommige leerlingen de tijd voorbij vliegt. Aan het einde van dat contactuur merkt een leerling op: “is het al tijd dan?”. Zulke opmerkingen geven aan dat leerlingen ingespannen bezig zijn geweest. Ze zijn voor hun gevoel maar heel kort bezig. Hun aandacht lijkt dan te zijn gegrepen.

6.2 Meningen

Tijdens de contacturen polst de docent af en toe de mening van de leerlingen over de lessen. Een voorbeeld van de reacties staat in figuur 6.8.

De docent heeft de schriften van de leerlingen ingenomen en thuis bekeken. Hij gaat hier in de les op in. Naar aanleiding daarvan ontstaat er een klassengesprek waarin de leerlingen een aantal reacties op het werken met SimQuest-simulaties geven:

- SimQuest[1] is wel handig
- met de computer begrijp ik het tenminste
- nee, juist niet, ik vind de computer juist handig
- SimQuest is wel leuk, maar gaat ten koste van het schrift
- ik vind vanaf de computer nog moeilijker als in het boek
- zo snel mogelijk (dat is gewoon uit het boek) => maar je moet het wel snappen
- liever gewoon met het boek verder gaan
- je hebt geen klassikaal gevoel meer
- vervelend op de computer en in het schrift
- lekker op de ouderwetse manier

diepteklas (03-10-05), grootschalig onderzoek

Figuur 6.8 *Meningen van leerlingen over SimQuest-simulaties*

In hetzelfde klassengesprek reageert de docent op de reacties van de leerlingen (zie figuur 6.9).

[1] In de experimentele klassen werden de ontwikkelde simulaties aangeduid met enkel de term SimQuest.

> De docent merkt op dat het programma dieper op de 'waarom' vraag van wiskunde ingaat. Hij vertelt dat het te veel tijd kost om zelf voor de overige hoofdstukken het programma aan te vullen, maar dat hij deze lijn wel vast wil houden, alleen dan zonder computer. De docent merkt op dat ook in de toekomst van computerprogramma's gebruik gemaakt zal worden, maar dat deze programma's de leerlingen waarschijnlijk beter zullen bevallen (dat hoopt hij tenminste) omdat die programma's meer ondersteunend zijn en niet op de waarom vraag ingaan. De docent laat de discussie hierbij.
>
> diepteklas (03-10-05), grootschalig onderzoek

Figuur 6.9 *Reactie docent op meningen van leerlingen over SimQuest-simulaties*

6.3 De docent in een voorbeeld rol

In het tweede en derde vooronderzoek (deel 2, hoofdstukken 2 en 3) zagen we dat leerlingen ondersteuning nodig hebben bij de verschillende kernactiviteiten uit tabel 2.3, deel 1, hoofdstuk 3. Eén van onze voorstellen voor ondersteuning was de voorbeeldfunctie die een docent hierbij zou kunnen vervullen. De docent van de diepteklas vervulde deze functie via verschillende activiteiten. In deze paragraaf schetsen we een beeld van deze activiteiten en proberen we te ontdekken wat voor gevolgen dit had.

Abstraheren: leerlingen die 'wiskundige' vragen stellen

In de loop van de tijd moedigt de docent de leerlingen steeds meer aan om vragen te stellen, zoals die ook in het programma zelf gesteld worden (zie figuur 6.10). Is deze formule logisch, snap ik waar deze formule vandaan komt? In het voorbeeld van figuur 6.10 heeft de oproep van de docent succes: een leerling vraagt zich hardop af waarom in de formule een bepaalde variabele in het kwadraat voorkomt.

> De docent maakt een opmerking over het soort houding van de leerlingen die hij graag zou zien. Dit is een houding van 'kan ik dat ook zelf?'. De docent vindt dat de leerlingen zich die houding aan moeten wennen. Bovendien vragen ze volgens de docent vaak ook later aan de leerlingen om het zelf te doen. Als bijvoorbeeld een formule gegeven wordt, wordt later aan leerlingen gevraagd om zelf die formule af te leiden.
>
> De docent leest de opdracht over de vergelijking van de oppervlakte. Een leerling vraagt hardop "hoezo l^2 (lees: el in het kwadraat)?". De docent leidt samen met de klas de formule af.
>
> diepteklas (07-10-05), grootschalig onderzoek

Figuur 6.10 *De docent moedigt leerlingen aan om zelf vragen te stellen*

De docent geeft aan dat hij deze werkwijze ook nadat het programma is afgelopen wil blijven vasthouden (zie figuur 6.11). Ook al is er in de volgende hoofdstukken geen materiaal in SimQuest-applicaties, in principe is dit deel van de werkwijze ook uit te voeren in het boek. Alleen wordt er door het boek zelf minder aandacht aan besteed. Het zal dus van eigen vragen, van zowel de leerlingen als de docent, afhangen.

De docent tekent opnieuw de grafieken van de breedte en de oppervlakte afgezet tegen de lengte (de onafhankelijke variabele) in één figuur. Hij had dit de dag ervoor ook al gedaan. Hij draagt de leerlingen op “kijk eens naar de bijzonderheden”. Hij sluit af met “dus zo kijken naar resultaten en kijken of dat logisch is; dat ga ik vasthouden in de komende hoofdstukken”.

diepteklas (07-10-05), grootschalig onderzoek

Figuur 6.11 *De docent geeft aan de werkwijze ook in de komende hoofdstukken vast te blijven houden.*

De docent doet dit ook in volgende lessen. Een voorbeeld hiervan staat in figuur 6.12. Het gaat hierbij om een opgave uit het boek die de docent behandelt op de ‘SimQuest-manier’. De docent houdt hierbij vast aan het controleren van de verschillende mogelijkheden.

De docent begint met het opschrijven van de gegevens die bovenaan in het stukje tekst staan. De docent vraagt de leerlingen of ze deze formules logisch vinden. Hij schrijft vervolgens alle mogelijke varianten van de eerste formule ($p = -5q + 360$) op het bord:

$p = -5q - 360$
$p = +5q + 360$
$p = +5q - 360$
$p = -5q + 360$

Hij vraagt de leerlingen of die ook zouden kunnen. De docent zegt erbij dat dit de steeds terugkerende vraag uit het SimQuest-materiaal is, die de klas moet stellen. Er steken 3 mensen hun hand op om aan te geven dat ze een idee hierover hebben. De docent geeft ruimte (tijd) om na te denken en moedigt de rest van de klas aan om ook een idee hierover te ontwikkelen. Vervolgens geeft één leerling zijn verklaring. Wat hij zegt is juist, maar de docent wil graag dat hij het preciezer formuleert. De docent wil weten waar in de formule hij de invloed van die uitspraak kan vinden. Ergens anders in de klas wordt dit goed uitgelegd, maar de docent hoort dit niet. Het verkrijgen van deze precieze formulering neemt vrij veel tijd in beslag. Een andere leerling doet een uitspraak, waarop een derde leerling reageert ‘hadden we al, de vraag is waar dat in de formule zit’. Uiteindelijk trekt de docent (na samenspraak met de klas) de conclusie dat de rico negatief moet zijn. Vervolgens vraagt een leerling aan de docent of de formule van de p wel kan kloppen omdat voor grote waarden van q de p negatief wordt en dat klopt praktisch niet (je zou dan geld krijgen als je iets wilt kopen). De leerling heeft helemaal gelijk en de docent legt uit hoe dit komt en dat de formule van de p wel klopt. Hij geeft daarbij ook aan dat dit aan een keuze van de economen ligt. (Economen schrijven de prijs als functie van het aantal, omdat de kosten van q afhankelijk zijn. Voor de winst moeten beide dezelfde afhankelijke variabele hebben en daarom drukken ze p uit in q en niet andersom.)

Na afloop: De docent vertelt dat hij bewust de verschillende mogelijkheden gecontroleerd heeft. Een gevolg is volgens hem wel, dat hij opnieuw het hele contactuur centraal gedoceerd heeft. De docent hoopt een houding bij de leerlingen te krijgen waarbij ze zich dingen gaan afvragen. Ze moeten zich afvragen 'waarom iets zo is' in plaats van gelijk aan te nemen dat iets zo is.

diepteklas (10-10-05), grootschalig onderzoek

Figuur 6.12 *Voorbeeld werkwijze SimQuest-simulaties ook in boek gebruikt*

Opvallend in dit voorbeeld is dat een leerling op een gegeven moment een vraag stelt over het realiteitsgehalte van de formule. Zoals die daar staat zouden, wanneer grote aantallen verkocht worden, de prijs negatief worden. Een negatieve prijs is reëel gezien raar. Dit is scherp opgemerkt van de leerling en het geeft de docent de gelegenheid om te laten zien welke keus economen hebben moeten maken. Kortom een uitstekende vraag van de leerling, een vraag die mogelijkheden biedt om dieper in te gaan op de achtergronden van een formule.

Abstraheren: relatie context, interactief gedeelte, wiskunde

In het laatste voorbeeld van de voorgaande paragraaf zagen we dat een leerling een vraag stelde over het realiteitsgehalte. Dit voorbeeld vond plaats in één van de laatste lessen van de serie. Werden dit soort vragen vaker gesteld en was er een verandering in de tijd te zien?

We hebben in de voorgaande hoofdstukken regelmatig de kwestie 'wie abstraheert' besproken. We lieten zien dat de ontwerper van het materiaal al vele stappen in het abstractieproces voor de leerlingen heeft gemaakt. We zochten naar manieren om leerlingen te laten abstraheren en te laten nadenken over de relaties tussen het wiskundige model, het interactieve gedeelte en de werkelijkheid. We zagen het klassengesprek als een goede mogelijkheid om de leerlingen over deze relaties na te laten denken. In de handleiding werd bijvoorbeeld bij Windmolen de volgende voorbeeldvraag gegeven: 'Bij opdracht '04 verschillende snelheden': Wat zou er in werkelijkheid gebeuren bij heel hoge windsnelheden?'.

De docent van de diepteklas heeft deze suggestie overgenomen (zie figuur 6.13).

De docent gaat nog even kort in op wat leerlingen in de voorgaande lessen zelfstandig hebben bekeken. De docent vraagt of de leerlingen iets opgevallen is. Geen van de leerlingen is iets opgevallen. De docent vraagt wat voor waarden ze uitgeprobeerd hebben. Een leerling roept dat er bij 999,99 mooie dingen gebeuren. De docent pikt dit getal uit wat er geroepen wordt. Hij begint met klikken, de leerlingen roepen dat hij het ook gewoon in kan vullen. De docent gaat stug door met klikken en stopt bij 20. Hij merkt op dat hij dit wel een mooi rond getal vindt om eens te bekijken. Hij maakt een opmerking over de orkanen die de afgelopen dagen in het nieuws waren. Hij zegt dat hij dan direct naar zijn rekenmachine grijpt om te kijken hoe dat in de simulatie zit. Hij vraagt aan de leerlingen om 20 m/s om te rekenen in kilometer per uur. De leerlingen gaan aan de slag. Dit gaat verre van gemakkelijk of snel. Uiteindelijk vraagt de docent wat hij moet doen waarop iedereen, op één leerling na, roept dat hij moet vermenigvuldigen met 3,6. De ene leerling roept delen. De docent gaat daar niet op in, maar een andere leerling roept dat delen niet logisch is omdat je dan nog minder dan 20 krijgt.

De docent gaat vervolgens naar het getal 99,9. Hij vraagt de leerlingen hoeveel km/u dit is. De docent refereert weer naar de orkanen en vraagt wat de windsnelheden daarbij waren. De docent vraagt wat er in het echt met de molen en het lampje zou gebeuren. De leerlingen

> geven aan dat die kapot zouden gaan. De docent gaat kort in op het verschil tussen natuurkunde en wiskunde. Bij wiskunde kan het wel, maar in de werkelijkheid houdt het materiaal het niet. Wie dat laatste interesseert moet techniek gaan studeren.
>
> diepteklas (26-09-05), grootschalig onderzoek

Figuur 6.13 *Aandacht in klassengesprek voor verbanden tussen simulatie en realiteit*

De docent vraagt aan zijn leerlingen om na te gaan hoe de getallen in de simulatie zich verhouden tot windsnelheden in de werkelijkheid. Hij vraagt leerlingen ook wat er bij zulke hoge windsnelheden 'in het echt' zou gebeuren. De docent laat zien dat er een verschil is tussen een wiskundig model en wat er 'in het echt' gebeurt. Hij benoemt bovendien de relatie tussen wiskunde en andere vakken.

Een ander voorbeeld van het verschil tussen wiskunde en werkelijkheid stipt de docent in een ander klassengesprek aan (zie figuur 6.14). De docent gaat erop in dat een breedte 0 in werkelijkheid niet kan. Ook spreekt hij over het belang van het leren kennen van het proces. Leerlingen moeten niet gelijk het eindgetal intikken, maar ook het verloop uitproberen. De docent probeert de leerlingen erop te attenderen dat niet alleen het eindantwoord belangrijk is, maar ook het begrijpen van het proces.

> De docent staat wat langer stil bij het feit dat vanaf een bepaalde lengte de rechthoek verdwijnt. Hij wijst de leerlingen er op dat het belangrijk is om het proces te leren kennen. Het is niet verstandig om grote stappen te nemen omdat je het zo lang vindt duren zonder het proces te kennen. In de woorden van de docent: "een proces zien is ook belangrijk, dus niet gelijk het eindgetal intikken".
> De docent wijst er ook op dat in de praktijk een breedte 0 niet kan, maar in de wiskunde blijkbaar wel.
>
> diepteklas (06-10-05), grootschalig onderzoek

Figuur 6.14 *Voorbeeld dat docent het belang van het begrijpen van het proces onderstreept*

Soms gaat de docent zelfs nog een stapje verder in abstraheren dan in de SimQuest-simulaties gebeurt. Een voorbeeld hiervan staat in figuur 6.15. In het interactieve gedeelte kunnen leerlingen alleen verschillende waarden voor de lengte en de breedte van een rechthoek uitproberen. Maar er zijn meer mogelijkheden voor het afzetten van een terrein zoals driehoeken en cirkels. Het optimaliseringprobleem kan breder getrokken worden.

> Nadat de docent samen met de leerlingen heeft geconcludeerd dat een vierkant de rechthoek met de grootste oppervlakte is, gegeven een bepaalde omtrek, vraagt hij de leerlingen of het met dezelfde omtrek mogelijk is om een nog groter oppervlakte te maken. Vanuit de klas komt het antwoord dat dit met een cirkel kan.
>
> diepteklas (06-10-05), grootschalig onderzoek

Figuur 6.15 *Voorbeeld van abstractie voorbij de abstractie van het programma*

In de diepteklas observeerden we een voorval waaruit blijkt dat de geabstraheerde stappen die door de ontwerper genomen zijn niet altijd ook door de leerlingen genomen worden. Tegen het einde van de lessenserie noemt de docent nogmaals het verband tussen het concrete, contextrijke voorbeeld van het oppervlak en de abstracte algemene formule (zie figuur 6.16). Uit de reactie van één van de leerlingen blijkt dat hij deze relatie niet juist interpreteert. Het gevaar blijft dat automatisch gegenereerde oplossingen ertoe leiden dat leerlingen te klakkeloos door de stof gaan. Wanneer bijvoorbeeld grafieken alleen automatisch door het programma getekend worden, kan het zijn dat leerlingen te weinig stilstaan bij wat er langs de assen uitgezet moet worden.

De docent schrijft de formule van de breedte nogmaals op het bord ($b = -l + \frac{h}{2}$). Hij vraagt aan de leerlingen waarom hij het op deze manier opschrijft en schrijft vervolgens de algemene formule van een lineair verband op ($y = ax + b$). Eén leerling zegt dat a gelijk is aan –l (l van lengte). De docent legt nog snel uit dat dit niet zo is (a = -1 (één); de l (lengte) is in plaats van de x in de algemene formule), maar de les is alweer om. Uiteindelijk staat er op het bord:

$$b = -l + \frac{h}{2}$$

$$y = ax + b$$

diepteklas (07-10-05), grootschalig onderzoek

Figuur 6.16 *Voorbeeld van gebrek aan inzicht in relatie tussen algemene formule en concrete toepassing*

Structureren

Hoe de docent een voorbeeldrol kan vervullen in een klassengesprek, laten we zien aan de hand van het gesprek over twee aan elkaar gerelateerde opdrachten uit Tsunami. In beide opdrachten wordt gevraagd om een bereik te kiezen en dit bereik te verkrijgen door variabelen te veranderen. De opdrachten verschillen doordat de ene opdracht over lineaire functies gaat en de andere over kwadratische functies.

Een manier waarop een docent een voorbeeld van structureren kan geven is door *overeenkomsten in aanpak* van verschillende typen functies te signaleren. Een docent kan tijdens een klassikaal moment laten zien welke overeenkomsten hij tussen situaties en de aanpak van verschillende opdrachten ziet. Een voorbeeld van zo'n structurerende activiteit van de docent staat in figuur 6.17.

> De docent gaat nu over naar het kwadratische geval. De docent maakt een opmerking over het feit dat hij precies dezelfde vragen stelt als bij het lineaire geval.
>
> diepteklas (30-09-05), grootschalig onderzoek

Figuur 6.17 *Het laten zien van verbanden tussen opdrachten*

In dit voorbeeld geeft de docent aan dat hij dezelfde vragen stelt voor beide situaties (lineaire en kwadratische functies). Maar de docent valt verderop in dezelfde les ook terug op de overeenkomsten om leerlingen te helpen wanneer die er gezamenlijk niet uitkomen (zie figuur 6.18).

> De docent heeft voor vandaag opgedragen om schetsen van vier wiskundig verschillende situaties te maken. Een leerling tekent zijn vier schetsen op het bord. In gesprek met de klas komt de docent tot de conclusie dat er eigenlijk maar twee verschillende situaties getekend zijn. Geen van de leerlingen kan de aanvullende twee plaatjes geven. De docent reageert daarop door terug te gaan naar het lineaire geval om samen met de leerlingen uit te vinden hoe je het daar aanpakt. Deze aanpak wordt vervolgens herhaald bij het kwadratische geval.
>
> diepteklas (30-09-05), grootschalig onderzoek

Figuur 6.18 *Teruggaan naar 'de eenvoudige variant' om 'de ingewikkelde variant' te beantwoorden*

Door nog eens goed te kijken naar wat je nu precies doet in het eenvoudige geval, kun je achterhalen wat je zou moeten doen in een ingewikkelder geval. De aanpak is opnieuw toepasbaar. Maar de conclusies van het eenvoudige geval zijn niet zomaar geldig voor het ingewikkelde geval. Zo geldt de conclusie uit figuur 6.32 niet in het geval van een kwadratische functie; niet alle bereiken zijn te verkrijgen door slechts alleen het domein aan te passen en niet de functie. De docent buit dit uit door expres de fout in te gaan (zie figuur 6.19).

> Bij de herhaling van de aanpak bij het kwadratische geval kiest de docent het domein zo dat het goed gaat en daarna zo dat het niet goed gaat. Hij doet het met opzet fout en er komt dan ook reactie uit de klas dat het niet klopt. De docent legt nu nadruk op het verschil tussen lineaire grafieken en kwadratische grafieken. Dit lijkt een afsluitende conclusie. De leerling die de vier schetsen had getekend vraagt vervolgens welke twee plaatjes hij nog mistte. Hoewel de docent de nadruk op de rol van de top heeft gelegd stelt de leerling toch nog deze vraag. Opvallend is dat nu in dit gedeelte van de les de leerlingen met vragen komen. De docent beantwoordt nog wat andere vragen en komt dan terug op zijn startpunt met 'wat waren nu de vier plaatjes'. De docent wordt overvallen door de bel.
>
> diepteklas (30-09-05), grootschalig onderzoek

Figuur 6.19 *Het benadrukken van verschillen tussen opdrachten*

Een andere manier waarop de docent structureren kan illustreren, is het *trekken van conclusies en deze te plaatsen in een leerstofoverzicht*. Zo kan een docent na afloop van een discussie of bespreking een conclusie trekken (of tussenconclusies herhalen en evalueren) en benadrukken dat dit een eindconclusie is. Een conclusie die in een overzicht geplaatst kan worden. Een voorbeeld staat in figuur 6.20.

De docent maakt een opmerking over het feit dat hij conclusies heeft opgeschreven, die je in het leeroverzicht zou kunnen plaatsen. Hij heeft bijvoorbeeld op het bord staan:
Wat moet je doen om [-4,6] als Bereik te krijgen.
- D aan te passen
- formule aanpassen

diepteklas (30-09-05), grootschalig onderzoek

Figuur 6.20 *Het trekken van conclusies en het plaatsen daarvan in een overzicht*

Het klassengesprek was in onze ogen erg effectief. De leerlingen werden geconfronteerd met hun onbegrip over bereik en domein. Ook de docent werd geconfronteerd met het feit dat leerlingen minder kundig zijn dan hij dacht. De docent vertelt namelijk na afloop van de les tegen de observator dat hij had gedacht dat hij veel vlugger de vier plaatjes op het bord zou hebben staan. Nu is hij de hele les aan het woord geweest en dat was niet zijn verwachting.

Eén onderdeel van structureren is het inzien van verbanden tussen opdrachten in de SimQuest-simulaties en tussen opdrachten in de SimQuest-simulaties en in het boek. In de diepteklas wijst de docent regelmatig op het verband tussen een SimQuest-simulatie en het boek. Naar aanleiding van een vraag van een leerling over een opgave uit het boek, merkt de docent bijvoorbeeld op dat 49 (nummer van de opgave uit het boek) gelijk is aan het laatste deel van Het benefietconcert, waaraan hij nog niet is toegekomen. Tijdens een andere les beantwoordt de docent een vraag van een leerling over een opgave uit het boek aan de hand van Het benefietconcert (zie figuur 6.21).

De leerling vraagt naar een som uit het boek (opgave 55). De docent beantwoordt deze vraag door in Het benefietconcert het gedeelte met de artiestenruimte te bespreken. De docent begint met het ophalen van het gedeelte zonder artiestenruimte. Dat weten de leerlingen nog wel uit het hoofd. Nadat hij een aantal dingen op het bord heeft opgeschreven, vraagt de docent wat de vraag nu eigenlijk precies was. Hier kunnen de leerlingen niet direct antwoord op geven. Er blijkt ook enige onduidelijkheid over te bestaan. Vervolgens bespreekt de docent het geval met artiestenruimte gebruikmakend van de parallel met het geval zonder artiestenruimte. Dan komt de vraag hoe het nu met vraag uit opdracht 55 zit. De leerlingen zeggen dat het een heel andere vraag is. De docent vraagt aan de leerlingen of hij kan concluderen dat hij vergeten was de juiste vraag op te lossen en uit kan vegen wat op het bord staat. De docent veegt uit wat er staat en merkt op: “terug naar het begin”. Vervolgens vraagt hij de leerlingen hoe hij moet beginnen met opdracht 55. Hij, of één van de leerlingen, merkt op dat het volume de oppervlakte maal de diepte is. De diepte staat vast, dus het gaat om de oppervlakte. Daarvan is de formule gelijk aan het geval van de artiestenruimte. Dus het antwoord dat de docent al heeft weggeveegd maal 40 en dan is deze opgave opgelost. De woorden van de docent: “dus ik heb het te snel weggeveegd”.

diepteklas (13-10-05), grootschalig onderzoek

Figuur 6.21 *Voorbeeld hoe de docent een opgave uit het boek beantwoordt aan de hand van een opgave uit Het benefietconcert*

We zien in dit voorbeeld dat leerlingen in eerste instantie denken dat de opgave uit het boek en in Het benefietconcert erg van elkaar verschillen. De docent speelt een spel door te doen alsof hij zich heeft verloren in de opgave uit Het benefietconcert en nu opnieuw moet beginnen. Dan komen de leerlingen er achter dat ze bij deze oplossing wel degelijk kunnen gebruiken waar ze net over gesproken hebben.

De docent besteedt regelmatig aandacht aan de verbanden tussen de opgaven in de SimQuest-simulaties en die in het leerboek. In de klassengesprekken besteedt de docent ook regelmatig aandacht aan de verbanden tussen de opdrachten in de SimQuest-simulaties onderling. Soms is dat niet meer dan een losse opmerking voor het openen van een nieuwe opdracht, zoals in figuur 6.22.

Voordat de docent een nieuwe opgave opent zegt hij: “De logica bij wiskunde als je dit bij b vraagt dan is de volgende vraag ……..” (b in de zin van breedte, de volgende vraag is dus de oppervlakte).

diepteklas (07-10-05), grootschalig onderzoek

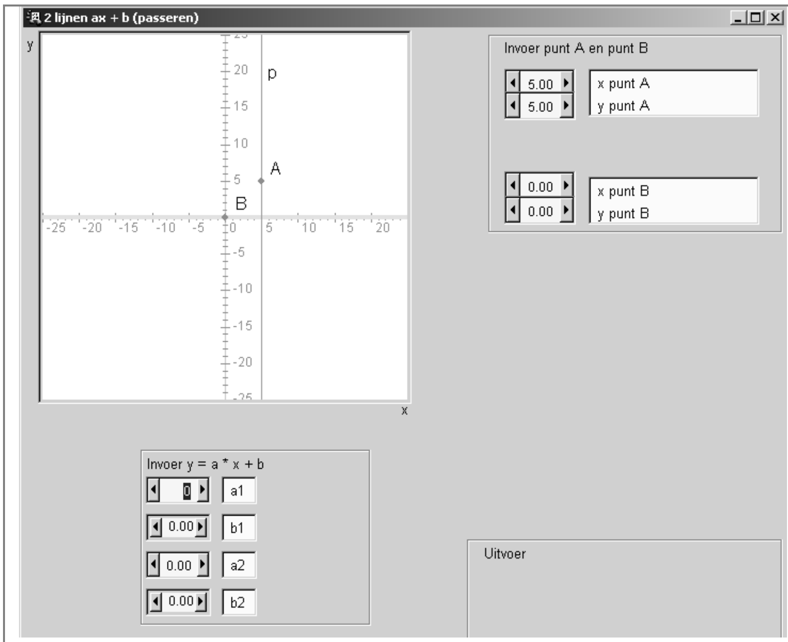
Figuur 6.22 *Voorbeeld van een losse opmerking over de structuur tussen opdrachten*

Maar soms is de docent ook veel uitgebreider in zijn commentaar. We zullen dit laten zien aan de hand van een klassengesprek, samengevat in figuur 6.24. Dit klassengesprek gaat over de vier opdrachten uit figuur 6.23.

Naam: 01 passeren situatie 1
Tabblad: twee lijnen
Applicatie: Mobieltjes

Gegeven:
Het punt A heeft de coördinaten (5,5) en het punt B heeft de coördinaten (0,0). Door het punt A is de lijn p: x=5 getekend.

Twee andere lijnen gaan door het punt B. Voor deze lijnen gelden de volgende eisen:
1. Lijn 1 (die geel wordt) snijdt de lijn p boven het punt A.
2. Lijn 2 (die rood wordt) snijdt de lijn p onder het punt A.
3. Beide lijnen gaan door B.



Opdracht: *Verander de a en b van beide lijnen, zodat aan deze twee eisen is voldaan.*

Klopt de volgende uitspraak?
rc_lijn 1 > rc_lijn 2

+++

Naam: 02 passeren situatie 2
Tabblad: twee lijnen
Applicatie: Mobieltjes

Gegeven:
Het punt B heeft weer de coördinaten (0,0). Kies nu zelf een plaats voor het punt A.

De twee lijnen gaan door het punt B.

Opnieuw gelden voor deze lijnen de volgende eisen:
1. Lijn 1 (die geel wordt) snijdt de lijn door A boven het punt A.
2. Lijn 2 (die rood wordt) snijdt de lijn door A onder het punt A.
3. Beide lijnen gaan door B.

Opdracht: *Is de volgende uitspraak ongeacht de coördinaten die je voor A kiest?*
rc_lijn 1 > rc_lijn 2

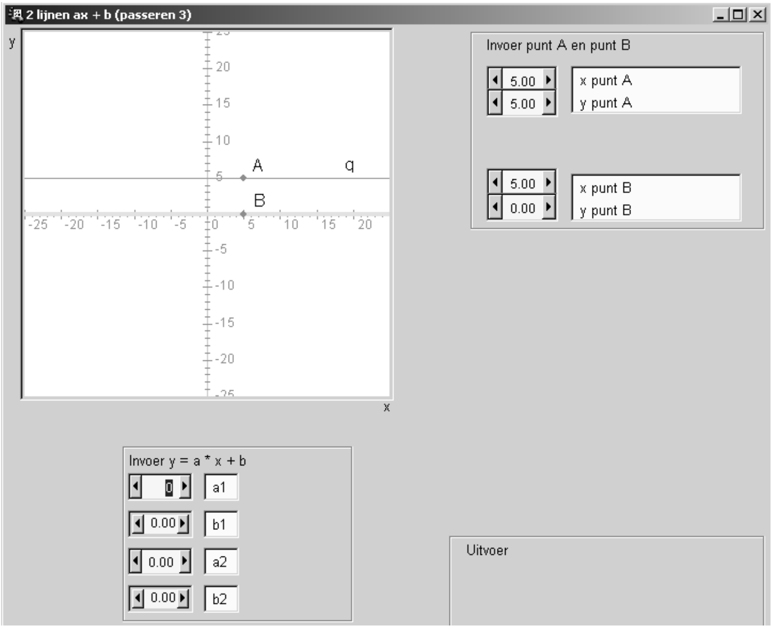
+++

Naam: 03 passeren situatie 3
Tabblad: twee lijnen
Applicatie: Mobieltjes

Gegeven:

Het punt A heeft de coördinaten (5,5) en het punt B heeft de coördinaten (5,0). Door het punt A is de lijn q: y=5 getekend.

Twee andere lijnen gaan door het punt B. Voor deze lijnen gelden de volgende eisen:
1. Lijn 1 (die geel wordt) snijdt de lijn q links van het punt A.
2. Lijn 2 (die rood wordt) snijdt de lijn q rechts van het punt A.
3. Beide lijnen gaan door B.



Opdracht: *Verander de a en b van beide lijnen, zodat aan deze twee eisen is voldaan.*

Klopt de volgende uitspraak?
rc_lijn 1 > rc_lijn 2

+++

Gegeven:
Het punt B heeft weer de coördinaten (5,0). Kies nu zelf een plaats voor het punt A.

De twee lijnen gaan door het punt B.

Opnieuw gelden voor deze lijnen de volgende eisen:
1. Lijn 1 (die geel wordt) snijdt de lijn door A links van het punt A.
2. Lijn 2 (die rood wordt) snijdt de lijn door A rechts van het punt A.
3. Beide lijnen gaan door B.

Opdracht: *Is de volgende uitspraak onwaar ongeacht de coördinaten die je voor A kiest?*
rc_lijn 1 > rc_lijn 2

Figuur 6.23 *Voorbeeld van opdrachten die op elkaar aansluiten en verschillende situaties bespreken*

De opdrachten uit figuur 6.23 zijn eigenlijk twee koppels van twee; situatie 1 & 2 en situatie 3 & 4. Situatie 2 (/ 4) verschilt van situatie 1 (/ 3) doordat de coördinaten van het punt A niet langer vast liggen. Ook tussen beide koppels zijn verschillen. In situatie 1 & 2 gaat het om een verticale lijn door A, in situatie 3 & 4 gaat het om een horizontale lijn door A. In situatie 1 & 2 ligt B op de oorsprong, in situatie 3 & 4 ligt B niet langer op de oorsprong maar nog wel op de x-as. Dit laatste heeft als gevolg dat het ingewikkelder is om de lijnen (rood en geel) door B te laten gaan, omdat b1 en b2 niet langer 0 zijn en het nu dus om een samenspel van a (a1/a2) en b (b1/b2) gaat.

Situatie 1
De docent opent de opdracht en leest deze door. Vervolgens kiest de docent mogelijke invoerwaarden. Hij doet dit al klikkend. Hij kiest expres een manier die niet gaat slagen. Er komt reactie in de klas en de docent 'denkt hardop voor zichzelf': oja, ik kon de lijn niet zo krijgen door de 'a' steeds groter te kiezen. Hij maakt vervolgens de a negatief. De docent bekijkt met deze gekozen waarden of de stelling klopt. Er wordt vanuit de klas geroepen dat het ook anders kan. De vraag die vervolgens gesteld wordt is of die altijd klopt. Er wordt zowel ja als nee geroepen. De leerlingen hebben eerder naar de opgaven gekeken en halen deze door de war met de vervolgopdracht. De docent reageert door te vragen voor welke situatie de stelling dan niet klopt. Leerlingen zien in dat ze de A niet mogen verplaatsen en dat in dit geval de stelling altijd klopt.

Situatie 2
De docent leest de opdracht en benoemt het verschil met de vorige opdracht. Leerlingen uit de klas roepen ook wat het verschil is. De docent laat de A liggen en die ligt gelijk aan de vorige opdracht. De docent merkt op dat ze van de vorige opdracht al weten dat de stelling in dat geval waar is. De docent verschuift de A een beetje, maar zo dat er in wezen geen andere situatie ontstaat. Er wordt dan ook geroepen dat het nog steeds hetzelfde is. De docent schuift de A onder de x-as. Hij bekijkt nu of de stelling nog steeds waar is. Dat is zo. De docent vraagt de klas waar hij de A moet kiezen. Opnieuw legt de docent hier de nadruk op wiskundige bewoordingen. De docent herhaalt/introduceert de begrippen 1ste, 2de, 3de en 4de kwadrant. De docent gaat nu naar een ander kwadrant, legt de lijnen weer goed en bedenkt dat de stelling nu niet langer waar is. De docent vraagt de leerlingen waar hij de A ten slotte moet kiezen. Voordat hij nu de lijnen neerlegt, vraagt de docent aan de leerlingen wat de uitkomst zal zijn, 'waar' of 'niet waar'. Hij laat handen opsteken en als de meerderheid bij niet waar zijn hand opsteekt, merkt de docent op dat ook de overige leerlingen hun hand opsteken om 'niet af te wijken van de meerderheid'. Bij 'waar' steekt niemand zijn hand op. Vervolgens legt de docent de lijnen goed en merkt op dat 'het aansluiten bij de meerderheid deze keer succes had'. De docent vraagt de leerlingen samen te vatten wanneer de stelling wel en wanneer de stelling niet waar is.

Situatie 3
Vervolgens opent de docent situatie 3. De docent begint gelijk met klikken en wekt de indruk dat hij klaar is. De leerlingen merken op dat hij één eis vergeet. Het is niet alleen het verschil van boven en onder met links en rechts (dit noemt de docent wel), maar het punt waar hij doorheen moet gaan is ook veranderd. De docent is nu meer aan het klikken om dit voor elkaar te krijgen. Als dit is gelukt, concludeert de docent met de klas dat de stelling onwaar is.

Situatie 4
Daarna gaat de docent naar situatie 4. Hier struikelen de leerlingen over de formulering van de stelling. De docent merkt op dat, zodra je met het woord onwaar begint, het altijd verwarrend is omdat de vraag moeilijk te begrijpen is. De docent merkt ook op dat het beantwoorden of de stelling wel of niet waar is nog een stapje te ver is. De docent wil eerst weten waar hij het punt A moet kiezen. De leerlingen krijgen onderling een discussie over de

waarheid van de stelling die de docent op een gegeven moment afkapt (hij geeft achteraf als verklaring dat de discussie een welles/nietes karakter kreeg en dan nog weinig constructief is). Dit doet hij door te zeggen dat hij een aantal maal dezelfde argumenten gehoord heeft en dat hij liever een antwoord op zijn vraag wil hebben.
Een leerling suggereert om weer een ander kwadrant te kiezen, maar de docent maakt geen aanstalten om dat te doen. Eén van de twee dames in de klas (die tot nu toe nog niet echt wat van zich heeft laten horen) merkt op dat het best in hetzelfde kwadrant mag, maar dan aan de andere kant (rechts) van het punt B. De docent neemt haar suggestie over en concludeert samen met de klas dat de uitspraak in de stelling nu waar is. Daarmee concludeert een deel van de leerlingen dat dus de stelling onwaar is en er verder niet meer gekeken hoeft te worden.

De docent reageert hier niet op, maar vraagt vervolgens aan de klas om samen te vatten waar de uitspraak wel en waar niet waar is. De leerlingen komen met de formulering links en rechts van B en boven en onder van B. De docent concludeert dat dit algemeen zo is en dat er in situatie 2 over de kwadranten kon worden gesproken omdat B daar op de oorsprong lag.

diepteklas (21-09-05), grootschalig onderzoek

Figuur 6.24 *Samenvatting van een les, met voorbeelden waarin een docent overeenkomsten en verschillen benadrukt en samen met de leerlingen algemeenheden ontdekt*

De leerlingen hebben van tevoren in ieder geval een deel van de opdrachten zelfstandig bekeken. Vandaar hun reactie dat de manier waarop de docent de lijnen legt, niet de enige juiste oplossing is; het kan ook anders. De docent speelt hierop in door te vragen of voor al die oplossingen de stelling waar is. De leerlingen zijn hier enigszins in de war met de tweede situatie. Daarvan weten ze al dat die niet waar is. De docent had ervoor kunnen kiezen om nu snel door de tweede situatie heen te gaan. Maar dit doet hij niet. Hij gaat namelijk niet alleen na dat er inderdaad oplossingen zijn waarvoor de stelling niet waar is, maar hij bekijkt ook of hij die oplossingen kan beschrijven. Voor welke plaatsen van A is de stelling wel, en voor welke plaatsen is hij niet waar; de docent structureert de oplossingen. Hij leidt dit in door een nieuwe plaats van A te kiezen en de leerlingen te laten voorspellen of de stelling nu wel of niet waar zal zijn. De docent gaat dus verder dan het zoeken naar een plaats voor A waar de stelling niet langer geldt (en dus onwaar is), maar hij beschrijft ook wanneer de stelling waar is. De docent laat de leerlingen zien welke wiskundige vragen je kunt stellen. Of leerlingen hier ook iets van hebben geleerd, hebben we niet getoetst. Wel zien we dat bij de vierde situatie een deel van de leerlingen vindt dat ze klaar zijn, zodra ze één oplossing hebben gevonden waarvoor geldt dat de stelling onwaar is.

De docent besteedt aan het begin van de tweede situatie aandacht aan de overeenkomst en het verschil met de eerste situatie. Ook de leerlingen vergelijken mee. Ze geven bij de eerste keus van de docent aan, dat hij een oplossing bekijkt die vergelijkbaar is met situatie 1. Ook bij de derde situatie wijzen de leerlingen op verschillen met de voorgaande situatie; ook de x-coördinaat van het punt B is veranderd. Kortom zowel de docent als de leerlingen letten op overeenkomsten en verschillen tussen de opdrachten.

Bij de tweede situatie besteedt de docent aandacht aan de wiskundige begrippen 1ste, 2de, 3de en 4de kwadrant. Bij de vierde situatie is dan ook het voorstel van één van de leerlingen om weer naar de verschillende kwadranten te kijken. Dit illustreert dat de leerling heeft geleerd dat er verschillende kwadranten zijn en dat dit invloed op de oplossing had. Die tactiek wil de leerling vervolgens ook toepassen op deze nieuwe situatie. Deze leerling heeft echter niet nagedacht of de verschillen tussen beide opdrachten gevolgen hebben voor de oplossingsstrategie. De docent had ervoor kunnen kiezen om deze oplossingsstrategie toe te passen en er zijn veel manieren waarop deze leerlingen niet zouden hebben gezien dat dit verhaal nu niet langer helemaal klopt (door bijvoorbeeld in het eerste kwadrant ‘toevallig’ het punt A links van B maar rechts van de y-as te kiezen). Eén leerlinge in de klas heeft het verschil wel opgemerkt, blijkens haar reactie dat ‘het best in hetzelfde kwadrant mag’. De leerlingen beseffen nu ook wat de juiste beschrijving voor de verschillende mogelijkheden is. De docent sluit af door op te merken wat het verschil tussen beide opdrachten is, zodat in het eerste geval de beschrijving met de term kwadrant gebruikt kan worden.

We zien dat de leerlingen in dit klassengesprek actief betrokken participeren. Ze denken mee, doen suggesties, corrigeren de docent en reageren op elkaar. Ook de leerlingen die niets zeggen, denken wel degelijk mee, zoals blijkt uit de leerlinge bij situatie 4 die haar mond open doet als de anderen niet inzien wat het verschil is. De manier waarop de les verloopt, wekt de indruk dat de leerlingen plezier hebben in dit onderzoekend leren. In discussie met elkaar en de docent duiken ze echt in het probleem.

Ook tijdens een ander klassengesprek denken de leerlingen volop mee (zie figuur 6.25). Opnieuw besteedt de docent aandacht aan de relaties tussen de behandelde voorbeelden.

Vervolgens zegt de docent: “volgende vraag, hoe zit dat bij het andere geval?”. (de docent vraagt aandacht voor verbanden tussen de verschillende voorbeelden) Na deze vraag valt er een stilte. De docent vraagt één specifieke leerling. Deze leerling weet het niet. De volgende leerling die de docent vraagt geeft een antwoord (niet juist), maar niet iedereen is het daarmee eens. De docent inventariseert de meningen en heeft op een gegeven moment alle mogelijke antwoorden ([>,<], <>, []) op het bord staan. Er wordt geroepen dat die onderste twee in ieder geval niet goed zijn. De docent vraagt of iedereen het daarmee eens is, zodat hij ze uit kan vegen. Niemand zegt dat hij het oneens is en dus veegt de docent het uit. De docent houdt een stemming over de twee andere gevallen. De meningen zijn verdeeld. Vervolgens loopt de docent de verschillende antwoorden langs. Ze zijn beiden fout. Alle leerlingen beseffen nu dat niemand het juiste antwoord had. Dit levert wat gelach op. Er wordt geroepen: “wat is nu het antwoord dan”, tegelijkertijd wordt er al geroepen dat dit gesloten moet zijn.

diepteklas (04-10-05), grootschalig onderzoek

Figuur 6.25 *Voorbeeld van confrontatie leerlingen met hun onbegrip*

De leerlingen lijken na het eerste (eenvoudige) voorbeeld nog redelijk vertrouwen in hun kennis te hebben. Bij dit tweede meer complexe voorbeeld worden ze geconfronteerd met hun onbegrip: niemand heeft het goed. Dit ontlokt hen de vraag aan de docent om er nog eentje te doen.

Het is bijzonder te constateren dat deze episode zich ook lijkt te vertalen in de resultaten op de eindtoets (zie tabel 6.1). Een regressieanalyse, gebruik makend van het enter model, levert een significant model op ($F_{3,159} = 7{,}642$, $p < 0{,}001$) voor de totaalscores op vraag 5 van de eindtoets met de factoren wel/niet diepteklas, geslacht, profiel, conditie en de interacties tussen geslacht, profiel en conditie en met de voortoetsscores als covariaat. De diepteklas scoort significant hoger dan de overige klassen, $t = 2{,}458$, $p = 0{,}015$ (tweezijdig getoetst).

Tabel 6.1 *Scores op vraag 5 (maximum score van 12) van de verschillende groepen*

conditie	profiel	geslacht	aantal	gemiddelde (standaard deviatie)	aantal met standaard fout[1]
controle groep	M	man	21	1,33 (3,12)	4 (28,6% [2])
		vrouw	19	1,32 (2,19)	4 (28,6% [2])
	N	man	55	3,56 (4,30)	22 (44,9% [2])
		vrouw	45	4,42 (4,15)	11 (28,2% [2])
	totaal		140	3,20 (4,03)	41 (35,4% [2])
experimentele groep (zonder diepteklas)	M	man	42	1,67 (2,96)	7 (29,2% [2])
		vrouw	73	0,67 (1,56)	16 (42,1% [2])
	N	man	74	3,02 (4,19)	23 (33,3% [2])
		vrouw	72	2,43 (3,69)	19 (35,8% [2])
	totaal		261	1,98 (3,40)	65 (34,8% [2])
diepteklas		man	14	4,57 (5,00)	3 (21,4% [2])
		vrouw	3	7,67 (2,08)	0 (0,0% [2])
totaal			418	2,52 (3,75)	109 (36,0% [2])

[1] Het gaat hierbij om de fout beschreven in 3.3.
[2] Het gaat hierbij om het percentage leerlingen van het aantal dat opdracht 5 gemaakt heeft

Een mogelijke verklaring is dat de leerlingen uit de diepteklas minder vaak de standaardfout maken. We hebben dit getoetst met een logistische regressie gebruikmakend van de methode forward waarbij we trends ook meenemen (grenzen bij 0,1 en 0,11) met de factoren, conditie, profiel, geslacht, de interacties tussen deze drie en wel of niet diepteklas en met als covariaat de score op de voortoets. Daarbij hebben we alleen naar de leerlingen gekeken die opgave 5 ook daadwerkelijk gemaakt hebben (n = 303). Dit leverde echter geen significant model op, omdat geen enkele variabele een voorspeller was, ook de voortoetsscore en het profiel niet.

Interpreteren

In de vooronderzoeken (zie bijlage B.5) zagen we dat leerlingen nauwelijks notities en berekeningen maakten. In het begin van het grootschalig onderzoek is het in de diepteklas niet anders. Het maken van notities door leerlingen zelf is een leerproces dat over de lessen verloopt. Aan het begin van de lessenserie hebben leerlingen uit zichzelf geen papier en pen bij de hand om aantekeningen te kunnen maken. De docent draagt hen op om dit te pakken (zie figuur 6.26), maar ondanks deze opmerking maken de leerlingen geen aantekeningen.

> De klas wordt naar voren gehaald. De klas bevindt zich namelijk in een computerruimte die vrij groot is. Er staan in het midden groepjes van 4 tafels zonder computers. Wanneer de leerlingen zitten merkt de docent op ‘als mij iets verteld wordt, dan gaat het bij mij het ene oor in en het andere weer uit en over een klein gedeelte dat blijft hangen denk ik na. Ik zie dat bij jullie het het ene oor ingaat en alles blijft hangen.’ De leerlingen kijken de docent vragend aan.

‘Ja, ik zie dat geen van jullie aantekeningen maakt, dat jullie blijkbaar alles wel onthouden’. Nauwelijks reactie. ‘Of met andere woorden pak jullie schrift en pen.’ Nu komt de klas in actie.

diepteklas (21-09-05), grootschalig onderzoek

Figuur 6.26 *Het maken van notities: het bij de hand hebben van papier en pen*

Langzamerhand wennen de leerlingen er aan papier en pen bij de hand te hebben.

De SimQuest-applicatie Tsunami wordt geopend. Domein en Bereik. Er is voor in de klas enige discussie of de termen domein en bereik bekend zijn. Achter in de klas wordt (niet al te hard) opgemerkt ‘je weet toch wel wat het is, stond toch in het boek’. De docent besteedt nu veel tijd aan wiskundige begrippen en notaties. Hij noteert een interval op het bord en vraagt hoe dat heet. Er wordt een aantal dingen geroepen. Twee dames zeggen tegelijkertijd interval. Dat is het goede antwoord, waarop één van de twee reageert met ‘yes’.
Met alles wat de docent op het bord schrijft, wordt meegeschreven door de klas.

Vervolgens gaat de docent naar Tsunami. Hij opent de opdracht voor het kiezen van het domein, leest de opdracht voor, kiest het voorbeeld van het bord, maar verandert ondertussen ook > in] op het bord. Vervolgens verandert hij de invoervariabelen zodat het domein van het bord verkregen wordt. De docent vraagt de leerlingen of ze nu gezien hebben wat er in de animatie verandert of dat ze alleen gelet hebben op zijn geklik. De docent herhaalt wat hij heeft gedaan, zodat de leerlingen nu wel op de animatie kunnen letten.
Hierna gaat de docent naar de volgende opdracht. De docent verandert samen met de klas gedurende een tijd variabelen in het interactieve gedeelte, totdat hij onderbroken wordt door de bel. Tijdens het werken met Tsunami heeft geen van de leerlingen iets opgeschreven. Ook de docent heeft op de ene wijziging op het bord na, niets meer op het bord geschreven.

diepteklas (27-09-05), grootschalig onderzoek

Figuur 6.27 *Het maken van aantekeningen is ook voor de docent een proces*

Aantekeningen maken is voor de docent zelf ook een proces. Zo heeft de docent in de les in figuur 6.27 alleen voordat hij SimQuest-berekeningen uitvoerde op het bord aantekeningen gemaakt. Toen de docent eenmaal bezig was, heeft hij verder geen aantekeningen gemaakt en de leerlingen ook niet. Om leerlingen ertoe aan te zetten notities te maken en het interpreteren explicieter te maken, gaat de docent in de volgende lessen er bewust vaker toe over om aantekeningen te maken op het bord. Deze impliciete hint zet de leerlingen er echter niet toe aan om ook aantekeningen te maken. Daarop geeft de docent een expliciete hint (zie figuur 6.28).

> De docent maakt tijdens de klassenbespreking over de SimQuest-simulatie een aantal maal aantekeningen op het bord. Geen van de leerlingen heeft tot nu toe iets opgeschreven. Na zijn vragen, maakt de docent aanstalten om het bord leeg te vegen. Hij maakt daarbij de opmerkingen 'goed dit waren dus aantekeningen, die heb je nu ook in je schrift staan' waarop de leerlingen bedenken dat ze niets hebben opgeschreven en de docent vragen te wachten met uitvegen.
>
> diepteklas (30-09-05), grootschalig onderzoek

Figuur 6.28 *Het maken van notities: het overnemen van de aantekeningen van de docent*

De docent maakt niet alleen opmerkingen over het maken van notities, hij deelt op een gegeven moment ook zijn eigen ervaringen op dit punt met de klas (zie figuur 6.29). Hij vertelt de leerlingen dat wanneer het in de klas allemaal duidelijk is, je de neiging kunt hebben om niets te noteren. Achteraf kan dan blijken dat het toch beter was geweest als je wel aantekeningen had gemaakt.

> De docent begint met een inleiding over het maken van notities. De docent vertelt een eigen ervaring uit de tijd waarin hij studeerde. Hij vertelt over een docent die ontzettend goed college kon geven, waardoor je dacht dat je het begreep, dus geen aantekeningen maakte. Toen hij thuiskwam en sommen moest gaan maken, bleek dat hij de stof daarvoor niet goed beheerste. Hij had tijdens het college, door de eenvoud waarmee de stof werd gebracht, zich niet gerealiseerd hoe complex de leerstof was.
> Een andere docent gaf een slecht college, maar het dictaat was wel heel erg goed. De docent vertelt de klas dat hij zelf een 4 had voor zijn eerste tentamen. Hij vertelt ook dat hij er na ongeveer een half jaar achter kwam dat hij op de verkeerde manier leerde. Hij leerde wat hij al wist. De klas luistert aandachtig naar dit verhaal en lacht om deze opmerking. De docent belooft hier in de loop van het jaar op terug te komen.
>
> diepteklas (26-09-05), grootschalig onderzoek

Figuur 6.29 *De docent deelt zijn eigen ervaringen met het maken van notities*

De inspanningen van de docent werpen na enige tijd vruchten af. Leerlingen gaan in hun aantekeningen bladeren om iets terug te zoeken en ze vragen aan de docent om dingen te herhalen zodat ze aantekeningen kunnen maken (zie figuur 6.30).

> De docent vraagt de leerlingen wanneer een lijn een positieve rico heeft. Een leerling reageert, maar de docent vraagt om een preciezere formulering. Uiteindelijk komt hij samen met de klas tot een scherpe formulering. Voorin maken de leerlingen aantekeningen en een aantal leerlingen vraagt om een herhaling van de definitie. De docent schrijft op het bord, nu schrijft iedereen mee.
>
> diepteklas (26-09-05), grootschalig onderzoek

Figuur 6.30 *Voorbeeld van leerlingen die uit zichzelf om herhaling vragen om aantekeningen te kunnen maken*

In de loop van dit proces verandert hierdoor de rol van SimQuest-simulaties. De neiging om te doen zonder stil te staan bij belangrijke leermomenten wordt doorbroken. Leerlingen beseffen dat ze met wiskunde bezig zijn. In deze klas klinken in de loop van de tijd geen geluiden meer of dit nu wel wiskunde is. Daarnaast gebeurt het in de loop van de lessen steeds vaker dat er wel veel over de opdracht wordt gepraat en dat berekeningen met een SimQuest-applicatie achterwege blijven.

Interpreteren

Eén van de vragen die leerlingen zich zouden moeten stellen, is wat ze precies kunnen met verschillende variabelen. Tijdens één van de klassengesprekken stelt de docent deze vraag hardop (zie figuur 6.31). Uit de reactie blijkt dat in ieder geval één leerling hier geen juist beeld van heeft. Naast de vraag wat je met een variabele in kunt stellen, stelt de docent ook de vraag wat je aan een bepaald concept hebt. In dit geval behandelt hij de kwestie wat maakt dat een variabele langs de x-as staat (dit begrip hoort bij domein).

> Vervolgens vraagt de docent: 'wat kan ik met het domein?'. Een leerling achterin de klas oppert dat de docent daarmee de steilheid kan beïnvloeden. De docent vraagt de rest van de klas wat ze hiervan vinden. De leerlingen krijgen onderling discussie waarbij ze tegen elkaar zeggen dat dit niet klopt. De docent doet vervolgens moeite om de discussie weer centraal te krijgen. Opvallend is dat veel minder leerlingen centraal hardop dingen zeggen dan in onderlinge discussies. De docent legt vervolgens de nadruk op het feit dat hij en de leerlingen bepalen wat het domein is; ze kunnen dat direct manipuleren. Vervolgens maakt de docent een kort uitstapje naar de natuurkunde en de scheikunde waarbij hij zegt dat bij die disciplines de onafhankelijke variabele altijd langs de x-as staat. Bij de vraag wat kan ik ermee, staat de docent wat langer stil omdat de leerlingen daar niet snel met een antwoord komen.
>
> diepteklas (30-09-05), grootschalig onderzoek

Figuur 6.31 *Interpretatie: wat kan ik en wat heb ik eraan*

We concludeerden bij abstraheren al voorzichtig dat aan het einde van de lessenserie leerlingen beginnen vaker vragen stellen over, onder andere, het realiteitsgehalte van formules. Tijdens de allerlaatste les voor het proefwerk merkt een leerling op dat een oplossing die nu staat bij een opgave niet kan voldoen. Na wat discussie over wat de a nu is, merkt deze leerling op "zo staat ie niet goed, zo komen er meer mensen als de prijs omhoog gaat". De leerling interpreteert het tot dan toe verkregen resultaat, hij koppelt dit aan zijn kennis uit het dagelijks leven en concludeert dan dat de oplossing niet kan kloppen.

Beredeneren

In de vooronderzoeken zagen we dat leerlingen niet altijd beredeneren waarom hun conclusie waar moet zijn. Maar ook de docent kan blijven steken bij proberen en zelfs onjuiste conclusies trekken. De leerlingen kunnen dan de docent soms corrigeren. Tijdens de geobserveerde lessen is dit slechts eenmaal voorgekomen (zie figuur 6.32).

> De docent noemt ook dat het bereik niet direct te manipuleren is, in tegenstelling tot het domein. Dit zal dus via het domein moeten. Vanuit de klas wordt al gezegd dat het ook kan door de a en b aan te passen. De docent vraagt één leerling welk bereik ze kiest. De leerling

> weet het niet, maakt het niet uit en kiest uiteindelijk na aandringen van de docent hetzelfde bereik als het interval van het domein eerder. De docent past eerst het domein aan en verkrijgt zo het bereik. Vervolgens zet hij het domein weer anders en past a en b aan. Hij krijgt dan de bovenkant goed, maar de onderkant klopt niet. Vervolgens past hij weer a en b aan, zodat de onderkant klopt. Vanuit de klas wordt geroepen dat de bovenkant nu niet langer klopt. De docent past vervolgens het domein aan zodat het weer wel klopt. Hij concludeert dat je op twee manieren het bereik kunt krijgen ofwel met aanpassen van alleen domein, ofwel met aanpassen van a en b en domein, maar niet met alleen a en b. De leerlingen nemen dit klakkeloos aan hoewel het laatste niet waar is.
>
> diepteklas (27-09-05), grootschalig onderzoek

Figuur 6.32 *Voorbeeld van een conclusie van een docent die niet helemaal juist is en die de docent niet beredeneert*

Het valt in het voorbeeld uit figuur 6.32 op dat de docent het bereik wil verkrijgen door proberen. Wanneer hij door proberen via het veranderen van a en b het bereik wil krijgen, kan dit inderdaad lastig zijn. Klopt de ene grens, dan klopt de andere vaak niet. Een verandering van de a, zorgt ervoor dat je opnieuw de b moet aanpassen om de juiste grens weer te krijgen. Proberen kan op deze manier een langdurig proces worden. Uiteindelijk moet het wel kunnen slagen. Maar door beredeneren zou dit veel sneller bereikt kunnen worden. Er zijn zelfs twee verschillende mogelijkheden (een stijgende en een dalende lijn): een lijn door de twee punten (linker grens domein, linker grens bereik) en (rechter grens domein, rechter grens bereik) of een lijn door de twee punten (rechter grens domein, linker grens bereik) en (linker grens domein, rechter grens bereik).

Communiceren en presenteren (formulering)

Leerlingen hebben bij de beantwoording van opdrachten nogal eens moeite om hun antwoord wiskundig juist (scherp en volledig) te formuleren (zie vooronderzoeken 2 en 3). Het is dan ook te verwachten dat dit een uitdaging vormt bij in hun bijdrage in een klassengesprek. Twee voorbeelden staan in figuur 6.33 en figuur 6.34.

> De docent begint met Mobieltjes met de simulatie over het opstellen van een formule. De docent kiest bewust het beginpunt rechtsboven het eindpunt. Hij laat vervolgens de autootjes rijden. Hij merkt op dat het autootje naar beneden rijdt, terwijl de a positief is. Hij vraagt de leerlingen wanneer een lijn nu een positieve rico heeft. Een leerling reageert, maar de docent vraagt om een preciezere formulering. De leerling doet erg zijn best, maar wordt steeds verwarder. Hij geeft op een gegeven moment een oplossing waarin hij de kwadranten gebruikt. De docent geeft aan dat het wat flauw is om zo over het autootje te praten, maar merkt verder op dat zolang dingen anders opgevat kunnen worden, ze niet goed gedefinieerd zijn. De docent zegt dat die scherpe formulering ook een onderdeel van wiskunde is. Uiteindelijk komt hij samen met de klas tot een scherpe formulering.
>
> diepteklas (26-09-05), grootschalig onderzoek

Figuur 6.33 *Aandacht in klassengesprek voor scherpe formulering (1)*

Opvallend is dat de leerling uit figuur 6.33 in zijn uiteindelijke formulering de term ‘kwadranten gebruikt’. Deze term is in een eerder klassengesprek door de docent opgefrist (zie figuur 6.24).

> De docent vraagt de leerlingen vaak om precies te verwoorden (wiskundig precies) wat ze bedoelen. Bij de invloed van b merkt een aantal leerlingen bijvoorbeeld op dat de lijn naar boven en beneden verschuift. De docent pakt het punt waar gestopt wordt met het tekenen van de grafiek en merkt op dat dit punt helemaal niet omhoog of omlaag gaat, maar naar links en naar rechts. Leerlingen reageren hier een beetje lacherig op, maar de precieze bewoording dat het om het snijpunt met de y-as gaat dat omhoog en omlaag verschuift komt wel naar voren.
>
> diepteklas (22-09-05), grootschalig onderzoek

Figuur 6.34 *Aandacht in klassengesprek voor scherpe formulering (2)*

Uit beide voorbeelden blijkt dat het belang van een scherpe, precieze formulering in eerste instantie niet duidelijk overkomt; de docent spreekt over flauw, de leerlingen reageren wat lacherig. Maar de docent onderstreept wel het feit dat hij geen ruimte moet krijgen om dingen anders op te vatten. Hij geeft aan dat precieze formulering ook een onderdeel van de wiskunde is.

Tijdens een ander klassengesprek lopen leerlingen hier zelf tegen aan (zie figuur 6.35). Een leerlinge vraagt zich af of een raakpunt ook een snijpunt is. Het belang van precieze definities wordt duidelijk. Ook in dit voorbeeld, aan het einde, zegt de docent opnieuw dat hij geen ruimte moet krijgen om uitspraken anders dan bedoeld te interpreteren. Ditmaal spreekt de docent over ‘het spel van de wiskunde’.

> Vervolgens zegt de docent: “nu verlaten we de windmolen, nu gaan we wiskunde doen”. De docent gaat in op de algemene gevallen, zonder naar precieze getallen te kijken. Het gaat om een opdracht waarbij gekeken wordt naar het aantal snijpunten tussen een eerstegraads- en een derdegraadsfunctie.
>
> Bij één snijpunt bekijkt de docent de verschillende mogelijkheden. Hij begint met een negatieve rico. Hij vraagt of de leerlingen dit ook hadden. Hij krijgt de reactie dat veel leerlingen een horizontale lijn hadden. Tot slot tekent hij ook nog een mogelijkheid met een positieve rico. Vervolgens gaat hij naar 2 snijpunten. Er ontstaat nu een discussie in de klas of dit wel of niet kan. Een jongen probeert wat op het bord, maar krijgt feedback uit de klas dat het drie snijpunten oplevert als hij zijn lijn door zou trekken. Deze leerling keert terug naar zijn plek. De docent vraagt een leerlinge maar die zegt dat het niet kan. Een andere leerling zegt van wel en de docent verzoekt deze leerling de oplossing te tekenen. De docent zoekt ondertussen naar een liniaal, maar die is in dit lokaal niet aanwezig. De leerling schetst een oplossing waarop de leerlinge die zei dat het niet kon, opmerkt dat dit een raakpunt is en dus niet 2 snijpunten. De docent grijpt dit moment aan om het belang van definities te onderstrepen. Hij noemt de definitie en concludeert dat een raakpunt dus een speciaal soort snijpunt is. Vervolgens vraagt de docent hoeveel verschillende mogelijkheden er voor 2 snijpunten zijn. Meerdere mensen roepen 2. De docent bevestigt dit en zegt ook kort welke 2. Daarna gaat de docent naar 3 snijpunten. Dit is een makkelijke opdracht vergeleken met twee. Het goede antwoord volgt dan ook vlot vanuit de klas. De docent vraagt opnieuw hoeveel mogelijkheden er zijn. Hij bevestigt dat het er heel veel zijn en voegt er aan toe dat de lijnen maar tussen twee punten door moeten gaan. Vervolgens vraagt hij de klas of deze uitspraak waar is. Dat is hij niet, hij is niet specifiek genoeg, de lijn moet ook stijgend zijn. De docent

> vertelt dat dat het spel van de wiskunde is: aantonen dat iemands uitspraak niet precies genoeg is.
>
> diepteklas (04-10-05), grootschalig onderzoek

Figuur 6.35 *Belang van scherpe definities blijkt uit een probleem in een klassengesprek*

Het valt de leerlingen op dat de docent vaak om een precieze formulering vraagt. Tijdens de laatste les voor het proefwerk is dit weer het geval. De docent vraagt ‘zeg eens iets preciezer’, waarop een leerling reageert: ‘u zegt dat we altijd precies moeten zijn’.

6.3.1 Zelfstandig werken met SimQuest-simulaties in het computerlokaal

Tijdens de contacturen heeft de diepteklas een aantal maal zelfstandig met de simulaties gewerkt in een computerlokaal. Net als in het derde vooronderzoek hebben we slechts beperkt zicht gehad op wat leerlingen met de simulaties gedaan hebben. In deze paragraaf bespreken we een beperkt aantal voorvallen dat ons iets laat zien van de verschillende kernactiviteiten.

Abstraheren

Uit uitspraken van leerlingen blijkt dat ze zich ervan bewust zijn dat het realiteitsgehalte van de simulaties in SimQuest beperkt is. Een voorbeeld staat in figuur 6.36.

> De leerlingen maken ook een aantal opmerkingen over het realiteitsgehalte van de simulatie. Er wordt een opmerking gemaakt over de snelheid waarmee de wieken gaan draaien: ‘gebruik je meer energie als het oplevert’ en ‘zoveel wind is er toch niet’. Tot slot zegt één van de leerlingen tegen mij: “mevrouw dat klopt toch niet, zo’n hele molen voor één zo’n lampje? Dan gebruikt ie wel heel erg veel energie”.
>
> diepteklas (22-09-05), grootschalig onderzoek

Figuur 6.36 *Opmerkingen over realiteitsgehalte simulatie*

In tegenstelling tot de vooronderzoeken hebben we in dit onderzoek voorgesteld om begrippen vooraf te introduceren en niet langer door leerlingen zelf te laten ontdekken. We stelden dat een korte introductie door de docent niet betekent dat er niets meer te onderzoeken valt. Een voorval in de diepteklas laat zien dat het zelfs zo kan zijn dat leerlingen tijdens hun eigen onderzoek begrippen herontdekken (zie figuur 6.37).

> De docent introduceert kort de simulaties domein en bereik. Hij behandelt het lineaire geval, begint aan het kwadratische geval, en merkt samen met de klas op dat dit anders is. Daarna zet hij de leerlingen zelf aan het werk.
>
> Voor verschillende leerlingen is het niet duidelijk hoe het met open en gesloten intervallen zit. Dit is opvallend. De leerlingen hebben allemaal aandachtig naar een goede uitleg geluisterd, maar nu blijken er allerlei vraagtekens te zijn.
>
> diepteklas (29-09-05), grootschalig onderzoek

Figuur 6.37 *Voorbeeld dat er ook na een korte introductie nog 'ontdekt' kan worden*

Structureren

Het materiaal is op veel punten gewijzigd. De deelopdrachten besteedden nu aandacht aan de verschillende mogelijkheden. Dit garandeert echter niet dat alle leerlingen hier ook naar kijken. Zo blijkt uit het voorbeeld van figuur 6.38 dat pas als de docent om vier verschillende plaatjes vraagt, leerlingen hier alsnog mee aan de slag gaan.

> Tijdens het zelfstandig werken roept de docent door de klas dat hij vier verschillende plaatjes wil zien bij opdracht 7. Een aantal leerlingen is al verder gegaan met Het benefietconcert, maar een deel van die leerlingen gaat nu weer terug naar domein en bereik.
>
> diepteklas (29-09-05), grootschalig onderzoek

Figuur 6.38 *Voorbeeld van leerlingen die tijdens zelfstandig werken 'te snel' een opdracht hebben afgesloten*

Evalueren

In het tweede vooronderzoek zagen we dat leerlingen graag van een docent of de SimQuest-simulatie te horen krijgen of hun antwoord goed is. We constateerden ook dat leerlingen nogal eens een oordeel gaven dat niet klopte voor de resultaten die ze in het interactieve gedeelte hadden gekregen of getest. In het voorbeeld van figuur 6.39 blijkt dat beide zaken ook in de diepteklas spelen tijdens het zelfstandig werken met SimQuest-simulaties.

> Een leerling vraagt aan mij [de observator] of zijn antwoord goed is. Dat is het niet. [dit is een goede en gewenste vraag; wanneer weet je of je antwoord goed is] Ik zeg hardop wat ik in de simulatie zie en de leerling concludeert zelf dat het niet klopt.
>
> diepteklas (29-09-05), grootschalig onderzoek

Figuur 6.39 *Een voorbeeld van een evaluatie tijdens het zelfstandig werken*

6.3.2 Het klassengesprek: sfeer in de klas

Het vergt een aanzienlijke inspanning om leerlingen zover te krijgen dat ze deelnemen en blijven nemen aan een klassengesprek. Eén van de zaken die volgens Baker, Jensen en Kolb (1997) in de klas gerealiseerd moet worden is een veilige plek. De docent van de diepteklas is zich hier bewust van en doet ook moeite om die veilige plek te maken en te behouden. Een voorval tijdens de les is illustratief (zie figuur 6.40). De docent reageert direct op deze inbreuk. Hij maakt de regels duidelijk (lachen om mag, maar een dergelijke opmerking mag niet), de leerling moet zijn excuses maken en vervolgens neemt de docent de opmerking van de leerlinge serieus. Hij gebruikt de opmerking als uitgangspunt voor het vervolg van het gesprek.

> De docent vraagt de leerlingen: "zat er een verband tussen de sommen uit het boek en de simulatie?". Stilte is het antwoord. Een leerlinge achter in het lokaal merkt op dat het beide over grafieken gaat. Gelach is de reactie. Eén leerling vooraan merkt op: "slim opgemerkt zeg". De docent wijst de leerling terecht. Lachen om mag, want dat is geen uitlachen. Maar een dergelijke opmerking mag niet. "Je moet vrijuit kunnen spreken in deze klas". De leerling in kwestie verontschuldigt zich. De docent gaat vervolgens door op de opmerking die de leerlinge maakte en komt al doorvragend tot de overeenkomst tussen sommen uit het boek en de simulaties.
>
> diepteklas (26-09-05), grootschalig onderzoek

Figuur 6.40 *Een voorval waarbij de veiligheid van de klassensfeer op het spel staat*

Ook moedigt de docent leerlingen aan om deel te nemen aan het gesprek. Hij doet uitspraken als "Iets harder, gewoon durven.". De docent moedigt ook zwakkere leerlingen aan om hun mond open te (blijven) doen. Zo prijst hij een zwakke leerling expliciet voor diens bijdrage in het voorbeeld van figuur 6.41.

> Vervolgens komt de vraag van een andere leerling hoe je het maximum kunt vinden. Twee van de leerlingen verwarren deze vraag met het oplossen van een vergelijking (zie je op de toets ook vaak gebeuren). De docent vraagt hen welke waarde van x ze krijgen als ze vergelijking is 0 oplossen. De leerlingen zeggen dat dit de snijpunten met de x-as zijn. Dan zegt een leerling dat de top dan in het midden van deze twee punten ligt. De docent gaat een discussie met de leerling aan die gauw zijn foute antwoord goed praat. Een (zwakke) leerling kan de redenatie helemaal niet volgen en merkt op dat het "toch gewoon –b/2a is". De docent vraagt hem te herhalen wat hij zegt en zegt dat hij helemaal gelijk heeft. Hij zegt tegen de leerling dat hij vaak het andere hoort, dat wat hij zegt niet klopt, maar dat het ook best eens kan gebeuren dat hij het goed heeft en de 'slimme leerlingen' er naast zitten.
>
> diepteklas (13-10-05), grootschalig onderzoek

Figuur 6.41 *Voorbeeld van aanmoediging zwakkere leerling*

Ook als leerlingen gewezen worden op hun tekortkomingen waakt de docent ervoor dat ze dit niet opvatten als iets om zich voor te schamen (zie figuur 6.42).

Een leerlinge vertelt tijdens het klassengesprek aan een andere leerling hoe iets berekend kan worden. Vervolgens wordt de leerlinge erop gewezen dat het ook op een andere eenvoudiger manier kan. Hierop merkt de leerlinge op 'ik voel me echt dom'. Waarop de docent reageert met: "ik hoor nog eigenlijk heel veel dingen die we moeten afleren".

diepteklas (13-10-05), grootschalig onderzoek

Figuur 6.42 *Voorbeeld van hoe de docent reageert op uitspraken van leerlingen die zichzelf naar beneden halen*

7 Resultaten: interviews

In de interviews is gesproken over (1) hoe docenten gewoonlijk onderdelen van de les (voorbereiding, doceren en begeleiden) aanpakken, wat daar dit keer anders aan was en of daar in de loop van de tijd iets in veranderd is (2) wat ze van hun leerlingen verwachten, wat daar dit keer anders aan was en of daar in de loop van de tijd wat in veranderd is en (3) welke rol het materiaal (handleiding en SimQuest-applicaties) gespeeld heeft en of die rol in de loop van de tijd veranderd is.

Over het algemeen geven docenten aan dat er sprake is van een wisselend succes. Soms zijn de simulaties alleen af en toe gebruikt om iets te demonstreren. Soms zijn er erg leuke klassengesprekken over geweest en zijn leerlingen flink aan het puzzelen geweest.

Docenten moeten erg veel moeite doen om leerlingen aan de slag te krijgen. Veel docenten merken op dat er weerstand is bij leerlingen tegen 'zelf doen' en 'zelf nadenken'. Dit blijkt uit opmerking als 'schuiven is leuk, denkvragen hoeven ze niet' en 'Ze vonden het heel vervelend'. Ze zijn drie jaar lang aan het handje gehouden, als je sommetjes kan maken dan is het goed. De overgang nu is een cultuurshock.' De inzet van de leerlingen viel een vrij groot deel van de docenten tegen. Een aantal noemt tijdens het interview dat ze gehoopt hadden dat leerlingen erin zouden duiken. Dat is niet gebeurd. Eén docent merkt op dat er naar zijn gevoel door verschillende typen leerlingen verschillend gereageerd werd: "Het loopt misschien een beetje door elkaar heen, hoe goed een leerling is en de instelling van de leerling. Een leerling moet niet bang zijn om vergissingen te maken. Ook als je niet goed in wiskunde bent kun je goed op deze manier werken. Het type leerling dat goed is in het braaf kunnen na-apen, vindt dit vreselijk." Soms lijkt het zelfs zo te zijn dat er minder leerlingen reageren dan gewoonlijk. Zo verteld een docent: "Ik liet centraal dingen zien. Ik stelde vragen. Leerlingen stelde zelf nauwelijks vragen. De leerlingen denken volgens mij: hij demonstreert wel wat. Ik vroeg: 'hoe heb je dat gedaan'. Slechts een enkeling reageert. Als je een vraag stelt komt ongeveer 10 % met een antwoord, maar je moet daar wel flink voor trekken. Als ik gewoon met het boek bezig ben reageren meer leerlingen."

Bij een aantal docenten zijn de leerlingen zelfstandig met de simulaties aan de slag gaan. Over het algemeen zijn de ervaringen dan dat slechts een deel van de leerlingen geïnteresseerd is, dat er reactie komt. Er worden vragen gesteld, mits de omgeving veilig genoeg is. Een docent vertelde: "een deel van de leerlingen is toch nog aan SimQuest aan de slag gegaan ook al was het practicum afgelopen".

Veel docenten vertellen over de grote hoeveelheid tijd die deze manier van lesgeven vergt (bv. het klassengesprek). Docenten voelden een grote tijdsdruk en gebruiken termen als 'race tegen de klok'. Eén docent noemt het een spagaat waar hij in zit: 'uitstapjes (hij bedoelt het behandelen van wiskundestof die een beetje verder gaat dan in het hoofdstuk behandeld wordt) zijn erg nuttig, maar als leerlingen ze niet thuis voorbereiden dan blijft er weinig van over. Ik zit in een spagaat; en tempo maken en de uitstapjes.'

De meeste docenten hebben, mede vanwege tijdgebrek, geen leerstofoverzicht gemaakt. De implementatie was nog niet uitvoerbaar en hier zal in volgend onderzoek verder over nagedacht moeten worden. De docenten geven tijdens de interviews aan dat het ook voor hen zoeken is geweest naar de juiste vorm, bijvoorbeeld waar ze de nadruk op zouden leggen en voor hoe lang (boek of simulaties). Ook naar de didactische aanpak was het zoeken: "Bij de langzame leerlingen was ik (de docent) degene die het steeds vroeg. Terug vragen naar wat leerlingen daarvoor gezien hadden. Dan kwam er vaak een niet zo samenhangend verhaal als antwoord. Dan wordt het voor mij als docent schipperen; ik wil dat ze het zelf ontdekken, maar als ik het ze niet vertel komen ze er nooit achter." Een aantal docenten had te weinig aan de voorbeeldvragen of had graag meer concrete instructie gekregen. De voorbereiding heeft voor de docenten erg veel tijd gekost (en de meesten hebben er ook veel tijd in gestoken). Voor één van de docenten is dit, zoals eerder opgemerkt, mede een reden geweest om te stoppen met deelname aan het grootschalig onderzoek.

Een aantal docenten geeft aan dat ze in de loop van de lessen meer dwang op de leerlingen zijn gaan uitoefenen of de volgende keer meer dwang zouden uitoefenen. Een voorbeeld van dergelijke ‘dwang’ is dat een docent aan leerlingen vroeg om te vertellen wat hun bevindingen waren: “Als ze heel erg snel gingen dan liet ik ze even rapporteren (mondeling) wat ze daarvan hadden opgestoken: jongens, wat hebben jullie daarvan opgestoken? Dat is niet voldoende, kijk er nog maar eens naar.” De docent merkt op dat de leerlingen ‘aan de vraag gewend raakten, maar niet alvast zelf gingen nadenken’. Deze docent zegt dan ook over een volgende keer: “ik zou de start anders doen. Ik zou langer de tijd nemen om duidelijk te maken hoe je er doorheen gaat. Ik ben heel los begonnen, dat werkt niet, dus ik zou meer wijzen op wat er van ze verwacht wordt.”.

Daarnaast merken sommige docenten op dat leerlingen op de computer ‘meer durven’. Zo zei een docent: “Op de computer durven de leerlingen meer, maar op papier nog steeds niet. Iets uitproberen op de computer kan geen kwaad. Leerlingen zijn bang voor tastbaar bewijs dat ze ook foute dingen hebben opgeschreven. De computer kunnen ze wissen. De leerlingen zijn heel erg blij als ze iets in kunnen leveren wat helemaal goed is.”. En een andere docent merkt op: “Er zijn leerlingen die bang waren om vragen te stellen. Die kwamen wel in de computerruimte”.

Slechts een enkele opmerking van de docenten verwees naar een kernactiviteit. Zo vertelt een docent: “Deze mindere leerlingen waren op getallen of antwoorden gespitst. Als ik ze vroeg ‘wat heb je gevonden’ dan kwamen ze met antwoorden als ‘42’. Meer konden ze niet vertellen. Hun idee van het snappen is dat ze het goede antwoord hadden. Vragen als ‘wat gebeurt er nu als ik’ konden ze niet beantwoorden.” De docent verwijst hier naar bewijzen/beredeneren/aantonen.

Kortom uit de interviews komt een beeld naar voren dat er bij docenten nogal wat vragen spelen rond de inzet van de SimQuest-simulaties en de didactische aanpak. Vrijwel alle docenten rapporteren een zekere weerstand bij leerlingen. Meer kennis over het effectief implementeren van het materiaal en didactische aanpak is gewenst om de lessen, in ieder geval voor de docenten, meer naar tevredenheid te laten verlopen.

8 Faciliteiten

De inzet van een computerprogramma in de wiskundelessen is alleen onder een aantal voorwaarden mogelijk. Die voorwaarden zijn talrijk en van grote invloed op het welslagen. Dit hoofdstuk bespreekt facilitaire voorwaarden zoals de beschikbaarheid van computers, beamers, ruimte en organisatorische zaken.

8.1 Lokalen

8.1.1 Mogelijkheden

Tijdens de wiskundelessen kan een computerprogramma op verschillende momenten ingezet worden, namelijk tijdens contacturen en in de zelfwerktijd. De contacturen kunnen in verschillende klaslokalen plaats vinden:

Scenario 1: Het contactuur vindt in een ‘normaal’ klaslokaal plaats, waar één vaste computer dan wel laptop met beamer aanwezig is.

Scenario 2: Het contactuur vindt in een ‘normaal’ klaslokaal plaats, waar een beperkt aantal vaste computers aanwezig is.

Scenario 3: Het contactuur vindt in een computerlokaal plaats.

Tijdens de zelfwerktijd werken leerlingen met het programma zonder dat de docent daarbij aanwezig is. Dit kan op de volgende manieren:

Scenario 4: De leerling werkt buiten de contacturen op school met het programma.

Scenario 5: De leerling werkt thuis met het programma.

In deel 2, hoofdstuk 5 is de ideale werkwijze tijdens de contacturen beschreven. Bij deze werkwijze wisselen klassikale momenten en momenten van zelfstandig actief met het programma en het boek bezig zijn elkaar af. De volgende paragrafen beschrijven in hoeverre de verschillende scenario’s het mogelijk maken om deze ideale werkwijze te volgen.

8.1.2 Voorwaarde 1: zelfstandig actief met het programma en het boek bezig zijn

Bij scenario 1 is er geen mogelijkheid om zelfstandig met het programma te werken. Bij scenario 2 is hiervoor slechts voor een deel van de leerlingen de mogelijkheid. Bij scenario 3 is het mogelijk om zelfstandig of in tweetallen met het programma te werken. In deel 2 is beschreven dat leerlingen tijdens het werken met de computer aantekeningen moeten maken, berekeningen moeten uitvoeren en opschrijven, informatie op moeten zoeken in het boek en de resultaten en conclusies moeten opschrijven. Daarvoor moet er bij de computer voldoende ruimte zijn om zowel een boek als een schrift open neer te leggen. Tijdens het derde vooronderzoek en bij een groot aantal klassen uit het grootschalig onderzoek die in een computerlokaal werkten, was deze ruimte er niet.

Tabel 8.1 *Mogelijkheden zelfstandig werken bij verschillende scenario's*

Scenario	Zelfstandig werken mogelijk?
'normaal' klaslokaal, één vaste computer / laptop	Nee
'normaal' klaslokaal, beperkt aantal vaste computers	Beperkt
computer lokaal	Ja, mits genoeg ruimte voor boek en schrift

8.1.3 Voorwaarde 2: klassikale momenten

Het programma moet tijdens de klassikale momenten voor iedereen zichtbaar zijn. Dit is niet vanzelfsprekend, zoals bijvoorbeeld blijkt uit opmerkingen uit de observatieverslagen van bijgewoonde lessen tijdens het grootschalig onderzoek (figuur 8.1).

De 1ste helft van de les heeft de docente gebruik gemaakt van een computer, doordat de beamer het niet deed. De computer was te klein om de lijnen goed te zien.

(grootschalig onderzoek, observant 1, docent 3, school 4)

Voorin de computerruimte stond een whiteboard waarop de leraar enige uitleg gaf over lineaire lijnen, dit bord was niet voor iedereen goed te zien aangezien het lokaal groot was en sommige leerlingen met hun rug naar het bord toe zaten.

(grootschalig onderzoek, observant 2, docent 4, school 5)

Op de tafel van de docent stond een laptop met beamer. Deze was in eerste instantie gericht op projectiemuur 1, maar door de hoeveelheid licht dat het lokaal binnenkwam was op deze muur hiervan niks te zien. Om wel iets te kunnen zien is vervolgens projectiemuur 2 gebruikt. Deze was echter zo klein dat een projectie van 1meter bij 1meter maximaal was. Deze muur werd later in de les ook minder goed bruikbaar door de hoeveelheid licht in het lokaal (de gehele rechter wand bestond uit glas, en er waren geen gordijnen).

(grootschalig onderzoek, observant 3, docent 5, school 6)

Figuur 8.1 *Gebrekkige zichtbaarheid voor iedereen tijdens klassikale momenten*

Zoals uit het tweede voorbeeld blijkt, speelt de inrichting van de lokalen een grote rol in het mogelijk zijn van klassikale momenten in een computerlokaal. Zowel de inrichting als de afmetingen van de lokalen heeft invloed op de bruikbaarheid van een computerlokaal voor klassikale momenten, zoals door middel van de volgende ervaringen uit het grootschalig onderzoek in figuur 8.2 wordt geïllustreerd.

Vaak zitten de leerlingen verschillende richtingen op. Dit is niet alleen vervelend wanneer de docent iets klassikaal behandelt en de leerlingen bij moeten draaien, het is ook vervelend tijdens het zelfstandig werken. De docent kan niet snel zien wie er op de computer met andere zaken dan wiskunde bezig is en welke leerlingen vast zijn gelopen.

(o.a. grootschalig onderzoek, school 1, school 5, school 7)

Door de extra ruimte die nodig is voor het plaatsen van computers zitten leerlingen in het computerlokaal vaak over een grotere ruimte verspreid. Wanneer de docent de aandacht van alle leerlingen wil, zal hij daarom meer zijn stem moeten verheffen dan in een normaal lokaal.

(o.a. grootschalig onderzoek, school 1, school 7, school 8)

In sommige lokalen is de ruimte tussen de tafels dusdanig beperkt dat het voor een docent niet goed mogelijk is om tussen de leerlingen door te lopen. Daardoor is een leerling met een vraag heel moeilijk te bereiken.

(o.a. grootschalig onderzoek, school 8)

De docent kan in een computerlokaal vaak zijn 'rondje door de klas' niet maken, o.a. door de beperkte ruimte. Veel docenten geven in de interviews aan dat zij dit normaal gesproken wel doen, onder andere om een idee te krijgen hoe het ervoor staat met leerlingen die niets vragen.

(o.a. docent 6, school 7)

Figuur 8.2 *Invloed van inrichting op bruikbaarheid*

Voor de klassen in het grootschalig onderzoek gold dat vrijwel overal aan één van de voorwaarden van de inrichting niet voldaan was.

Tabel 8.2 *Mogelijkheden voor klassikale momenten bij verschillende scenario's*

Scenario	Zelfstandig werken mogelijk?	Klassikale momenten mogelijk?
'normaal' klaslokaal, één vaste computer / laptop	Nee	ja, mits het programma voor iedereen zichtbaar is
'normaal' klaslokaal, beperkt aantal vaste computers	Beperkt	ja, mits het programma voor iedereen zichtbaar is
computer lokaal	Ja, mits genoeg ruimte voor boek en schrift	geheel afhankelijk van inrichting en afmetingen lokaal en de zichtbaarheid van het programma

8.1.4 Gevolgen voor didactiek

Voor de docenten bij wie aan één van de voorwaarden van de inrichting niet voldaan is, geldt dat zij voor hun situatie moeten bepalen wat de beste didactiek is.

Zelfstandig werken tijdens het contactuur onmogelijk?

Wanneer het zelfstandig werken tijdens het contactuur onmogelijk is, dan is de docent in zijn klassikale momenten wat betreft het zelfwerkzaam zijn geheel afhankelijk van wat de leerlingen voorafgaand aan het contactuur gedaan hebben. Als bijvoorbeeld blijkt dat (een groot deel van) de leerlingen op een bepaald punt is blijven steken, kan de docent niet uitwijken om de leerlingen toch kort zelf of in groepjes met het programma aan de slag te laten zijn. Hij moet nu ofwel zijn geplande bespreking uit stellen tot het volgende contactuur of hij demonstreert aan de leerlingen wat ze hadden moeten zien/doen.

Een ander punt is, doordat de leerlingen alleen zelfwerken als de docent afwezig is, dat de docent niet kan zien hoe de leerlingen individueel met het programma werken. Hij kan bijvoorbeeld niet direct observeren dat een leerling meerdere variabelen tegelijk verandert. Begeleiden van het onderzoeksproces wordt op deze manier voor een docent lastiger. Ook voor de leerling is dit vervelend. De leerling moet het met een mindere begeleiding op dit punt doen, terwijl deze manier van werken juist bij wiskunde zo nieuw voor hem is. Een rolmodel is heel welkom en dat kan de docent ook zijn tijdens de klassikale bespreking van het programma, maar coaching terwijl de leerling zelf werkzaam is, zit er in dit geval niet in.

Zelfstandig werken tijdens het contactuur beperkt mogelijk?

Wanneer het zelfstandig werken tijdens het contactuur beperkt mogelijk is, doordat er slechts een beperkt aantal computers in het lokaal aanwezig is, kan de docent deze computers op verschillende manieren inzetten.

De docent kan ervoor kiezen om de keuze aan de leerlingen te laten of ze wel of niet met het programma werken. Gevolg van deze keuze is dat bij een eventueel klassikale bespreking maar een deel van de leerlingen ervaringen met het programma heeft. De docent kan er dan ook voor kiezen om de bespreking met slechts dit gedeelte van de leerlingen te houden. Het kan gebeuren dat de leerlingen het programma nu niet als basisstof zien, maar als extraatje. Immers een deel van de klas bekijkt het programma in het geheel niet.

De docent kan er ook voor kiezen om de leerlingen afwisselend met het programma te laten werken. Afhankelijk van de hoeveelheid computers (in verhouding tot het aantal leerlingen) en de tijd die leerlingen nodig hebben, zullen de leerlingen wel of niet allemaal een (beetje) ervaring opdoen. De hoeveelheid tijd, die de leerlingen krijgen, kan vast liggen, maar dat doet geen recht aan het verschil in niveau en werktempo van de leerlingen onderling. De docent kan ook aangeven op welk moment (qua oplossing bijvoorbeeld) de leerling een ander op de computer moet laten. De docent zal bij het kiezen van de opdracht, die hij de leerlingen mee geeft, rekening moeten houden met het feit dat ze hier maar kort mee kunnen werken. Even kort het geheugen opfrissen is in deze situatie heel goed mogelijk. Dat maakt een klassikale bespreking in het geval er geen projectie van het programma mogelijk is (zie verderop) beter mogelijk. Het opdiepen uit het geheugen is makkelijker als het geheel nog vers in het geheugen ligt.

Tot slot kan de docent ervoor kiezen om de leerlingen in groepen met het programma te laten werken. Dit betekent dat de leerling niet (direct) zijn eigen ideeën kan uitproberen, maar eerst met de andere groepsleden moet overleggen hoe hun aanpak zal zijn. Dit zorgt voor een goede monitorende functie. Maar hierdoor zijn leerlingen wel haast gedwongen om de ‘vrij spel’ fase over te slaan, omdat ze direct naar andere toe moeten uitleggen waarom ze iets willen proberen. Oftewel ze moeten direct hun ideeën verwoorden. Wanneer er in groepen wordt gewerkt, geldt dat individuele coaching voor de leerlingen er niet in zit.

Klassikale momenten niet mogelijk?

Wanneer klassikale momenten niet mogelijk zijn, betekent dit dat de mogelijkheid tot het uitwisselen van ideeën en gedachten beperkt blijft tot uitwisselingen tussen de leerling, de docent als die in de buurt is en de naaste buren van de leerling. De leerlingen moeten die uitwisseling dan wel aangaan of de docent moet meer leerlingen bij zijn overleg met een leerling betrekken.

Voor de docent betekent dit dat hij, wanneer hij merkt dat veel leerlingen tegen hetzelfde probleem aanlopen, er niet voor kan kiezen hierop in te gaan voor alle leerlingen tegelijkertijd. Dit betekent dat hij steeds opnieuw hetzelfde moet vertellen en daardoor veel meer tijd kwijt is aan slechts één probleem.

Omdat er geen mogelijkheid is om een klassikale introductie te geven, moeten de leerlingen individueel uitvinden hoe het in elkaar steekt. De kans is groter dat leerlingen veel tijd kwijt zijn aan minder relevante zaken en er daardoor te weinig tijd over blijft om met de wezenlijke zaken aan de slag te zijn.

Klassikale momenten alleen mogelijk, zonder projectie van het programma?

Wanneer een klassikale presentatie van de simulatie niet mogelijk is, maar de docent wil toch klassikaal een onderdeel van het programma bespreken, dan zullen de docent en de leerlingen uit hun geheugen moeten opdiepen wat precies de situatie en de opdracht was. De docent kan dan een korte schets op het bord tekenen en in woorden herhalen wat de context was en waar het om draaide in de opdracht. Leerlingen kunnen vertellen over wat hun ervaringen waren, maar het is nu niet mogelijk om deze ervaringen te laten zien. Het is, mede daardoor, ook moeilijker geworden om ervoor te zorgen dat iedereen over hetzelfde spreekt.

8.1.5 Zelfwerktijd

Ook buiten de contacturen om is het wenselijk dat leerlingen met het programma kunnen werken. Om op school buiten de contacturen met het programma te kunnen werken, moet het programma op computers staan die voor de leerlingen ook zonder de aanwezigheid van de docent toegankelijk zijn (zie ook figuur 8.3).

Op een groot aantal scholen dat deelnam aan het grootschalig onderzoek was het aantal werkplekken waar leerlingen buiten contacturen met de computer kunnen werken zeer beperkt; namelijk het aantal aanwezig in de mediatheek (die bovendien vaak door leerlingen voor privé doeleinden worden gebruikt).

(o.a. grootschalig onderzoek, school 1)

Op sommige scholen die deelnamen aan het grootschalig onderzoek waren computerlokalen waar leerlingen, tenzij er lessen in gegeven werden, terecht konden. Deze lokalen zijn dus vooral vrij op ‘ongunstige’ tijden (bv. het achtste uur).

(o.a. grootschalig onderzoek, school 3)

Op één school heeft de docent het mentoruur gebruikt om de leerlingen op school de mogelijkheid te bieden aan het programma te werken.

(grootschalig onderzoek, docent 7, school 9)

Figuur 8.3 *Beschikbaarheid van computers op school buiten de contacturen om*

Een andere mogelijkheid is dat leerlingen thuis met het programma werken. Voorwaarde is dan wel dat het programma thuis op de computer staat. Tijdens het grootschalig onderzoek verliep het thuis installeren van het programma niet zonder problemen, zoals uit figuur 8.4 blijkt.

Uit verschillende mails van één docent:
'Ik had 641 vandaag tijdens mentoruur en heb meteen gevraagd of alles gelukt was. Bij meer dan vijf leerlingen lukte het niet om in SimQuest te komen. Hoe moet dat nu?'

'Een leerling heeft wel via een medewerker van SimQuest (naam is me ontschoten) geprobeerd, maar ze kwam er toch niet uit omdat ze iets van de installatie op de computer moest veranderen.'

'De meeste leerlingen (642) krijgen SimQuest niet aan de praat, al hebben ze die al twee verschillende keren geïnstalleerd. Maar ik zal de mentrix vragen of zij een paar lessen (tot aan de toets) tijdens het mentoruur de simulaties mogen doen omdat ze toch al in het computerlokaal zitten tijdens dat uur.'

(grootschalig onderzoek, docent 7, school 9)

Uit de mail van een andere docent:
'Een paar leerlingen hebben SQ niet aan de praat gekregen. Ik heb ze verwezen naar de helpdesk.'

(grootschalig onderzoek, docent 1, school 1)

De docent vraagt wie SimQuest nog niet heeft geïnstalleerd. 1/3 van de klas heeft dit niet gedaan. De meesten zijn het vergeten, een enkeling lukte het niet. Ik stel me even kort voor. Ik vraag leerlingen als het niet lukt SimQuest te installeren een mail naar de helpdesk te sturen en aan te geven wat er precies mis gaat.

(grootschalig onderzoek, observant 4, docent 9, school 11)

Deze helpdesk was er voor alle leerlingen, maar slechts één leerling heeft hier gebruik van gemaakt.

Uit een verslag van een observant tegen wie één van de docenten zijn hart luchtte: 'Een enkele leerling heeft installatieproblemen; ze volgen zijn gedetailleerde aanwijzingen niet op.'

(grootschalig onderzoek, observant 7, docent 9, school 11)

In de experimentele klas die bijna iedere les geobserveerd is vertelde een leerling dat 'hun computer dood was' en reparatie een week zou gaan duren (de behandeling van het hoofdstuk duurde in totaal 3 weken). Een andere leerling vertelde dat wanneer hij thuis het programma opende hij 'maar de helft van het scherm' te zien kreeg. Dit heeft met de instellingen van de computer te maken, die voor iedere thuissituatie kan verschillen.

(grootschalig onderzoek, observant 8, docent 10, school 3)

Soms draaide er bij leerlingen uit de experimentele klassen, thuis op de computer een ander dan meest gangbaar besturingssysteem (een apple) waardoor het programma niet geïnstalleerd kon worden.

(grootschalig onderzoek, observant 5)

Figuur 8.4 *Beschikbaarheid SimQuest-simulaties bij leerlingen thuis*

Kortom het bij de leerlingen thuis aan de praat krijgen en houden van het programma is niet vanzelfsprekend. Bovendien weten docenten ook niet wat ze moeten adviseren wanneer het een leerling niet lukt. Voor de thuissituatie geldt dat er niet vanuit gegaan kan worden dat leerlingen daar met het programma kunnen werken. Op school kunnen leerlingen vaak niet aan het programma werken zonder dat de docent daarbij aanwezig is.

8.1.6 Conclusie

Door de beperkingen in de 'normale' lokalen, de computerlokalen en de werkplekken voor de zelfwerktijd is het op dit moment op vrijwel geen enkele middelbare school mogelijk om de werkwijze zoals voorgesteld in deel 2, hoofdstuk 5.2 te volgen.

8.2 Organisatorische zaken

Zelfs wanneer het zo zou zijn dat op een school lokalen aanwezig zijn, waarin de voorgestelde werkwijze uit deel 2 hoofdstuk 5 mogelijk is, dan spelen nog tal van organisatorische zaken een rol in de effectiviteit van de voorgestelde werkwijze.

8.2.1 Beschikbaarheid van het lokaal

Zoals in de voorgaande paragraaf beschreven is, zijn er op de meeste scholen eenvoudigweg geen lokalen waarin de voorgestelde werkwijze uit deel 2, hoofdstuk 5 mogelijk is. Het zou de voorkeur dienen wanneer op grond van de bovenstaande tabel bepaald wordt in welk lokaal de voorgestelde werkwijze het meest gevolgd kan worden en de lessen in dit lokaal te geven. De praktijk is echter dat de wens van de docent nauwelijks enige invloed heeft op het lokaal waarin de contacturen uiteindelijk plaats vinden. De volgende voorbeelden hiervan in figuur 8.5 speelden tijdens het grootschalig onderzoek.

Wanneer docenten gebruik willen maken van een computerlokaal zullen zij dit lokaal van te voren moeten reserveren. Op een aantal scholen zijn de computerlokalen vrijwel permanent bezet door vakken als informatica. Dien ten gevolge werd een aantal docenten beperkt tot het gebruik van het computerprogramma in bepaalde lessen omdat er tijdens de andere lesuren geen computerlokaal beschikbaar was.

(o.a. grootschalig onderzoek, school 5)

Op andere scholen is het aantal laptops en beamers dusdanig beperkt en/of worden deze zo veelvuldig gebruikt dat regelmatig een laptop met beamer reserveren niet tot de mogelijkheden behoorde. Deze docenten waren dien ten gevolge genoodzaakt om wanneer zij het computerprogramma wilden gebruiken uit te wijken naar een computerlokaal.

(o.a. grootschalig onderzoek, school 7)

Ondanks dat docenten van te voren een computerlokaal reserveren komt het regelmatig voor dat het lokaal toch niet beschikbaar is. Op de school waar tijdens het grootschalig onderzoek een groot deel van de lessen is bijgewoond gebeurde het een aantal maal dat voor meerdere klassen in hetzelfde lokaal lessen stonden ingeroosterd.

(grootschalig onderzoek, diepteklas, observant 8, docent 10, school 3)

Ook bij een observatie op een andere school tijdens het grootschalig onderzoek stonden twee klassen voor hetzelfde lokaal.

(grootschalig onderzoek, observant 8, docent 6, school 7)

Niet alleen dubbele inroostering is een probleem. Ook het verschuiven van lessen naar een ander uur kan ervoor zorgen dat het ruim van te voren reserveren niet het gewenste effect heeft.

(grootschalig onderzoek, school 4)

Figuur 8.5 *Beschikbaarheid van computerlokalen*

Daarnaast komt het voor dat er in een lokaal wel een computer aanwezig is, maar het programma niet beschikbaar is, zoals uit de volgende voorbeelden uit het grootschalig onderzoek in figuur 8.6 blijkt.

De SimQuest groep komt na 5 minuten terug. Het is de systeembeheerder niet gelukt SimQuest te installeren. Ze mogen gaan. Ik spreek later de systeembeheerder. Het gaat mis bij het pad naar de simulaties. SimQuest gaat altijd lokaal naar Mijn documenten. Dit is een bekend ‘probleem’. De systeembeheerder gaat de simulaties op het datagebied voor leerlingen zetten. Ze moeten daar dan zelf naartoe browsen. Hij legt de docenten uit waar de simulaties staan.

(grootschalig onderzoek, observant 4, docent 5)

In veel lokalen waar geen computers staan is wel een aansluiting aanwezig voor incidenteel gebruik van de computer. Het komt voor dat bepaalde lokalen zodanig zijn ingericht dat deze punten in het lokaal moeilijk of niet te bereiken zijn. Zo gebeurde het tijdens het grootschalig onderzoek dat het programma niet tijdens de les gebruikt kon worden, omdat er een kast voor de aansluiting stond.

(grootschalig onderzoek, observant 8, docent 10, school 3)

Sommige scholen maken gebruik van een draadloos netwerk. Het kan zo zijn dat de reikwijdte niet groot genoeg is om alle lokalen te dekken. Zo gebeurde het tijdens het grootschalig onderzoek dat een docent vanwege rapportenvergaderingen de les in een ander dan gebruikelijk lokaal moest geven waar geen netwerkverbinding was. De docent moest hierdoor afzien van zijn geplande bespreking van het computerprogramma.

(grootschalig onderzoek, observant 8, docent 10, school 3)

Tijdens het grootschalig onderzoek was op een school het programma op een aantal plekken geïnstalleerd. Toen er een lokaalwijziging was, stond er in dat lokaal wel een computer, maar was het programma daar niet op geïnstalleerd. Ook hier moest de docent afzien van de geplande bespreking van het computerprogramma.

(grootschalig onderzoek, observant 8, docent 7, school 9)

Figuur 8.6 *Beschikbaarheid programma in computerlokalen*

8.2.2 Tijdrovend

Werken met computerprogramma's is over het algemeen tijdrovender dan het werken met een boek vooral als de dag bestaat uit veel korte lesuren. Dit heeft verschillende redenen:

- het inloggen
- het opbouwen van een laptop en beamer
- het wisselen van eigen lokaal naar computerlokaal door de docent
- ondersteuning van netwerkbeheerders die niet direct aanwezig zijn
- het maken van afspraken met bv. netwerkbeheerders en onderwijsassistenten
- het reserveren van lokalen en apparatuur.

Een veel gemaakte opmerking tijdens de interviews na afloop van zowel het derde vooronderzoek als het grootschalig onderzoek was dat 'het erg veel tijd kostte'. Dit lag niet alleen aan het feit dat het programma nieuw was en door de docenten bekeken moest worden, maar ook aan bovengenoemde punten zoals uit de onderstaande voorbeelden (figuur 8.7) blijkt.

Wanneer een docent gebruik maakt van een laptop en beamer zullen deze apparaten naar zijn klas moeten worden gehaald, opgesteld, weer afgebroken en teruggebracht moeten worden. Op sommige scholen is hiervoor ondersteuning, bijvoorbeeld door de inzet van onderwijsassistenten. Dit betekent wel dat de docent van te voren moet doorgeven wanneer deze persoon aanwezig dient te zijn. De aanwezigheid in de klas van deze onderwijsassistent kan voor afleiding en onrust zorgen.

(o.a. grootschalig onderzoek, observanten 5 en 6, docent 8, school 10)

Is er geen ondersteuning voor de docent, dan zal de docent dit zelf moeten doen.

(o.a. het grootschalig onderzoek, school 1, school 3, school 9)

Over het algemeen geldt dat wanneer een docent of leerling op school op een computer wil werken hij zal moeten inloggen. Dit inloggen neemt op veel scholen nogal wat tijd in beslag. Tijdens het derde vooronderzoek maakte de docenten dan ook opmerkingen dat de les soms al ruim 10 minuten aan de gang was en de leerlingen nog niet allemaal ingelogd waren.

(derde vooronderzoek, observant 8, docent M-klas)

Tijdens het grootschalig onderzoek kwam het regelmatig voor dat het de docenten niet lukte om in te loggen. Zij kunnen niet hun klas verlaten om het probleem uit te gaan zoeken en dit betekende dan ook dat de geplande bespreking van het programma geen doorgang kon vinden.

(o.a. grootschalig onderzoek, observant 8, docent 7, school 9)

Een docent raakte tijdens een geobserveerde les nogal wat tijd kwijt doordat instellingen van de laptop tussendoor door een collega veranderd waren. Bij een andere les werden door het verkeerd aansluiten van de laptop de batterijen van de laptop niet opgeladen. De batterijen raakten daardoor leeg en de laptop viel uit. Zulke gebeurtenissen leveren niet alleen een noodgedwongen wijziging in de plannen op maar ook een hoop irritatie, frustratie en onrust.

(grootschalig onderzoek, observant 8, docent 1, school 1)

Wanneer het contactuur in het computerlokaal plaats vindt, moet de docent van lokaal wisselen. Voor de docent van de intensief geobserveerde klas uit het grootschalig onderzoek betekende dit dat hij zijn tas moest inpakken en het lokaal afsluiten. Vervolgens het nieuwe lokaal openen. Normaal gesproken kunnen leerlingen binnen lopen terwijl de docent zijn oude spullen opbergt en nieuwe spullen pakt voor de les. Nu konden de leerlingen het lokaal niet in voor de docent het geopend had, waarna zowel zij als de docent hun spullen nog moesten pakken. Hierdoor gingen er vijf extra minuten van de lestijd aan het begin van de les verloren (en ook van de lestijd van de klas in het volgende uur van de docent).

(grootschalig onderzoek, observant 8, docent 10, school 3)

Figuur 8.7 *Voorbeelden tijdrovende bijkomstigheden gebruik simulaties in les*

8.2.3 Voorbereiding

Uit het voorgaande blijkt dat de docent in de voorbereiding afspraken met systeembeheerders en onderwijsassistenten moet maken. Bovendien moet de docent lokalen reserveren. Daarnaast zal de docent in de voorbereiding aandacht moeten besteden aan hoe hij/zij het programma opent en ermee werkt en hoe de leerlingen het moeten openen en ermee kunnen werken. Niet alleen de docent moet de zaakjes op orde hebben, ook de leerlingen en/of de systeembeheerders, zoals uit het voorbeeld uit het onderzoek blijkt:

> Hoewel leerlingen over het algemeen een inlognaam en wachtwoord hebben, is dit vaak aan het begin van de lessenserie niet voor alle leerlingen waar. Op een experimentele school hadden leerlingen die van een andere school kwamen nog geen wachtwoord en inlognaam. Tijdens het derde vooronderzoek kon een aantal leerlingen niet langer meer inloggen, omdat ze te vaak een tikfout hadden gemaakt of omdat ze niet binnen de vastgestelde tijd het gekregen wachtwoord hadden gewijzigd. De netwerkbeheerder kan deze problemen voor leerlingen oplossen en die was niet altijd direct beschikbaar. Het kwam daarom regelmatig voor dat leerlingen niet konden inloggen.
>
> (derde vooronderzoek, observant 8, docenten N-klas en M-klas)

> Wanneer een netwerkbeheerder besluit om veranderingen op het netwerk aan te brengen betekent dit vaak dat het netwerk tijdelijk niet beschikbaar is. Voor docenten betekent dit dat zij duidelijk met de netwerkbeheerders moeten communiceren wanneer zij tijdens hun lessen het netwerk nodig hebben.
>
> (o.a. grootschalig onderzoek, school 9)

Figuur 8.8 *De voorbereiding vraagt ook de nodige aandacht*

8.2.4 Conclusie

Wanneer tijdens wiskundelessen een computerprogramma ingezet wordt, krijgt de docent te maken met extra regelwerk en een grotere afhankelijkheid van de (toegankelijkheid van de) techniek. De invloed van de afhankelijkheid van de techniek moet niet worden onderschat. Tijdens het derde vooronderzoek en het grootschalig onderzoek heeft de techniek met grote regelmaat roet in het eten gegooid. Kortom, de organisatorische zaken spelen een grote rol in het welslagen van de inzet van ICT bij wiskundelessen. Dit geldt zeker voor het welslagen en de resultaten van het derde vooronderzoek en het grootschalig onderzoek.

9 Conclusies uit het grootschalig onderzoek

Ondanks gebrekkige faciliteiten en mede als gevolg daarvan suboptimale implementatie zijn de resultaten op de eindtoets vergelijkbaar tussen de experimentele en controle conditie. Of leerlingen in de experimentele conditie hun onderzoeksvaardigheden hebben verbeterd, is niet gemeten in dit onderzoek. Nu kunnen we alleen constateren dat er tijdens de lessen tijd aan deze vaardigheden is besteed.

Er waren opgaven in de eindtoets waarvan we verwachtten dat controle leerlingen die beter zouden maken. Deze worden daadwerkelijk significant beter gemaakt door de controle conditie. De opgaven waarvan we verwachtten dat de leerlingen uit de experimentele conditie ze beter zouden maken, zijn door beide condities evengoed gemaakt. Wanneer we kijken naar het tempo van de leerlingen, dan zien we dat het tempo van de controle leerlingen hoger is. Deze leerlingen zijn significant vaker aan één van de laatste opgaven toegekomen. Dit ondersteunt onze verwachting dat deze groep technieken beter geautomatiseerd heeft en daardoor sneller (delen van) de toets kan maken.

Opvallend is dat in een aantal gevallen een interactie-effect tussen geslacht en conditie is; vrouwen doen het beter in de controle conditie, mannen doen het beter in de experimentele conditie. Wanneer de oorzaken hiervan bekend zijn, kan het materiaal en de implementatie op basis hiervan verbeterd worden. Wellicht dat ook de vrouwen dan (meer) kunnen profiteren.

Tot slot zagen we in een episode uit de diepteklas een voorbeeld hoe het gebruik van SimQuest-simulaties een diepere verwerking van de leerstof kan bewerkstelligen. Aan de hand van een opdracht uit de SimQuest-simulatie werd de leerlingen duidelijk dat zij de stof nog niet voldoende beheersten (ze hadden allemaal fout geantwoord). Leerlingen vroegen vervolgens om meer situaties en stelden vragen aan de docent. De leerlingen uit deze klas hebben significant meer punten gehaald op de toetsopgave over dit onderwerp dan de overige leerlingen (niet diepteklassen in de experimentele conditie en de controle conditie). Wij trekken hieruit de conclusie dat er naar aanleiding van opdrachten uit de SimQuest-simulaties waardevolle klassengesprekken kunnen ontstaan, die de resultaten op de eindtoets verhogen.

Kortom op basis van de resultaten op de eindtoets concluderen we dat er redenen zijn om de ontwikkeling van de SimQuest-simulaties te vervolgen en verder te onderzoeken hoe de implementatie verbeterd kan worden.

Met het grootschalig onderzoek wilden we de vraag beantwoorden in hoeverre onze voorgestelde didactiek en implementatie eerder geconstateerde problemen voorkwam of verminderde. Tijdens observaties en uit interviews bleek dat het nog steeds regelmatig voorkwam dat leerlingen surften op internet, dat docenten overladen werden met vragen, dat leerlingen nog over 'proberen' spreken en dat leerlingen de verbanden tussen de simulaties en het boek niet (goed) zagen.

Ook bleek geen enkele school te beschikken over alle noodzakelijke faciliteiten. Als gevolg daarvan is op verschillende scholen in verschillende mate van onze voorstellen afgeweken. Bij enkele scholen resulteerde dit in een inzet en problematiek die vergelijkbaar was met die van het derde vooronderzoek.

De diepteklas beschikte over relatief goede faciliteiten. In deze klas ontstonden ook waardevolle klassengesprekken. In de loop van de tijd lijkt er bij de leerlingen steeds meer een houding gekomen te zijn waar wij op hoopten. Dit geldt bijvoorbeeld voor de vragen die gesteld werden door leerlingen, maar ook voor het maken van aantekeningen door leerlingen. De docent heeft hier een belangrijke voorbeeldrol vervuld (bijvoorbeeld door te tonen welke wiskundige vragen gesteld kunnen worden). Leerlingen in de diepteklas vroegen zich niet af of 'dit wel wiskunde is', maar gebruikten termen als 'dubbelop' voor het beschrijven van het gebruik van zowel de SimQuest-simulaties als het leerboek. Tijdens het klassengesprek lag de nadruk niet op het doen, maar op het denken naar aanleiding van het doen. De docent gebruikte het programma in zeer beperkte mate; het was vooral aanleiding voor het gesprek met resultaten als invoer. De docent van de diepteklas is in zijn inleiding op een opdracht steeds meer gaan sturen wat leerlingen uit de opdracht zouden moeten halen. Zo gaf hij bijvoorbeeld op een gegeven moment aan dat hij verwachtte dat de leerlingen het volgende contactuur een viertal plaatjes van verschillende situaties in hun schrift dienden te hebben. Door het op deze manier voeren van het klassengesprek krijgt het doen in de simulaties richting en wordt het doorsijpelen van onjuiste ideeën voorkomen.

Uit de ervaringen in deze klas bleek ook hier dat de voorgestelde implementatie aangepast zal moeten worden omdat ze niet haalbaar is, ook als de faciliteiten overwegend in orde zijn. Het gaat hierbij om twee aspecten namelijk een tijdsaspect en een aansluitingsaspect (tussen het leerboek en SimQuest-simulaties). (1) De docent van de diepteklas bleef zoekende naar een goede indeling van de *beschikbare tijd*; hij was nu erg vaak het hele contactuur aan het woord. Dit is ten koste gegaan van de zelfwerktijd tijdens het contactuur en het maken van een leerstofoverzicht. Wellicht dat de functie van het leerstofoverzicht deels is opgevangen door de klassengesprekken. Het leerstofoverzicht was immers een opvolger van het conclusieschema uit het derde vooronderzoek. Het ging erom dat leerlingen meer over verbanden nadachten en van doen tot denken werden aangezet. Beide zaken komen in het klassengesprek in de diepteklas aan de orde. Niet alleen in de diepteklas, ook in veel andere experimentele klassen, is er geen gezamenlijk leerstofoverzicht gemaakt. (2) Wellicht moet niet alleen de implementatie aangepast worden, maar moeten *beide bronnen* ook *samengesmolten* worden tot één gecombineerd geheel. Het leerboek was ingedeeld op onderwerp waarbij veel verschillende contexten werden gebruikt. In de SimQuest-simulaties werd één context voor verschillende onderwerpen gebruikt, waardoor de wiskundeonderwerpen minder duidelijk gescheiden waren. Deze verschillende manieren van inrichten botsten met elkaar. Het volgen van de indeling van het boek had in de simulaties bijvoorbeeld als gevolg dat in een contextrijke opdracht aan het begin van de opdracht formules ‘zomaar’ werden gegeven om later alsnog afgeleid te worden door de leerlingen zelf. Wanneer het boek ‘herschreven’ wordt om zo gecombineerd te kunnen worden met de simulaties, dan kunnen aan de opgaven in het boek dezelfde soort vragen toegevoegd worden die nu in de simulaties gesteld worden. De docent van de diepteklas stelde al dit soort vragen (als is deze formule logisch en is dit de enige mogelijkheid) over opgaven uit het boek.

Deel 4

Samenvatting, conclusies en discussie

Deel 4, samenvatting, conclusies en discussie

1 Samenvatting van de resultaten

In dit proefschrift is ons uitgangspunt geweest dat leerlingen beter leren wanneer ze actief met de lesstof aan de slag gaan. Een centrale vraag wordt dan onmiddellijk hoe actief leren, en de daarbij horende leeractiviteiten, te stimuleren en te ondersteunen zijn. In dit proefschrift hebben we de nadruk gelegd op zes kernactiviteiten die binnen wiskunde en wiskundig probleemoplossen centraal staan:

- abstraheren,
- structureren,
- evalueren,
- interpreteren,
- beredeneren / bewijzen / aantonen en
- communiceren / presenteren.

In een veel gebruikt leerboek (Getal & Ruimte) lijken de meeste van deze activiteiten weinig aandacht te krijgen en worden de leerlingen bij het verwerven van vaardigheden op het gebied van deze kernactiviteiten onvoldoende ondersteund. Om de rol van deze kernactiviteiten te vergroten en/of betere ondersteuning te bieden hebben we ICT-gebaseerd materiaal met het auteursprogramma SimQuest ontwikkeld. Naast deze op simulaties gebaseerde ICT-programma's hebben we conclusieschema's en een docenthandleiding ontwikkeld. Al dit materiaal is telkens afgestemd op de inhoud van het boek.

Met het ontwikkelde materiaal probeerden we te bewerkstelligen dat leerlingen zich wiskunde concepten eigen maakten en dat ze de genoemde kernactiviteiten (beter) onder de knie kregen. Daarnaast hebben we aandacht besteed aan een derde leerdoel namelijk het opdoen van onderzoeksvaardigheden. Onze veronderstelling was dat leerlingen die zelf met simulaties wiskundige situaties onderzoeken actief worden. Hierbij komen de verschillende kernactiviteiten op verschillende momenten aan bod. Abstraheren en structureren komen vaak in de beginfase aan bod. Evalueren, interpreteren en beredeneren zijn activiteiten die plaatsvinden nadat er resultaten verkregen zijn. Communiceren en presenteren heeft zowel aan het begin (begrijpen van de opdracht en het kennen van de betekenis van begrippen en concepten uit de opdracht) als aan het einde (de beantwoording van de opdracht) een plaats.

In het ontwikkelde materiaal nemen de SimQuest-applicaties een centrale plek in. Er zijn in SimQuest-applicaties twee gedeelten: een interactiedeel en een instructiedeel. In het interactieve gedeelte kunnen leerlingen variabelen veranderen en de gevolgen daarvan observeren in verschillende onderdelen, zoals grafieken, animaties en uitvoervelden. Deze computersimulaties zijn ingebed in een instructieomgeving. Deze instructieomgeving heeft de mogelijkheid tot het bieden van ondersteuning aan de leerlingen door middel van opdrachten, verklarende teksten en model progressie. In de ontwikkelde applicaties spelen opdrachten een centrale ondersteunende rol. In een applicatie begint de eerste en misschien de tweede en derde opdracht altijd met een inleidende tekst. Deze tekst schetst de context, stelt de hoofdvraag en introduceert het interactieve gedeelte. Naast een indeling in thema's zijn de opdrachten ook ingedeeld in moeilijkheidsgraad. De thema's zijn voor de leerlingen direct zichtbaar, de moeilijkheidsgraad niet.

Bij de ontwikkeling van de SimQuest-applicaties moest aandacht worden besteed aan aspecten zoals onderwerp van opdrachten bij de simulatie, inhoud van opdrachten, ondersteuning in het materiaal, ondersteuning buiten het materiaal om en toetsing. Bij elk van deze aspecten moest een aantal keuzes gemaakt worden, bijvoorbeeld voor een abstracte of een concrete (rijke) context bij een opdracht? Een concrete context heeft een motiverende functie wanneer aangesloten wordt op de belevingswereld van de leerling. Maar leerlingen zijn verschillend en hun belevingswereld ook. Daarnaast speelt de vraag wiens concreetheid het eigenlijk is. De omgeving wordt bepaald door keuzes van de ontwerpers. Dat betekent ook dat de ontwerpers de eerste stappen in een abstractieproces al genomen hebben. Leerlingen moeten zich inspannen om op een zelfde punt in het abstractieproces te komen. Het was één van de vragen van dit onderzoek of het nodig is om leerlingen daarbij te ondersteunen en zo ja, hoe dit dan kan worden vormgegeven. Een andere belangrijke keuze betrof het aantal onderwerpen, één onderwerp waar alle lessen en opdrachten aan worden opgehangen of voor iedere les of opdracht een nieuw onderwerp. Het voordeel van veel verschillende contexten is dat leerlingen vanuit verschillende gezichtspunten het onderwerp bekijken en dat het relatief eenvoudig is om een indeling op basis van inhoud te volgen waarbij de verschillende onderwerpen goed gescheiden kunnen worden. Het nadeel is dat leerlingen zich telkens in een nieuw onderwerp moeten inleven.

Aan het begin van de onderzoeken hebben we ervoor gekozen om een beperkt aantal applicaties te ontwikkelen waarbij iedere applicatie één concrete rijke context had. Een voorbeeld van een dergelijke context was de organisatie van een benefietconcert. Het basisuitgangspunt bij het ontwerpen van de bijbehorende opdrachten was dat leerlingen de concepten en bijbehorende formule(s) niet eerst geïntroduceerd kregen, maar deze zelf moesten construeren uit hun resultaten.

Het ontwikkelde materiaal, met name de SimQuest-applicaties, hebben we telkens aangepast op basis van de resultaten van onderzoeken. In deze onderzoeken die we de vooronderzoeken hebben genoemd, hebben in totaal 77 leerlingen uit 4 VWO deel genomen, waarvan 41 vrouwen en 36 mannen. Leerlingen volgden verschillende profielen, 36 leerlingen volgden een M-profiel (maatschappij) en 41 leerlingen een N-profiel (natuur). De deelnemers uit de eerste twee vooronderzoeken hadden de leerstof al behandeld gekregen, de deelnemers uit het derde vooronderzoek niet. Aan het derde onderzoek namen ook drie wiskundedocenten deel.

In het eerste vooronderzoek stonden twee vragen centraal, namelijk

(a) Worden de verschillende onderdelen in de SimQuest-applicatie gebruikt? en

(b) Hoe worden de verschillende onderdelen gebruikt?

In het tweede vooronderzoek draaide het om de vragen:

(a) In hoeverre komen de verschillende wiskundige begrippen en activiteiten aan de orde? en

(b) Welke rol spelen de volgende twee aspecten bij het aan de orde komen van de wiskundige begrippen en kernactiviteiten:
  - (1) de verschillende fasen in het oplossingsproces en
  - (2) de factoren
    - voorkennis,
    - simulatievaardigheden,
    - onderzoeksvaardigheden,
    - monitoren en
    - regels, normen en waarden?

In het derde vooronderzoek gingen we na in hoeverre het materiaal bruikbaar is in een reële klassensituatie. Hierna volgde een grootschalig onderzoek waarin ook de bruikbaarheid in een reële klassensituatie centraal stond, maar in tegenstelling tot het derde vooronderzoek waren de ontwikkelaars ditmaal afwezig en kregen de docenten suggesties voor de inbedding (op basis van de resultaten van het derde vooronderzoek). Het ging in het grootschalig onderzoek dan ook om de bruikbaarheid en de effectiviteit van de SimQuest-applicaties en het ondersteunende materiaal (ten behoeve van de inbedding van de SimQuest-applicaties).

Een belangrijk onderscheid tussen leerlingen is hoe ze met het interactieve gedeelte omgaan. Naar aanleiding van de resultaten van het tweede vooronderzoek onderscheidden we vier werkwijzen, namelijk (1) leren door → denken en → controleren met het interactieve gedeelte, (2) leren door → denken, → controleren en → proberen met het interactieve gedeelte, (3) leren door → proberen met het interactieve gedeelte en → dan denken en → controleren met het interactieve gedeelte, en (4) alleen proberen met het interactieve gedeelte. Bij de laatste werkwijze is te verwachten dat de kernactiviteiten nauwelijks aan bod komen. Uit de vooronderzoeken kwam dan ook naar voren dat de kernactiviteiten op allerlei punten niet (voldoende) uitgevoerd worden (door een deel van) de leerlingen. We bespreken nu onze observaties hierover. Naar aanleiding van deze observaties hebben wij het materiaal aangepast, zodat de hieronder genoemde problemen niet meer of in mindere mate optraden in het grootschalig onderzoek. Om deze reden geven we hieronder vooral de observaties uit de vooronderzoeken aan die laten zien wat er niet goed ging bij (een deel van) de leerlingen.

Abstraheren
Abstraheren betekent dat een situatie ontdaan wordt van situatie-gebonden-aspecten en in meer algemene termen wordt weergegeven. In feite betekent abstraheren het “mathematiseren” van de situatie, dat wil zeggen het zien van een situatie in mathematische termen.

Een eerste aspect van abstraheren is *het vatten van de kern van een opdracht*. Er is vaak een verschil tussen het gebruikelijke standpunt van de leerling en het standpunt dat hij in opgaven inneemt. De leerling moet het uitgangspunt doorzien van de auteur. De leerling moet de abstractiestappen die door de auteurs van de opgave zijn gemaakt, in zekere zin herhalen. We zagen in de vooronderzoeken dat veel leerlingen niet uit zichzelf op dit punt komen. Een vorm van ondersteuning is het benadrukken van het belang van een uitgebreide oriëntatie. Het bleek namelijk dat door onvoldoende oriëntatie een deel van de leerlingen er niet in slaagde om opdrachten succesvol uit te voeren. Daarbij spelen vragen als ‘waarom wordt deze informatie gegeven’ en ‘hoe kan deze informatie vertaald worden in een wiskundig vraagstuk’.

Een tweede aspect van abstraheren is het *verticaal mathematiseren*. In de vooronderzoeken bleek dat sommige leerlingen hiertoe aangezet moeten worden. Een deel van de leerlingen gaat niet uit zichzelf naar een hoger (wiskundig) abstractieniveau maar blijft contextgebonden redeneren en antwoorden.

Structureren
Bij structureren gaat het erom dat leerlingen samenhang in verzamelingen ontdekken. Er kan gekeken worden naar opdrachten in een taak, naar taken onderling, en naar taken en leerstof uit het boek. Om samenhang te ontdekken tussen de verschillende opdrachten in een taak zullen deze onderling moeten worden vergeleken om overeenkomsten en verschillen te identificeren. Om vraagstukken op de juiste manier aan te pakken, moet de leerling weten waar de kern van het vraagstuk om draait en welke kennis hij voor de oplossing moet aanwenden. De leerling moet inzicht in de structuur hebben. Het blijkt dat veel leerlingen niet nadenken over de plaats van nieuwe stof binnen het geheel. Ook lukt het een deel van de leerlingen niet om eerder verworven kennis bij latere vraagstukken toe te passen. Bij het gebruik van meerdere bronnen zoals de ontwikkelde simulaties en het leerboek, hebben leerlingen moeite om de verbanden tussen verschillende bronnen te zien wanneer daar geen expliciete aandacht aan geschonken wordt.

Evalueren
Bij evalueren moet een leerling beoordelen of zijn ideeën, beweringen of voorspellingen kloppen met de resultaten uit het interactieve gedeelte. Evaluatie levert een oordeel op. Zijn de resultaten volgens de verwachting, kunnen deze resultaten kloppen? Een groot deel van de leerlingen stelt dit soort vragen niet.

Er zijn diverse signalen van (het ontbreken van) evaluerende activiteiten. De meeste daarvan zijn indirect, ze betreffen de uitkomst. Een gebrekkige evaluatie kan bijvoorbeeld worden waargenomen wanneer een leerling een antwoord geeft dat strijdig is met de data die zijn verzameld. Een ander voorbeeld is dat bij onjuist berekende waarden van variabelen in een toets geen opmerkingen worden gemaakt dat de uitkomsten niet kunnen kloppen. Ook in het lesmateriaal ontbreken vaak evaluerende opmerkingen. Mogelijke oorzaken van gebrekkige evaluatie na dataverzameling door de leerlingen zijn onnauwkeurigheid en ‘blindheid’ door ideeën vooraf.

Interpreteren
Bij interpreteren gaat het om het toepassend uitleggen van resultaten. Een leerling stelt vast wat de resultaten betekenen voor eerdere- of nieuwe acties. Een interpretatie kan bijvoorbeeld gevolgen hebben voor de keuze van de waarden van variabelen bij een nieuwe opdracht. Wat betekenen de resultaten? Wat vertellen ze over de concepten waar ik mee bezig ben? Een deel van de leerlingen staat hier nauwelijks bij stil.

We zien dat over het algemeen de vervolgacties van leerlingen gebaseerd zijn op hun verkregen resultaten. Bij sommige leerlingen is dit vervolg kwalitatief, bij andere is dit kwantitatief. De kwaliteit van de interpretatie lijkt een grote bepalende factor in het aantal SimQuest-berekeningen dat leerlingen uitvoeren om tot een antwoord te komen.

Ondanks goed verkregen resultaten is de interpretatie daarvan niet altijd in orde. Eén van de mogelijke oorzaken hiervan is een gebrek aan het maken van aantekeningen. Een andere oorzaak is de (gedeeltelijke) afwezigheid van een plan van aanpak.

Bewijzen/beredeneren/aantonen
Bij beredeneren, bewijzen en aantonen gaat het om denkactiviteiten die leerlingen verrichten om beweringen te ontdekken, te onderbouwen of toe te lichten. Ze moeten bijvoorbeeld zaken afleiden uit stellingen, argumenten geven waarom een formule (niet) klopt, of een idee aannemelijk is. We maken onderscheid tussen kwalitatieve - en kwantitatieve redeneringen. Een kwalitatieve redenering leidt tot een richtinggevend verband tussen variabelen. Een voorbeeld is de uitspraak ‘als de lengte groter wordt, wordt de breedte kleiner’. In een kwantitatieve redenering worden de waarden in een formule gespecificeerd. Een voorbeeld is de uitspraak ‘als de lengte met 10 toe neemt, dan neemt de breedte met 10 af’.

Veel leerlingen moeten gestimuleerd worden om na te denken over de achterliggende theorie en het waarom. Het gevaar bestaat dat leerlingen blijven hangen in doen, zonder dat ze begrijpen waarom. Van leren is dan nauwelijks sprake.

Beredeneren, bewijzen en aantonen ontbreken soms doordat een deel van de leerlingen denkt klaar te zijn wanneer ze een antwoord hebben. Het is voor hen minder relevant te begrijpen waar dit antwoord vandaan komt. Dit heeft er toe geleid dat later vaker expliciet om berekeningen gevraagd wordt in opdrachten.

Communiceren en presenteren
Bij communiceren en presenteren draait het in dit onderzoek uitsluitend om vaktaal. Algemene aandachtspunten van communiceren of presenteren vallen buiten het onderzoek. Vaktaal of jargon is een omvattend begrip voor zaken als wiskundige termen (zoals functie, lineair verband, richtingscoëfficiënt) en wiskundige grammatica (zoals notatiewijze en formuleringen als ‘druk O uit in l’ en ‘stel de richtingscoëfficiënt is positief, dan geldt dat voor een toenemende richtingscoëfficiënt de grafiek steiler wordt’).

Bij het ontwikkelen van materiaal is het belangrijk dat in het materiaal gecommuniceerd wordt volgens de geldende regels binnen een discipline. Ook leerlingen moeten volgens deze regels antwoord kunnen geven. Beperkingen in de mogelijkheden van een programma zijn nogal eens de reden dat dit niet kan. Dit geldt ten dele ook voor het auteursprogramma SimQuest, waarin de simulaties zijn ontwikkeld.

We observeerden dat leerlingen het lastig vinden om tot voldoende scherpe formulering te komen en dat heeft deels te maken met onvoldoende vaardigheden in de overige kernactiviteiten.

Voor de meeste kernactiviteiten gold dat ze door de ontwikkelde SimQuest-opdrachten in het uiteindelijke materiaal ondersteund werden. De opdrachten vroegen bijvoorbeeld naar verschillen in resultaten voor twee verschillende situaties (expliciete aandacht voor structureren). In uitwerkingen werd bijvoorbeeld ingegaan op hoe resultaten berekend kunnen worden (expliciete aandacht voor beredeneren). In de vooronderzoeken hebben we veel aandacht besteed aan de inhoud van opdrachten en hebben we deze op basis van de uitkomsten aangepast. Ook zijn zogenaamde oriëntatieopdrachten toegevoegd, die bedoeld waren om leerlingen tot oriëntatie aan te zetten. Uit analyses bleek dat dit inderdaad tot meer exploratie in het interactieve gedeelte leidde. De inhoud van opdrachten bleek bepalend voor wat leerlingen doen en leren. In de data van het derde vooronderzoek zijn veel positieve signalen te vinden van vaardigheden van leerlingen op het gebied van de kernactiviteiten. Zo probeert een leerling bijvoorbeeld in abstracte algemene termen te formuleren hoe men aan een oplossing kan komen. Een ander voorbeeld is dat leerlingen laten zien dat ze hebben geleerd om bepaalde situaties te bekijken (structuren) om aan te kunnen tonen of een bewering waar is (bewijzen, beredeneren, aantonen).

Voor zowel de opdrachten als de terugkoppeling gold dat er keuzes gemaakt moesten worden wat betreft het sturende karakter daarvan. Hoeveel vrijheid krijgen leerlingen om een eigen vraag te onderzoeken, eigen ideeën uit te pluizen en de eigen weg naar het antwoord te volgen? Vrijheid kan een motiverende functie hebben, maar te veel vrijheid kan de leerlingen ook overvragen. Daarnaast gold dat de doelen die bereikt moesten worden vast stonden. Wat dat betreft was er dus geen vrijheid. Deze twee zaken staan op gespannen voet met elkaar, tenzij men ervan uitgaat dat de leerlingen uiteindelijk toch wel terecht zullen komen bij de van tevoren gestelde doelen. In het onderzoek gold dit in ieder geval niet voor de meeste leerlingen. Er moest flink meer sturing gegeven worden dan bij aanvang gedacht, aan de richting van het onderzoek van leerlingen. In dit onderzoek hebben we ervoor gekozen in de hoofdopdracht relatief weinig te sturen, maar in de later toegevoegde deelopdrachten (toegevoegd ter ondersteuning van de hoofdopdracht) veel sturing te geven.

Naast ondersteuning voor de activiteiten moet ook ondersteuning geboden worden voor het doen van onderzoek. De uitwerkingen van de opdrachten tonen leerlingen hoe onderzoeken gaat. Bovendien bieden de opdrachten en de uitwerkingen ondersteuning voor de lesstof zelf. Deze drie factoren samen, de lesstof, de activiteiten en het doen van onderzoek, maakt het geheel wel complex en de vraag om ondersteuning groot.

Uiteindelijk zijn vier SimQuest-applicaties in een grootschalig onderwijsonderzoek gebruikt. In deze applicaties wordt nog steeds (zoals in de eerste versies van de SimQuest-applicaties) gebruik gemaakt van contexten, maar nu zijn dit niet alleen concrete rijke contexten, maar fungeert de wiskunde zelf in sommige gevallen als context. Bovendien blijft de context niet de hele applicatie lang een rol spelen, zoals dit wel het geval was in de eerste versies. Er wordt een overgang van concreet naar abstract gemaakt in de serie opdrachten. De opbouw in de serie opdrachten is als volgt:

- Startpunt is bekende situatie voor leerlingen
- Bekende context met ‘wiskundige ogen’ bekijken
- De nieuw afgeleide wiskunde veralgemeniseren
- Algemene vorm met ‘wiskundige ogen’ bekijken

Daarnaast was het doel van de opdrachten niet langer om leerlingen zelf de formules en concepten te laten construeren uit hun resultaten. Leerlingen kregen deze begrippen nu geïntroduceerd en konden de eigenschappen van deze formules en concepten vervolgens zelf onderzoeken.

De opdrachten zijn uitgebreid met deelopdrachten, opdrachten ter ondersteuning als leerlingen niet slagen om de eigenlijke opdracht uit te voeren. Deze deelopdrachten zijn vormgegeven volgens het volgende stappenplan:
Stap 1: bedenk welke variabele (n) je gaat veranderen en naar welke uitvoer je kijkt.
Stap 2: welke mogelijkheden zijn er allemaal voor de waarden van de variabele(n)?
Stap 3: probeer de verschillende mogelijkheden uit.
Stap 4: kijk terug op het proces. Wat kun je concluderen?
Iedere deelopdracht bevat naast een deel waarin wordt gevraagd naar een mogelijke aanpak ook een deel met een voorbeelduitwerking.

Het bleek dat ook buiten het materiaal om ondersteuning geboden moest worden. We hebben dit vormgegeven door, onder andere, het voeren van klassengesprekken en het maken van leerstofoverzichten.

In klassengesprekken kan veel ondersteuning geboden worden voor kernactiviteiten die moeilijker te ondersteunen zijn via materiaal, zoals evalueren, interpreteren en beredeneren. Doordat leerlingen hun ideeën moeten verwoorden en 'verdedigen' tegenover anderen, worden leerlingen aangezet om dieper na te denken over wat ze doen.

Een tweede functie van het klassengesprek is sociaal. Tijdens een gesprek kunnen gezichtspunten, mogelijkheden en verbanden naar voren komen, die een leerling zelf nog niet had gezien. Eén van de gesprekspartners in het klassengesprek is de docent. Deze brengt onder andere de sociaal-culterele opvattingen van het vakgebied het gesprek binnen en heeft daarmee een belangrijke rol.

In de vooronderzoeken bleek dat het expliciet opdragen om conclusies te trekken gewenst is. De manier waarop dit in het derde vooronderzoek was vormgegeven bleek de leerresultaten te bevorderen. Echter, we verwachtten dat deze vorm van ondersteuning verbeterd kon worden door leerlingen meer vrijheid te geven. Het ging hierbij om vrijheid wat betreft de momenten waarop conclusies getrokken werden en hoe het overzicht van deze conclusies vormgegeven werd. Vandaar dat we het maken van een leerstofoverzicht hebben geïntroduceerd. Bij het maken van een leerstofoverzicht draait het niet om het antwoord van een berekening, maar om de vraag wat de leerling van die opdracht leert en hoe het geleerde zich verhoudt tot het overige. Leerlingen moeten algemene conclusies abstraheren uit hun oplossing. Daarna moeten ze deze geabstraheerde conclusie een plaats geven binnen hun kennisbestand.

De volgende vraag die beantwoord moest worden, was hoe het ontwikkelde materiaal in een reële klassensituatie ingezet kan worden. Het boek naast het ontwikkelde materiaal levert aansluitingsproblemen op. Naar aanleiding van het derde vooronderzoek besloten we in het grootschalig onderzoek het leerboek als leidraad te nemen. Dit betekende dat in het grootschalig onderzoek de indeling van het boek gevolgd werd en delen van applicaties bij onderdelen van het boek werden ingezet. Dit bleek niet optimaal, onder andere omdat formules nu 'uit de lucht kwamen vallen'. De integratie in dit onderzoek was nog onvoldoende. Een suggestie is dan ook om te kijken of het boek en het ontwikkelde materiaal niet in één geheel geïntegreerd kunnen worden.

Een tweede punt dat in een reële klassensituatie om de hoek komt kijken, is de tijdsdruk. Leerlingen zelf onderzoek laten doen kost tijd. Op dit moment zelfs te veel tijd. Ook docenten komen in contacturen in tijdnood omdat er te veel in de beperkte tijd besproken moet worden. Daarnaast moeten ze extra tijd inruimen voor het maken van een leerstofoverzicht.

Een derde punt waar bij het gebruik van computersimulaties aandacht aan besteed dient te worden zijn de faciliteiten. Op veel scholen zijn de faciliteiten niet voldoende om prettig en gemakkelijk gebruik van computers te kunnen maken in een contactuur. De tijd die het kunnen inzetten van computers kost, komt bovenop de bestaande tijdsdruk. Dat leerlingen thuis aan de slag gaan met materiaal op de computer, is minder vanzelfsprekend dan gedacht.

Uit het derde vooronderzoek bleek dat docenten behoefte hadden aan ondersteuning. Daarom is er voor het grootschalig onderzoek een docentenhandleiding ontwikkeld. Deze handleiding biedt docenten enige houvast over bijvoorbeeld de afwisseling en afstemming van lessen met het boek en werken met SimQuest-simulaties. Om docenten handvatten te kunnen geven hoe ze het boek en de simulaties afwisselend in hun lessen konden inzetten, hebben we de verschillende onderwerpen in lesfasen verdeeld: oriëntatie, inleiding, verwerking en recapitulatie. Bij elk van deze fasen hebben we vervolgens aangegeven welke onderdelen van de applicaties gebruikt konden worden. De bedoeling was dat leerlingen na een inleiding van een docent, zelfstandig of in groepen met het materiaal aan de slag gingen en waarna op basis van hun ervaringen een klassengesprek plaats moest vinden (verwerking). Wanneer een onderwerp werd afgesloten was het de bedoeling dat het leerstofoverzicht werd uitgebreid met enkele korte belangrijke bevindingen (recapitulatie).

In het grootschalig onderzoek is bij een aantal klassen het ontwikkelde materiaal ingezet tijdens de wiskunde lessen (de experimentele conditie) en een aantal andere klassen volgde het “normale” onderwijs (de controle conditie). Aan dit onderzoek namen 11 scholen deel met in totaal 20 klassen. Uiteindelijk ging het in totaal om 418 leerlingen, waarvan 206 mannen en 212 vrouwen. De klassen waren 4 VWO klassen. Leerlingen volgden verschillende profielen, 155 leerlingen volgden een M-profiel (maatschappij) en 263 leerlingen een N-profiel (natuur). Van de 20 klassen zaten er 7 klassen in de controle conditie en 13 in de experimentele conditie. In totaal zaten 140 leerlingen in de controle conditie en 278 leerlingen in de experimentele conditie. De indeling in condities was niet willekeurig.

De leereffecten van het inzetten van het ontwikkelde materiaal zijn gemeten met een eindtoets. We hebben in de toets niet de kernactiviteiten, en ook niet de onderzoeksvaardigheden, maar wel de beheersing van de lesstof onderzocht. De eindtoets in het grootschalig onderzoek is grotendeels gebaseerd op de toetsen uit het derde vooronderzoek. Bij de ontwikkeling van de toets is rekening gehouden met de dekking van het hoofdstuk, de hoeveelheid opgaven, de mate van transfer, de mate van inzicht en/ of technieken die getoetst wordt en de wiskundige moeilijkheidsgraad van de toets. Bij het meten van transfer is onderscheid gemaakt tussen beide condities, omdat die verschilden in de opdrachten die de leerlingen tijdens de lessen hebben gemaakt.

Bij aanvang van het onderzoek scoorden de leerlingen uit de experimentele conditie lager op de voortoets dan de leerlingen uit de controle conditie. Na afloop van het onderzoek is het verschil in wiskundekennis tussen de leerlingen uit beide condities afgenomen. Beide condities scoorden gelijk op de eindtoets. Hoewel de totaalscore van beide groepen vergelijkbaar was, waren er wel accent verschillen.

Leerlingen uit de controle groep bleken significant beter in opgaven waarbij vooral technieken belangrijk zijn. Ook maakten deze leerlingen de toets in een hoger tempo. Dat wil zeggen ze komen significant vaker aan één van de laatste opgaven toe. We hebben hieruit geconcludeerd dat de leerlingen uit de controlegroep hun kennis meer geautomatiseerd hebben. Inzichtopgaven worden door de experimentele conditie beter gescoord, maar dit verschil is niet significant. De voortoetsscore is in deze analyses als covariaat meegenomen.

Uit de resultaten komt een aantal maal een interactie-effect tussen conditie en geslacht naar voren. Vrouwen halen betere resultaten in de controle conditie, terwijl mannen beter scoren in de experimentele conditie.

Bij één experimentele klas uit het grootschalig onderzoek, de diepteklas, hebben we vrijwel iedere les geobserveerd. Hierdoor konden we ons een beeld vormen van de implementatie en de rol van de docent. Uit de resultaten komt naar voren dat de docent een cruciale voorbeeldrol speelde in de ontwikkeling van de gewenste houding bij leerlingen. De docent stelde bijvoorbeeld vragen, zoals die binnen de wiskunde gesteld worden. In de loop van de tijd gingen zijn leerlingen soortgelijke vragen stellen. Voor deelname aan een klassengesprek is het belangrijk dat er een veilige sfeer is in de klas. In de diepteklas was de docent zich hiervan bewust en nam hij maatregelen om die veiligheid te waarborgen.

In zowel de diepteklas als ook in andere klassen werden de klassengesprekken door de docenten positief ervaren. Het bleek dat in de diepteklas de verschillende activiteiten in de klassengesprekken op verschillende momenten in een klassengesprek aan bod kwamen. Zo bleek bijvoorbeeld tijdens een klassengesprek dat de precieze definitie van een concept belangrijk is (presenteren en communiceren).
Wegens tijdgebrek is het maken van leerstofoverzichten in het grootschalig onderzoek door veel docenten, onder andere die van de diepteklas, geschrapt.

We trekken uit het onderzoek in de diepteklas de voorlopige conclusie dat een lesindeling waarin leerlingen na een inleiding van een docent eerst zelfstandig of in groepen met het materiaal aan de slag gaan en waarin vervolgens op basis van hun ervaringen een klassengesprek plaats vindt, een indeling met potentieel is.

2 Discussie

Bij de ontwikkeling van onderwijsmateriaal hebben we op basis van een aantal uitgangspunten materiaal ontworpen en verbeterd. Vervolgens is de effectiviteit van het materiaal beoordeeld. In dit hoofdstuk bespreken we ons onderzoek aan de hand van deze driedeling (uitgangspunten, ontwikkeling en implementatie en effecten).

2.1 Uitgangspunten

Aan het in dit onderzoek ontwikkelde materiaal lag een aantal uitgangspunten en/of ideeën ten grondslag. Het algemene uitgangspunt was dat we onderwijsmateriaal wilden ontwikkelen dat leerlingen ondersteunt bij het actief betekenisvol leren. Deze uitgangspunten hebben we vertaald in het gebruik van contexten en in ontdekkend/onderzoekend leren. In deze paragraaf gaan we op deze beide aspecten in.

Contexten

Het uitgangspunt: waarom is er voor gebruik van contexten gekozen?
We schreven in de inleiding (deel 1, hoofdstuk 1) dat er volop discussie is over het gebruik van contexten bij het leren van wiskunde. Onze keuze voor de aanwezigheid van contexten in het ontwikkelde materiaal berustte op twee argumenten. Ten eerste, contexten verlenen de leerstof betekenis voor leerlingen omdat ze authentieke problemen, problemen uit het dagelijks leven, presenteren. Dit vergroot hun relevantie voor de leerlingen wat weer kan bijdragen aan hun motivatie. Ten tweede, contexten kunnen ertoe bijdragen dat leerlingen gemakkelijker relevante voorkennis activeren en hen daardoor ook in staat stellen problemen beter te begrijpen en op te lossen. Wanneer er voor contexten wordt gekozen rijst vervolgens de vraag hoe omvattend de rol van die context moet zijn. Volgens verschillende auteurs moeten over de gehele reikwijdte van een concept voorbeelden gegeven worden (o.a. Merrill, 1983; Merrill & Tennyson, 1977; Van Merriënboer, 1997). Keuze voor één context kan de opgedane kennis sterk contextgebonden maken (Bjork & Richardson-Klavehn, 1989). Maar het is bijzonder tijdrovend als leerlingen voor elk probleem een nieuwe context moeten verkennen.

Twijfels over contexten
Bij aanvang van ons onderzoek werden alle opdrachten over een onderwerp gekoppeld aan één context. De realisatie van geschikte contexten, dat wil zeggen met de juiste wiskundige omvang en wiskundige relevantie, was lastig en er rezen vragen over het nut van contexten.

Eén van de problemen met het ontwerp van contexten was gelegen in het realiseren van realisme. De context over Mobieltjes zoals gebruikt in het grootschalig onderzoek bleek bijvoorbeeld niet erg gelukkig gekozen. Deze context zorgde voor verwarring zoals bleek uit data uit de diepteklas. Leerlingen redeneerden bijvoorbeeld dat zij bellen tot hun maximumbedrag bereikt is. Kijken naar abonnementen zoals dat in Mobieltjes gebeurt lag buiten hun leefwereld. Bovendien besteedde de simulatie geen aandacht aan gratis belminuten of het sturen van sms'jes. Kortom, leerlingen herkenden in de simulatie hun leefwereld niet.

Een ander probleem had te maken met de grootte van de context. Het Zwitserleven bleek bijvoorbeeld te omvangrijk; de context omvatte teveel wiskundige onderwerpen en daaraan verbonden opdrachten. De applicatie was ontwikkeld om de begrippen richtingscoëfficiënt en snijpunt met de y-as te behandelen. Dit werd in deze applicatie gekoppeld aan routes op een kaart, waardoor ook de stelling van Pythagoras een rol speelde (om afstanden te berekenen). In de hoofdvraag draaide het om hoe een afstand het snelst afgelegd kon worden. Inperking van opdrachten leidde tot het schrappen van

Pythagoras, en daarmee het schrappen van berekeningen van afstanden. De context verloor zo zijn betekenis.

We wijzigden zodoende ons uitgangspunt dat alle opdrachten aan een context gekoppeld moesten zijn. Ook in de theorie werden argumenten gevonden die leidden tot bijstelling van het standpunt. Het argument hier is het gevaar van contextgebonden kennis. In reactie op de stelling “Hoe hecht leren wordt verbonden aan context hangt af van het soort kennis dat verworven wordt” geven Anderson, Reder en Simon (1996) aan dat soms de complexiteit (of rijkheid) van een probleem precies datgene is dat eraf moet om eerste principes bloot te leggen, of overeenkomsten tussen een set van problemen te laten zien. Wat dit zegt over het gebruik van contexten is dat er een risico is dat ze door hun complexiteit een leerling soms eerder verwarren dan bijdragen aan begripsvorming. Een vergelijkbaar argument geeft Petraglia (1998a) die stelt dat een correspondentie met de leefwereld niet voldoende is om te voldoen aan authenticiteitvoorwaarden, voorwaarden die maken dat leerlingen het idee hebben dat ze aan een relevant, accuraat en gepast probleem werken. Volgens Petraglia is het niet mogelijk om een authentieke situatie via leerbronnen aan te bieden omdat de voor leerlingen beschikbare informatie niet geleverd wordt door de leefwereld maar is gegenereerd door het idee van de ontwerper over de juiste informatiedichtheid en conceptuele associatie met die leefwereld.

Anderson, Reder en Simon (1996) pleitten niet voor afschaffing van contexten, maar voor een combinatie met abstract onderwijs. Abstract onderwijs maakt het volgens hen mogelijk dat leerlingen kennis beter kunnen toepassen in nieuwe contexten. De concrete toepassingen leren leerlingen hoe ze deze abstracte kennis kunnen inzetten. Anderson et al. (1996) baseren hun mening op een groot aantal onderzoeken waaruit blijkt dat een combinatie van abstract onderwijs en specifieke concrete voorbeelden beter is dan één van beide.

Wij volgden de redenering van Anderson et al. (1996). Na het derde vooronderzoek zijn de contexten in het onderzoek niet meer allesomvattend gemaakt. De eerste opdrachten die naar specifieke kenmerken van een voorbeeld vragen zijn nog wel contextgebonden, maar daarna wordt er nog slechts op deze specifieke kenmerken ingegaan. In deze opdrachten wordt met de uit de context geabstraheerde ideeën gewerkt.

Onderzoeken of zelf construeren en/of afleiden

Bij ontdekkend/onderzoekend leren moet de leerling een onderliggend model door het gebruik van simulaties zien te doorgronden. Ons uitgangspunt was om leerlingen zoveel mogelijk eigen ideeën te laten uitzoeken en eigen vragen te laten beantwoorden. Dit konden leerlingen doen door zelf situaties uit te proberen in het interactieve gedeelten in de applicaties. De aanname was dat leerlingen gemotiveerd zouden zijn door opdrachten en zelf wiskundig relevante vragen en ideeën bedenken en die te toetsen met het interactieve gedeelte. Er is een aantal belangrijke voorwaarden waaraan moet zijn voldaan voor een realisatie van dit ideaal van onderzoekend/ontdekkend leren.

1. De opdrachten moeten de leerlingen de ruimte geven tot exploreren.

In de verschillende vooronderzoeken hebben we geprobeerd de juiste mate van sturing te vinden. Bij een goede balans worden leerlingen uitgedaagd en denken ze zelf na zonder overvraagd te worden. Onderzoekend leren is niet motiverend als van leerlingen verwacht wordt dat zij zelf een wetenschappelijk gezichtspunt ontwikkelen maar daar niet toe in staat zijn (Palmer, 2005). Bij de vooronderzoeken hadden we de indruk dat leerlingen overvraagd en daardoor wellicht ontmoedigd werden. Overvragen bleek bijvoorbeeld uit het feit dat in het derde vooronderzoek de deelopdrachten voor alle leerlingen noodzakelijk bleken en sommige leerlingen zelfs na het maken van deze opdrachten nog aangaven begrip te missen. In ieder nieuw onderzoek brachten we daarom meer sturing aan in het materiaal. In het grootschalig onderzoek bevatten de deelopdrachten uitgewerkte voorbeelden. We vroegen ons af of we nu wellicht te veel sturing in het materiaal hadden aangebracht. We zagen echter in de diepteklas dat de docent nog meer sturing aanbracht. Dit duidt erop dat de mate van sturing misschien zelfs nog te beperkt was.

2. Leerlingen moeten met relatief open opdrachten om kunnen gaan.
Leerlingen hebben graag duidelijkheid en zetten docenten onder druk om die ook te geven (Doyle & Carter, 1984). De leerlingen verwachten ook van de SimQuest-applicaties duidelijkheid. In de vooronderzoeken zijn we, om tegemoet te komen aan deze behoefte, meer gaan sturen. Maar de vraag rijst 'Is het niet beter om leerlingen met dit soort openheid van vraagstukken om te leren gaan in plaats van de grote sturing te blijven geven?' In dit verband is de ontwikkeling in de N-klas in het derde vooronderzoek interessant. Leerlingen lijken ergens doorheen te moeten. In het begin leken leerlingen niet te weten wat ze moesten doen. Aan het einde van het onderzoek leken ze beter met de openheid om te kunnen gaan. Ze haakten niet meer direct af, terwijl dat in het begin wel de reactie was. Mogelijk hebben de docenten geholpen door de leerlingen vertrouwen te geven en in te gaan op het proces van oplossen. De docent moet voor voldoende emotionele zekerheid zorgen, zodat de leerlingen de cognitieve onzekerheid aankunnen. Wellicht dat ook binnen het materiaal zelf meer aandacht voor de emoties van leerlingen moet komen (Van der Meij, 2007).

3. Leerlingen moeten ondersteund worden om aan de slag te gaan en te blijven.
In het grootschalig onderzoek hebben wij de docent een centrale, vertellende en kennisoverdragende, rol gegeven. We sluiten ons aan bij Nieuwenbroek (2006; p. 19) die schrijft:

> "Hoewel in het huidige Studiehuis de rol van docent steeds beperkter wordt en meer een richtinggevende is langs de zijlijn, pleit ik voor een meer actieve en aanwezige docent. Dat hoeft niet in een vaste setting te zijn, met lessen waarin klassikaal kennis wordt overgebracht. Maar om een leerling optimaal te laten leren moet een docent wel een rolmodel en een inspirator zijn, iemand waar je op terug kan vallen."

Een aantal resultaten van het derde vooronderzoek leidden tot de keuze voor een dergelijke rol, namelijk de wens om 'onvolledig begrip' van leerlingen om te buigen tot leermomenten, de wens tot een klassikale introductie en de functie van de docent bij het leggen van verbanden tussen boek en simulaties.

'*ombuigen van onvolledig begrip tot leermomenten*' Uit het derde vooronderzoek kwam naar voren dat uitwisseling van ervaringen en ideeën gewenst was, zodat een weinig precieze formulering van antwoorden, mogelijkheden die niet gezien worden en onjuist getrokken conclusies tot leermomenten getransformeerd konden worden. Daarom voerden we het klassengesprek in, met de docent in de rol van deskundige die belangrijke werkwijzen en overtuigingen uit het vakgebied introduceert en bespreekbaar maakt.

'*klassikale introductie van concepten en formules*' Om te voorkomen dat leerlingen (1) te veel tijd kwijt raken met onvruchtbare werkwijzen zoals 'het proberen' en (2) niet aan de slag kunnen met de opdracht omdat ze direct aan het begin al vast lopen, voerden we een klassikale inleiding in.

'*het zien van verbanden*' Uit het derde vooronderzoek kwam naar voren dat leerlingen moeite hadden om verbanden tussen de stof uit het leerboek en die uit de simulaties te zien. De docent kan deze verbanden voor leerlingen duidelijk maken.

Kortom in onze ogen past een docent uitstekend in een centrale, demonstrerende en kennisoverdragende rol binnen een actieve onderzoekende leeromgeving. Zo'n rol van de docent is niet alleen mogelijk, maar op een aantal momenten zelfs zeer wenselijk. Een docent in een dergelijke rol is soms een voorwaarde om het mogelijk te maken dat leerlingen aan de slag gaan en blijven.

4. Leerlingen moeten de vaardigheden en kennis bezitten om relevante wiskundige vragen te stellen.
De bedoeling van de leeractiviteiten is dat leerlingen na afloop bepaalde wiskundige begrippen kennen en kunnen toepassen. In de inleiding (deel 1, hoofdstuk 1) stelden we: 'Wiskundesimulaties geven de leerlingen de gelegenheid om interactief en dynamisch de kenmerken van wiskundige formules en begrippen te ontdekken'. In de loop van het onderzoek zijn we ons gaan realiseren dat dit de gedachte impliceert dat een confrontatie met kenmerken van formules en begrippen

automatisch tot ontdekking / formulering van deze formules en concepten leidt. In dat geval moet enkel het samenvoegen en ordenen van experimentele resultaten voldoende zijn om tot een concept of formule te komen, waarbij het niet anders kan dan dat deze overeenkomen met de eerder door anderen (experts uit het vakgebied) geformuleerde concepten en formules. Echter wanneer er ook een stukje creativiteit zit in de formulering van een concept of formule, dan is het samenvoegen en ordenen van experimentele resultaten alleen onvoldoende. Concepten en formules zijn in dat geval creaties. Volgens vele wetenschappers is dit laatste het geval (Miller, 1984).

De gedachte dat leerlingen niet vanzelf op concepten komen, is ook te vinden in het sociaal constructivisme. Volgens sommige auteurs is het zelfs ‘onmogelijk’ om concepten te ontsluieren door ‘het boek van de natuur te lezen’ (o.a. Driver et al., 1994). Rodrigues schrijft daarover (2000; p.8):

> Constructivist-influenced science educators do not expect a student to be able to intuitively develop and construct accepted scientific understandings. Most science concepts have developed over hundreds of years, as scientists from various eras have modified ideas and theories. In essence, a science educator with a constructivist view of learning would provide opportunities for students to accommodate new concepts or modify their existing concepts to match those currently accepted by the scientific community.

In dit onderzoek zijn we langzamerhand van het zelf afleiden en construeren van concepten zonder introductie over gegaan tot het onderzoeken van kenmerken van geïntroduceerde concepten. We merkten op dat wanneer er veel ondersteuning gegeven dient te worden, waarbij de opdrachten eigenlijk slechts invuloefeningen geworden zijn, het de vraag is in hoeverre we nog van zelf construeren en afleiden kunnen spreken.

2.2 Ontwikkeling en implementatie: Het optimaliseren van inhouden en activiteiten

Tijdens de ontwikkeling worden ideeën verscherpt, doordat bij de concretisering ervan keuzes moeten worden gemaakt. Op basis van de uitgangspunten hebben we in het onderzoek materiaal ontwikkeld. In paragraaf 2.1 beschreven we enkele veranderingen in onze uitgangspunten in de loop van het onderzoek, zoals de verschuiving van zelf afleiden en construeren van concepten zonder voorafgaande introductie, naar het onderzoeken van eigenschappen van geïntroduceerde concepten. Er is een wisselwerking geweest tussen ideeën aan de ene kant en de realisatie in materiaal en gebruik van dit materiaal aan de andere kant. Het concretiseren van ideeën in materiaal en observaties van het leerproces verscherpen de implicaties van deze ideeën en dat kan leiden tot bevestigen, nuanceren of bijstellen van de ideeën.

Optimaliseren van het materiaal door observaties van het leerproces voorafgaand aan het toetsen van het materiaal op effectiviteit, is een vorm van onderzoeken die in dit onderzoek zeer waardevol is gebleken. Een voorbeeld is de manier waarop leerlingen met opdrachten omgaan. We zagen bij een aantal leerlingen dat ze veelvuldig het interactieve gedeelte manipuleerden, waardoor de kwantitatieve maten ‘aantal uitgevoerde SimQuest-berekeningen’ en ‘tijd die aan de opdracht besteed is’ hoge waarden hadden. We constateerden echter ook dat de mate waarin ze ‘wiskundig actief’ waren, beperkt was. Zo zagen we bijvoorbeeld dat sommige leerlingen SimQuest-berekeningen uitvoerden, die ‘overbodig’ waren als ze actief eerdere resultaten geïnterpreteerd hadden. Op basis van de observaties over onder andere dit soort ‘overbodige’ SimQuest-berekeningen hebben we het materiaal aan kunnen passen.

In dit onderzoek ligt de nadruk op zes kernactiviteiten. Deze kernactiviteiten zijn denkprocessen die niet rechtstreeks te meten zijn. Bij de toets wordt kennis gemeten waaruit slechts op indirecte wijze iets over vaardigheden op het gebied van de activiteiten te concluderen is. Ook om deze reden is het observeren van het leerproces van belang om zo informatie te krijgen over de vaardigheid van leerlingen in deze kernactiviteiten.

We waren in dit onderzoek geïnteresseerd in meer dan alleen leereffecten. We wilden ook graag (oorzaken van) knelpunten in het leerproces signaleren. Het is bijvoorbeeld een vraagstuk hoe verschillende bronnen op elkaar aan kunnen en moeten sluiten. In de observaties kan over deze aansluiting data verzameld worden. Een kennistoets levert hierover geen data op. De toets toont alleen het leereffect van het totaal, zonder informatie over de totstandkoming van deze resultaten. Nu bleek bijvoorbeeld in het derde vooronderzoek dat de leerlingen in de lessen zonder de SimQuest-applicaties niet (volledig) van hun ervaringen uit de lessen met SimQuest-applicaties konden profiteren. In het grootschalig onderzoek constateerden we dat de afstemming verbeterd moet worden omdat nu in de SimQuest-applicaties formules 'uit de lucht kwamen vallen'.

Kortom, ontwikkelingsonderzoek met meerdere slagen van ontwikkelen, observeren, interpreteren en verbeteren, is een belangrijke vorm van onderzoek. Het verzamelen van zowel kwalitatieve data als kwantitatieve data is hierbij waardevol omdat beide elkaar aanvullen.

Te beperkte tijd of te beperkte mogelijkheden in het materiaal of op school kunnen ertoe leiden dat ideeën niet gerealiseerd kunnen worden. In de volgende paragrafen zullen we ingaan op de opzet van ons onderzoek, beperkingen bij de ontwikkeling en de implementatie tijdens dit onderzoek en de relevantie (en aansluiting) van de lesstof.

Mogelijkheden voor terugkoppeling

De vertaling van uitgangspunten, zoals actief en inzichtvol leren, naar software is niet altijd eenvoudig. Rodrigues (2000) heeft onderzocht hoe software-ontwerpers omgaan met de wensen van een onderwijsdeskundige. Het blijkt dat veel ideeën niet mogelijk zijn door ontbrekende technologie of technologische beperkingen, zoals de afwezigheid van programma's die natuurlijke taal kunnen interpreteren. Rodrigues constateert dat in software, gebaseerd op constructivistische uitgangspunten, veel 'wat' vragen voorkomen en niet 'waarom' of 'hoe' vragen. Deze laatste soorten vragen passen echter veel beter bij constructivistische ideeën.

In dit onderzoek zagen we iets soortgelijks. We noemden bijvoorbeeld een aantal maal de beperkingen in terugkoppeling. We lieten zien dat er een spanningsveld bestaat tussen vrijheid en mate waarin terugkoppeling mogelijk is. Hoe opener vragen zijn en hoe meer ze naar inzicht vragen, hoe minder specifieke softwarematige terugkoppeling mogelijk is. Dit heeft ons doen besluiten om in deelopdrachten uitgewerkte voorbeelden als terugkoppeling te geven. Uit onderzoek van Lee, Nicoll en Brooks (2004) blijkt dat animaties gekoppeld aan uitgewerkte voorbeelden leiden tot betere toetsresultaten dan simulaties waarbij leerlingen zelf variabelen moeten manipuleren. In ons onderzoek hebben we de simulaties gekoppeld aan uitgewerkte voorbeelden. Wellicht is het een idee om op sommige plaatsen hieraan animaties toe te voegen. Het gebrek aan mogelijkheden tot specifieke softwarematige terugkoppeling heeft er ook toe geleid dat we de docent (en medeleerlingen) als een belangrijke bron van terugkoppeling zijn gaan zien, bijvoorbeeld tijdens het voeren van een klassengesprek.

In de SimQuest-applicaties was het niet mogelijk om de interface uit te breiden met specifieke hulp op segmenten. Dit gebeurt bijvoorbeeld wel in het programma WiskHint (Harskamp & Suhre, 2006). Leerlingen kunnen daarin verschillende soorten ondersteuning opvragen, namelijk ondersteuning voor het analyseren van een probleem, het kiezen van de juiste wiskundige gereedschappen of het formuleren van een oplossingsplan (zie figuur 2.1 voor een voorbeeld van deze ondersteuning).

Formule gebruiken

Als je een formule wilt gebruiken om de vraag op te lossen, moet je eerst zoeken naar een regelmaat:

1 keer vouwen Þ 1 vouwlijn

2 keer vouwen Þ 2 extra vouwlijnen, dus totaal 3 vouwlijnen.
3 keer vouwen Þ 4 extra vouwlijnen, dus totaal 7 vouwlijnen.
4 keer vouwen Þ 8 extra vouwlijnen, dus totaal 15 vouwlijnen.
enz.

Hoeveel vouwlijnen komen er telkens per keer vouwen bij? Het aantal vouwlijnen dat er bijkomt blijkt steeds een macht van 2 te zijn. Is dat toeval? Wat kun je met dat gegeven?.

Het aantal vouwlijnen neemt exponentieel toe lijkt het. De algemene formule voor exponentiële groei luidt:

$y = a \cdot b^{x} + c$

Kun je deze formule invullen? Klopt het dan met de gegevens die je al hebt?

(2. Vouwlijnen, aanpak, formule gebruiken, WiskHint)

Figuur 2.1 *Voorbeeld van ondersteuning in WiskHint (Harskamp & Suhre, 2006)*

Wellicht zijn het geven van uitgewerkte voorbeelden en het door leerlingen laten oproepen van hulp op segmenten te koppelen. Dit sluit aan bij wat Van der Meij en Carroll (1998) voorstellen. Zij suggereren het programmeren van 'een goeroe' die op aanvraag van gebruikers suggesties en tips geeft. Daarbij gaat het programma niet alle stappen van de gebruiker af, maar geeft een algemene aanpak of oplossing zoals een expert die zou geven. Ook Atkinson en Renkl (2007) opperen om in computer-leeromgevingen hulp op aanvraag in de vorm van uitgewerkte voorbeelden te geven.

Hoewel verder onderzoek naar mogelijkheden om ook binnen de SimQuest-applicaties leerlingen specifieke hulp op segmenten te laten opvragen gewenst is, blijft in onze ogen de docent een belangrijke rol spelen omdat hij per leerling kan variëren wat hij toont en/of hoeveel hij stuurt.[33]

Tijdgebrek bij implementatie

In deel 3 concludeerden we op basis van de resultaten van het grootschalig onderzoek dat de voorgestelde implementatie niet volledig haalbaar was. Een belangrijke oorzaak was tijdgebrek. Zo zijn de meeste docenten bijvoorbeeld niet toegekomen aan het maken van een leerstofoverzicht wegens tijdgebrek. Verder onderzoek naar elementen die in de door ons voorgestelde implementatie en didactiek noodzakelijk zijn, is nodig. Maar daarnaast dient te worden overwogen of er misschien te veel lesstof in te beperkte (contact)tijd behandeld moet worden. Deze conclusie is voor het wiskundeonderwijs al vaker getrokken (Carnine & Jones, 1994). Deze kwestie kan op twee manieren aangepakt worden, namelijk ofwel meer contacturen in de week, ofwel schrappen van lesstof. Bij het schrappen zijn verdere keuzes denkbaar. Het is mogelijk om het aantal onderwerpen te reduceren, of het aantal hoofdonderwerpen gelijk te houden maar daarvan slechts een beperkt aantal aspecten diepgaand te behandelen.

[33] Het is misschien ook mogelijk om dit met behulp van het programma te doen. Maar het is de vraag of het de investering waard is om de docent te 'vervangen' door het programma. Er moeten van te voren verschillende vormen van terugkoppeling worden ontworpen, met daarbij een omschrijving van wanneer welke ondersteuning gegeven wordt. Deze ontwikkeltijd is kostbaar. Gezien de frequentie waarmee curricula aangepast worden en voorbeelden gemoderniseerd, gaat het hierbij niet om een eenmalige investering.

Tijdsduur van implementatie

De tijdsduur van het onderzoek was beperkt waardoor leerlingen in korte tijd moesten leren onderzoeken en relatief vaak de werkvorm 'onderzoekend leren' werd toegepast. Tijdens de interviews na het grootschalig onderzoek merkte een docent op dat het misschien beter zou zijn om het onderzoeken vanaf het eerste jaar op te bouwen. Leerlingen werden nu ineens het diepe ingegooid. Een voordeel van een leerlijn vanaf het eerste jaar is dat de verschillende lessen over langere tijd uitgesmeerd worden, waardoor een overkill aan de werkvorm onderzoekend leren voorkomen kan worden.

Combineren en afstemmen van boek en SimQuest-applicaties

Een aandachtspunt in dit onderzoek was de afstemming tussen boek en SimQuest-applicaties. De indeling van beide verschilde bijvoorbeeld wat leidde tot problemen. Het boek is ingedeeld op onderwerp; de SimQuest applicaties op thema/context (zie deel 2 paragraaf 5.1 en deel 3 hoofdstuk 9). Dit 'botste'. Tijdens een interview stelde een docent voor om het boek en de SimQuest-simulaties te integreren. Wellicht dat bij integratie de overbelasting enigszins gereduceerd kan worden. Zo kan oriëntatie, inleiding en ontwikkelen van inzicht deels met simulaties gebeuren (de oriëntatieopdracht uit het boek kan dan verdwijnen), terwijl in het boek de theorie kort wordt weergegeven. Na contextrijke simulaties kan in het boek vervolgd worden met meer 'kale rijtjes' om technieken en vaardigheden in te oefenen. We constateerden dat het goed begrijpen van een context en bijbehorende opdracht veel tijd vraagt en we denken dan ook dat niet bij iedere opdracht/opgave een nieuwe context moet worden aangeboden.

Bij verdere ontwikkeling zou naast integratie ook opnieuw naar de afstemming tussen boek en SimQuest-applicaties gekeken moeten worden. Daarvoor kan gebruik gemaakt worden van de bevindingen uit dit onderzoek, zoals de observatie dat de docent uit de diepteklas ook bij het leerboek 'SimQuest-vragen' stelde (vragen zoals die telkens in de SimQuest-applicaties gesteld werden), en bijvoorbeeld, de uitkomsten over de formulering van opdrachten en het ondersteunen van kernactiviteiten.

Met een aantal conclusies over de ondersteuning van de verschillende kernactiviteiten in ons achterhoofd, hebben we nogmaals naar het leerboek gekeken. We bespreken de mogelijkheid voor ondersteuning in het boek voor de twee kernactiviteiten die vooral in de beginfase van het uitwerken van SimQuest-opdrachten (dus zonder dat dataverzameling nodig is) spelen, namelijk abstraheren en structureren.

Abstraheren In deel 2, hoofdstuk 2 beschreven we dat het benadrukken van het belang van een uitgebreide oriëntatie, een vorm van ondersteuning van het abstractieproces, is. De tekst in het boek is beperkt en lijkt niet direct een uitgebreide oriëntatie uit te lokken. Een voorbeeld van mogelijke oriëntatievragen bij de opgave uit figuur 4.4 van deel 1 hoofdstuk 4 zijn: "wat ben jij bereid om maximaal voor een ijsje te betalen?" en "is dit bedrag hetzelfde als dat van je klasgenoten?". Deze vragen nodigen de leerling uit om vanuit het perspectief van de ijscoman te gaan kijken en eerste ideeën op te doen over het verband tussen prijs en aantal. In het leerboek worden dergelijke vragen niet gesteld. De eerste drie deelvragen in het boek gaan meteen de wiskundige diepte in (zie deel 1, hoofdstuk 4, figuur 4.6). Voor vrijwel alle opdrachten kan deze aanpak gevolgd worden. In het boek kunnen expliciete opmerkingen toegevoegd worden over het abstractieproces, de vertaling terug en de interpretatie van antwoorden verkregen uit abstracte berekeningen. Er blijft gelden dat de ruimte in een boek beperkt is en dat de auteur altijd een aantal stappen in het abstractieproces doet. Daarom blijft de docent belangrijk voor het leren abstraheren.

Structureren Eén van de vormen van ondersteuning is het expliciet maken van verbanden tussen opdrachten. Het boek verwijst bij de behandeling van een nieuw onderdeel niet terug naar eerder besproken verwante onderwerpen. Dit geldt zowel voor de theorieteksten als voor de opdrachten en voorbeelduitwerkingen. Expliciete verwijzingen naar of vragen naar verbanden met andere opdrachten kunnen worden toegevoegd. Ook kan een toelichting gegeven worden over het waarom van deelstappen of verwezen worden naar eerdere opdrachten wanneer leerlingen niet uit de opdracht komen.

We zagen in de diepteklas dat de docent ‘per ongeluk’ een verkeerde opdracht oploste, waarna hij opnieuw begon met de opdracht waarnaar een leerling had gevraagd. De klas dacht eerst dat de eerste oplossing van de docent geen antwoord was op de oorspronkelijke vraag. Bij de tweede oplossing zagen ze de overeenkomst met de oplossing van de ‘verkeerde’ opdracht. Een docent is in staat om zo’n toneelspel op te voeren om tot een verrassende conclusie te komen. Alleen integreren van boek en SimQuest-materiaal zal dit niet bewerkstelligen.

Faciliteiten

We zagen dat de faciliteiten vaak ontoereikend waren. Dankzij hun enthousiasme hebben de deelnemende docenten zich hierdoor niet af laten schrikken. De vraag is echter in hoeverre dit normaal ook het geval zal zijn. Wanneer het ieder contactuur 10 minuten duurt voor er ingelogd is en de juiste opdracht open is, gaat veel kostbare tijd verloren. Ook het regelen van een computerlokaal kost de docent moeite en tijd. De gebrekkige faciliteiten zullen dan ook een belangrijke reden zijn om van veelvuldig computergebruik in de les af te zien. Hoewel er de afgelopen jaren veel geld is besteed aan ICT-faciliteiten op school, moeten we concluderen dat de faciliteiten op de onderzochte scholen onvoldoende waren om materiaal, zoals ontwikkeld in dit onderzoek, goed en veelvuldig te kunnen inzetten.

Aansluiting

In de inleiding (deel 1, hoofdstuk 1) stelden we dat de aandacht in de Tweede Fase voor algemene vaardigheden ten koste is gegaan van vakinhoudelijke kennis en vaardigheden waardoor de aansluiting met het vervolg onderwijs niet optimaal is. In ons onderzoek hebben we een grote plaats ingeruimd voor een aantal kernactiviteiten. Is onderwijs in het verkrijgen van vaardigheden op het gebied van de genoemde kernactiviteiten verstandig in het kader van een goede aansluiting, ook wanneer je geen wiskunde gaat studeren?

Het antwoord op deze vraag is positief; ook breder dan wiskunde zijn deze vaardigheden nuttig voor leerlingen. Leren hoe je resultaten moet interpreteren bereidt voor op de latere praktijk in onderzoek. Stein (2007) (zie ook deel 1, hoofdstuk 3) gaat in op de onzekerheid die samengaat met het doen van onderzoek. Stein schrijft hierover:

> ‘Een nieuwe uitdaging betreft de kwaliteit van gegevens. Alle gegevens zijn onzeker, het ene wat meer dan het andere. Zo kennen we onzekerheid in de meetlocaties, een beperkt aantal meetpunten, onzekerheid bij het modelleren van de ruimtelijke samenhang en ons onvermogen om met deze onzekerheid om te gaan.’

We noemden al een aantal maal de onzekerheid die onlosmakelijk verbonden is met het doen van onderzoek. Leerlingen zijn bijvoorbeeld niet zeker of ze alle mogelijkheden wel hebben gehad. Wat dat betreft kunnen vakinhoudelijke vraagstukken ook bijdragen aan het verwerven van algemene vaardigheden, zoals in dit geval aan het omgaan met onzekerheid en het zich realiseren dat dit bij onderzoeken hoort.

Ook de confrontatie in de SimQuest-applicaties met de ‘andere manier van wiskunde’ draagt bij aan een goede aansluiting. De openheid van vraagstukken is iets waar leerlingen mee om moeten gaan (zie punt 2 in paragraaf 2.1, Onderzoeken of zelf construeren en/of afleiden). In dit onderzoek zagen we dat leerlingen ‘weten wat je moet doen’ (het kunnen uitvoeren van bepaalde technieken) en ‘het snappen’ (het beheersen en begrijpen van de wiskundestof) aan elkaar gelijk stellen. Wanneer een docent leerlingen vertelt wat ze moeten doen naar aanleiding van de vraag ‘meneer, ik snap het niet’ reageren ze vaak met ‘ik snap het’. Het is echter maar de vraag of dit klopt, ze doelen er waarschijnlijk op dat ze weten wat ze moeten doen. Vraagstukken in de werkelijkheid zijn vaak ook open. Het is goed als leerlingen daar op school al mee om leren gaan.

2.3 Resultaten

In het grootschalig onderzoek vonden we een gelijke score op de eindtoets voor beide condities. In deze paragraaf zullen we ingaan op mogelijke oorzaken van de afwezigheid van verschil tussen beide condities en het gevonden interactie-effect voor geslacht.

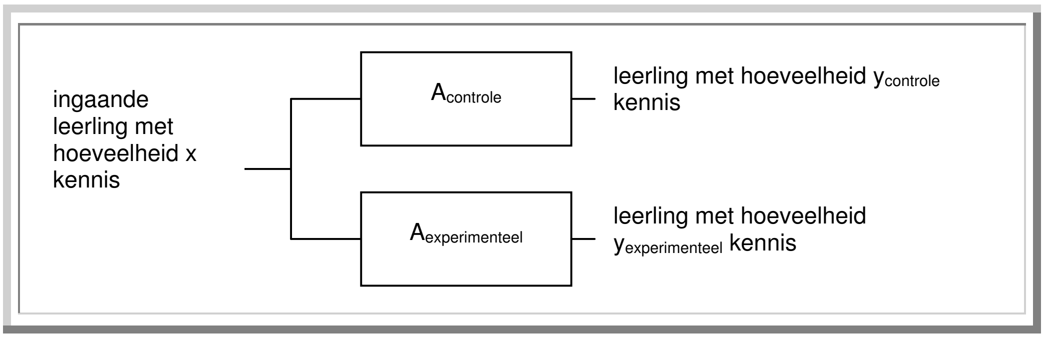
2.3.1 Mogelijke oorzaken afwezigheid verschil in scores tussen condities

In deze paragraaf bespreken we twee aspecten die de uitkomst van het grootschalig onderzoek mogelijk hebben beïnvloed, te weten: zuiverheid van de meting en de focus van de toets.

Zuiverheid meting: Hoeveelheid geïnvesteerde tijd

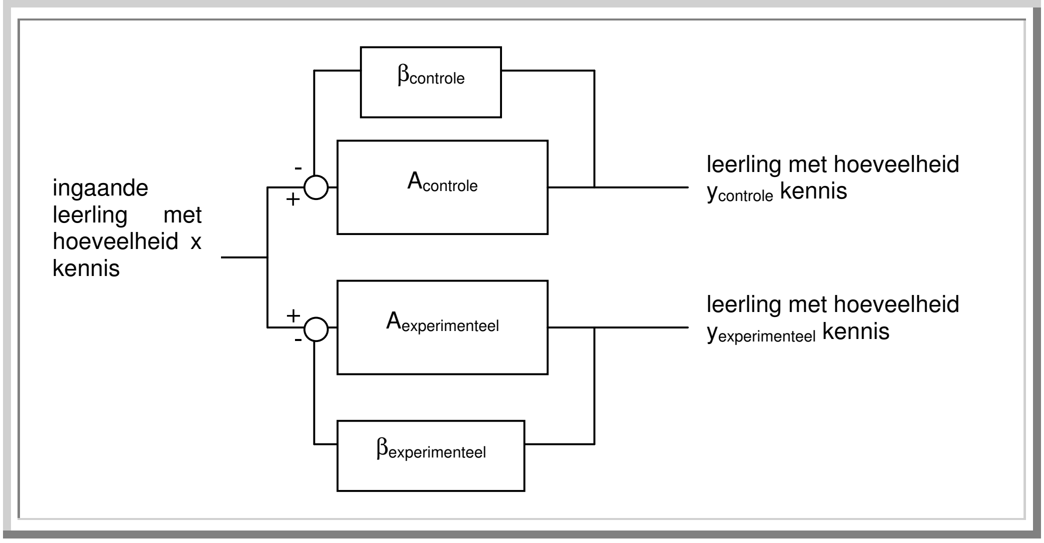
In het grootschalig onderzoek hadden we geen controle over de tijdsbesteding van de leerlingen. Praktische omstandigheden (verschillen tussen scholen, de lengte van het onderzoek, het feit dat leerlingen ook thuis werkten, het feit dat leerlingen ook andere vakken volgden die op hun tijd aanspraak maakten) maakten het onmogelijk voor de hoeveelheid geïnvesteerde tijd te controleren. Het kan daarom zijn dat leerlingen in één van beide condities thuis of op school harder hebben gewerkt. Als de leerling denkt dat hij het niet goed snapt, kan hij besluiten zich meer in te spannen. Andersom kan een leerling besluiten zich minder in te spannen als hij denkt dat hij het goed of voldoende snapt (gaan voor de 6 i.p.v. de 10, of meer tijd voor andere vakken nodig hebben). Wat voor invloed heeft dit op de resultaten van onze meting?

We hebben geprobeerd dit in een model te vatten. Dit model is als volgt opgebouwd: 'Een leerling komt met een bepaalde hoeveelheid kennis binnen. Vervolgens wordt deze leerling onderwezen, zodat de kennis toeneemt, wat in dit model wordt voorgesteld als vermeerdering. Na afloop heeft de leerling een bepaalde hoeveelheid kennis, die we middels toetsen proberen te meten. We gaan er vanuit dat het verschil in kennis een gevolg is van een verschil in effectiviteit van de onderwijs methode. We nemen aan dat we dit verschil in effectiviteit van de instructie rechtstreeks meten door het verschil in hoeveelheid kennis te meten na afloop van het gevolgde onderwijs.' In figuur 2.2 is dit weergegeven.



Figuur 2.2 *Basismodel van kennisvermeerdering*

Eén van de aannamen is dat leerlingen proberen maximaal te scoren. Maar wat als een leerling 'bij regelt'? Op basis van het idee dat leerlingen over hun eigen begrip hebben, kunnen ze ervoor kiezen om hun tijd aan een ander vak te besteden of om juist meer tijd in wiskunde te steken. Er is dan sprake van terugkoppeling en het bovenstaande schema voldoet niet meer. In figuur 2.3 is het basismodel uit figuur 2.2 uitgebreid met een terugkoppellus.



Figuur 2.3 *Het basismodel uitgebreid met een terugkoppellus*

Wat betekent een dergelijke terugkoppeling voor wat we meten aan de uitgang? We nemen voor het gemak even aan dat kennis kwantificeerbaar is op een intervalschaal. In dit model gaan we er in eerste instantie vanuit dat de β voor beide systemen gelijk is. De hoeveelheid kennis aan de uitgang is nu gelijk aan:

$$y = \frac{A}{1 + A \cdot \beta} \cdot x$$

Een klein rekenvoorbeeld.
Stel in de controle situatie neemt de kennis met een factor 3 ($A_{controle} = 3$) toe en in de experimentele fase met een factor 4 ($A_{experimenteel} = 4$). Wanneer er geen terugkoppeling zou zijn, levert dit bij het meten na het volgen van het onderwijs een verschil in kennis van 4x – 3x = x op. Wanneer er sprake van terugkoppeling is, levert dit een verschil van:

$$\frac{4}{1+4\cdot\beta}\cdot x - \frac{3}{1+3\cdot\beta}\cdot x = \frac{4+12\cdot\beta}{(1+4\cdot\beta)\cdot(1+3\cdot\beta)}\cdot x - \frac{3+12\cdot\beta}{(1+4\cdot\beta)\cdot(1+3\cdot\beta)}\cdot x = \frac{1}{(1+4\cdot\beta)\cdot(1+3\cdot\beta)}\cdot x =$$

$$\frac{1}{1+7\cdot\beta+12\cdot\beta^2}\cdot x$$

Afhankelijk van β is het verschil nu veel kleiner geworden, terwijl de effectiviteit van de methoden niet veranderd is. De terugkoppeling zorgt ervoor dat de methode minder snel significante verschillen bij toetsing levert. Het is, met andere woorden, mogelijk dat de instructiemethoden significant verschillen in effectiviteit, maar dat we geen significant verschil meten.

We kunnen het model nog uitbreiden, door voor verschillende leerlingen een verschillende β te kiezen. Een leerling 'meet' bijvoorbeeld zijn begrip door na te gaan hoe goed hij in staat is om opdrachten op te lossen. Eigenlijk wordt niet het echte begripsniveau teruggekoppeld, maar het idee dat de leerling van zijn begrip heeft. Het kan zijn dat de leerling zijn eigen begrip over- of onderschat. Dit kunnen we modelleren door β aan te passen. Wellicht is het afhankelijk van de conditie of er sprake is van over- of onderschatting. De β is in dat geval niet meer gelijk voor beide condities. De leerlingen uit de experimentele conditie kunnen niet vertrouwen op hun referentiekaders. In het derde vooronderzoek gaven sommige leerlingen in het interview aan alsnog het hele hoofdstuk doorgewerkt te hebben (zie deel 2, paragraaf 4.2.5). Ook tijdens het grootschalig onderzoek kwamen er signalen dat sommige leerlingen alsnog het hele hoofdstuk door gingen werken. Hoewel niet gemeten zijn er dus aanwijzingen dat de leerlingen in de experimentele groep onzekerder waren over hun begrip.

Focus van de toets: Meting van kernactiviteiten

In het derde vooronderzoek hebben we gezocht naar manieren om meer dan alleen kennis te toetsen. In het grootschalig onderzoek is uiteindelijk alleen kennis getoetst. We kunnen hierdoor geen uitspraak doen over de vraag of de experimentele groep haar onderzoeksvaardigheden (verder) ontwikkeld heeft[34]. Verder onderzoek naar bevredigende manieren van toetsen van onderzoeksvaardigheden is belangrijk.

De toets in het grootschalig onderzoek meet nu bijvoorbeeld niet direct de vaardigheden van leerlingen over de kernactiviteiten. Gedetailleerdere analyses, zoals uitgevoerd in het derde vooronderzoek, zouden wellicht toch verschillen tussen beide condities aan het licht kunnen brengen. In het derde vooronderzoek concludeerden we dat leerlingen weinig reflecterende opmerkingen maakten. Een vluchtige scan van de resultaten leidt tot het vermoeden dat dit ook in het grootschalig onderzoek weinig gebeurt in beide condities.

2.3.2 Het interactie-effect tussen geslacht en conditie

Een opvallend resultaat was het interactie-effect tussen geslacht en conditie. Een deel van de verklaring kan mogelijk gevonden worden op het gebied van de onzekerheidstolerantie (Bennett, Herold, & Ashford, 1990; Frenkel-Brunswik, 1949). Deze theorie zegt dat leerlingen en docenten met een hoge onzekerheidstolerantie meer profiteren van een open leeromgeving. Leerlingen en docenten met een lage onzekerheidstolerantie hebben meer baat bij strak ingeplande omgevingen. Zo vonden DeRoma, Martin en Kessler (2003) dat het trainen van tolerantie voor ambiguïteit leerlingen beter voorbereidt op minder gestructureerde leeromgevingen. Wellicht dat vrouwen relatief vaker een lagere onzekerheidstolerantie hebben. Hoewel we geen literatuur hebben kunnen vinden waaruit dit blijkt, komt in de risicopsychologie wel vaak naar voren dat vrouwen een voorkeur hebben voor minder risico (Powell & Ansic, 1997; p.607; Stinerock, Stern, & Solomon, 1991). Dit wordt door Schneider en Lopes (1986) gekoppeld aan een voorkeur voor veiligheid. Verder onderzoek is nodig of de verklaring (deels) in deze hoek gezocht moet worden.

2.4 Conclusie

De kreet ‘geef de docent zijn vak terug’ wordt in de media veelvuldig gebruikt. In dit onderzoek blijkt dat de docent op vele punten een belangrijke rol speelt in het leerproces van leerlingen. Zo kan de docent bijvoorbeeld een belangrijke voorbeeldrol vervullen bij het leren stellen van vakgerelateerde vragen.

De creativiteit en flexibiliteit van een docent zijn onmisbare vormen van ondersteuning van het leren. We constateerden regelmatig dat ondersteuning (nog) niet door het leerboek of een computerprogramma kan worden geboden. De docent kan creatief en flexibel ondersteuning bieden in nauwe aansluiting op wat er in de klas speelt. Ervaringen die leerlingen opdoen wanneer zij werken

[34] Beide groepen scoren qua kennis gelijk en mocht blijken dat de experimentele groep daarnaast haar onderzoeksvaardigheden verder heeft ontwikkeld, dan pleit dit in het voordeel van de ontwikkelde didactiek.

met opdrachten uit het leerboek of SimQuest-materiaal vormen de basis waarop, bijvoorbeeld tijdens een klassengesprek, leren door interactie met medeleerlingen en de docent kan plaatsvinden. De docent 'heeft zijn vak' en kan daarbij vormen van ondersteuning als een leerboek of SimQuest-materiaal inzetten. Belangrijk is dan wel dat er voldoende contacttijd is, waarin uitwisseling van gedachten kan plaats vinden.

'Zijn vak' heeft in dit onderzoek voor een belangrijk deel de invulling 'het verwerven van vaardigheden op het gebied van zes kernactiviteiten' gekregen. Welke activiteit wanneer het onderwerp van de les kan en moet zijn, is een onderdeel van het vak van de docent.

3 English summary

In this thesis our starting point was that learning results improve when learners are actively engaged in the subject matter. The central question then is how active learning, and the accompanying learning activities, can be stimulated and supported. We emphasized six core activities which are central within mathematics and mathematical problem solving:

- abstracting,
- structuring,
- evaluating,
- interpreting,
- reasoning / proving / showing, and
- communicating / presenting.

In a frequently used Dutch teaching method (Getal & Ruimte) most of these activities don't seem to get much attention and learners are hardly supported while acquiring skills in these activities. To enlarge the role of core activities and/or to offer better support, we developed new ICT-based materials in the authoring environment SimQuest. In addition to these simulation-based materials, we developed conclusion schemes and a teacher guide.

With the developed materials we tried to bring about that learners acquired mathematical concepts and raise their mastery of the mentioned core activities (further). In addition we paid attention to a third learning goal, namely the acquisition of research skills. Our presumption was that learners who explore mathematical situations themselves by means of computer simulations become active. Herein, each core activity is emphasized at different moments in time. Abstracting and structuring often play a role in the early phases. Evaluating, interpreting and reasoning are activities which take place after results are collected. Communicating and presenting play both at the beginning (understanding the assignment and knowing the meaning of concepts and notions of an assignment) and at the end (answering the assignment).

In the developed materials the SimQuest applications take a crucial role. The SimQuest applications consist of an instruction and an assignment part. In the interactive part learners can manipulate variables and observe the results using various representations, such as graphs, animations and output fields. The computer simulations are embedded in an instruction environment. This instruction environment has the possibility to offer support to learners through assignments, explanatory texts, and model progression. In the developed applications assignments play a central role. In the application the first assignment, and possibly the second and third, always starts with an introduction text. This text provides the context, poses the main question, and introduces the interactive part. Besides a categorisation in themes, assignments are also categorised by their degree of complexity. The themes are directly visible for learners, the degree of complexity is not.

During the development of the SimQuest materials attention had to be paid to aspects such as the subject of the assignments, content of the assignments, support in the material, support additive to the material, and testing. In each of these choices had to be made, for example, whether to use abstract- or rich concrete contexts as the subject of an assignment. A concrete context has a motivating function when it gears to the learners' perception of their environment. But learners differ, and their perception of their environment differs as well. Furthermore it is a question whose concreteness it is. The environment is determined by the choices of the developers. This also means that developers already made the initial steps in the abstraction process. Learners have to make an effort to get to the same point in this process. It was one of the research questions whether it was necessary to support learners and if so, how this support should be shaped. Another important choice is the number of topics, should there be one context in which all lessons and assignments are intertwined or should there be a new context for every new lesson or assignment. The advantage of many different contexts is that learners get to know the subject from different perspectives. In addition, it is relatively simple to make a division based on content in which the various topics can be separated easily. The disadvantage is that learners have to engage in a new context over and over again.

At the start of the studies we chose to develop a limited number of applications, in which every application had one concrete rich context. An example of such a context was the organisation of a beneficial concert. The premise of the development of the accompanying assignments was that learners were not introduced to the concepts and accompanying equations, but had to construct these themselves from their results.

We adapted the developed materials, especially the SimQuest applications, on the basis of the results of the studies. In these studies, which we called preliminary studies, a total of 77 learners from pre-scientific education (average age 15-16) participated, 41 women and 36 men. Learners attended different tracks, 36 learners attended an M-track (social-track) and 41 learners followed an N-track (science-track). The participants of the first two preliminary studies had already been taught the subject matter, the participants of the third preliminary study had not. In the third preliminary study three mathematics teachers also participated.

In the first preliminary study there were two main questions, namely
(a) Are the different parts of the SimQuest application used? and
(b) How are the various parts used?
The second preliminary study was about the main questions:
(a) To what extent are the different mathematical concepts and activities discussed? and
(b) What role do the two following aspects play in the discussion of those mathematical concepts and core activities:
(1) the different phases in the problem solving process and
(2) the factors
- pre-knowledge,
- simulation skills,
- research skills,
- monitoring and
- rules, norms and values?

In the third preliminary study we examined to what extent the materials were usable in a realistic classroom environment. Hereafter a large scale study followed, in which the usability of the materials in a realistic classroom environment was also a central issue, but in contrast to the third preliminary study the developers where absent this time and the teachers were given suggestions about the embedding (based on the result of the third preliminary study). Thus the large scale study was about the usability and efficiency of the SimQuest applications and the supporting materials (for the embedding of the SimQuest applications).

An important distinction between learners is the way in which they deal with the interactive part. As a result of the outcome of the second preliminary study we distinguish four working methods, namely (1) learning by → thinking and → checking with the interactive part, (2) learning by → thinking, → checking with the interactive part, and exploring with the program, (3) learning by → exploring with the program and → then thinking, and → checking with the interactive part, and (4) only exploring with the interactive part. With the last working method, it can be expected that the core activities rarely come under discussion. The preliminary studies show that several aspects of the core activities are not carried out (sufficiently) by (part of) the learners. We will now discuss our observations of these aspects. As a consequence of these observations we adapted the materials in order to address problems discussed below for the large scale study. For this reason we mainly discuss the observations from the preliminary studies that illustrate what did not go well with (part of) the learners.

Abstracting
To abstract means that a situation is disposed of situation-bound aspects and represented in more general terms. As a matter of fact abstracting means mathematising the situation, that is- viewing a situation in mathematical terms.

A first aspect of abstracting is *grasping the core of an assignment*. Often there is a difference between the usual perspective of the learner and the perspective he has to take in assignments. The learner has to grasp the starting point of the author. In some sense the learner has to repeat the abstraction steps made by the author of the assignment. We noticed in the preliminary studies that a lot of learners don't get to this point by themselves. A form of support then is to emphasize the importance of an extensive orientation. It turned out that due to insufficient orientation learners didn't succeed in carrying out the assignments successfully. Linked to this are questions like 'why is this information given' and 'how can this information be translated into a mathematical problem'.

A second aspect of abstracting is *vertical mathematising*. In the preliminary studies it turned out that some learners have to be stimulated to do so. A part of the learners do not progress to a higher level of (mathematical) abstraction themselves, but kept reasoning and giving context-bound answers.

Structuring
Structuring is about discovering coherence in sets by learners. One can look at assignments in a task, at mutual tasks, and at tasks and subject matter in the textbook. To discover the coherence between the different assignments in a task, learners have to compare the different assignments and identify the similarities and differences. In order to tackle problems in the right way, a learner has to know what the core issue of the problem is and which knowledge he should apply. The learner needs to understand the structure. It turned out that many learners don't think about the position of new subject matter in relation to the entire subject matter. Moreover, several learners don't succeed in using knowledge gained earlier in subsequent problems. When using different resources such as the developed simulations and the textbook, learners have trouble viewing relations between the different resources if no explicit attention is paid to this.

Evaluating
Evaluating means that a learner has to judge whether his ideas, assertions or predictions are in agreement with the results of the interactive part. Evaluation delivers a judgement. Are the results as expected, can these results be right? Many learners don't ask these kinds of questions.

There are various signs of (the absence of) evaluating activities. Most of these are indirect, they are about the outcome. For example a faulty evaluation can be observed when a learner gives an answer which is in conflict with the data collected. Another example is the absence of remarks that results cannot be right, when learners have calculated wrong values in a test. Moreover such remarks are also absent in the teaching materials. Possible causes of faulty evaluation after data collection by learners are inaccurateness and 'blindness' due to preconceptions.

Interpreting
Interpreting is about the applied explanation of results. A learner determines what the results mean to earlier or new actions. An interpretation can have consequences on decisions about the values learners choose for the variables in a new assignment. What do the results imply? What do they say about the concepts I'm working on? Several learners hardly deal with these questions.

We see that, generally, the follow-up acts of learners are based on their obtained results. Some learners proceed using qualitative reasoning, others use quantitative reasoning. The quality of the interpretation seems to be an important determining factor in the number of SimQuest calculations that learners perform to get to an answer.

Despite obtaining correct results, interpretation isn't always correct. One of the possible causes is the lack of making notes. Another cause is the (partial) absence of a solution approach.

Proving / reasoning / showing
Proving, reasoning, and showing are thinking activities that learners perform in order to discover, underpin or explain assertions. For example, they have to derive things from propositions, give arguments as to why an equation is (not) right, or why an idea is plausible. We make a difference between qualitative and quantitative reasoning. Qualitative reasoning leads to a directive relation between variables. An example is the statement ‘if the length increases, the width decreases’. In quantitative reasoning the values in the equation are specified. An example is the statement ‘if the length increases by 10, the width decreases by 10’.

Many learners have to be stimulated to think about the underlying theory and why. The danger is that learners get stuck in doing, without understanding why. In that case, one can hardly consider this learning.

Proving, reasoning and showing are sometimes missing because part of the learners think they are finished when they have found an answer. They find it less relevant to understand where this answer comes from. This resulted in asking more often for explanations in assignments later on.

Communicating and presenting
In this study, communicating and presenting is solely about jargon. General aspects of communicating and presenting are outside the scope of this study. Jargon is a comprehending concept for aspects like mathematical terms (e.g. function, linear relation, and slope) and mathematical grammar (e.g. ways of notation and formulations such as ‘express O in l’ and ‘suppose the slope is positive, then the graph becomes steeper for an increasing slope’).

Materials need to be designed to adhere to the communication jargon which is in accordance to the discipline’s rules. Furthermore learners have to be able to answer in accordance with these rules. Limitations within the program are often the reason this is not possible. This is also partially the case in the authoring program SimQuest, in which the simulations were developed.

We observed that learners find it hard to formulate strictly enough, which is partially a result of insufficient skills in the other core activities.

Most core activities are supported by the developed SimQuest assignments in the final materials. The assignments, for example, question the differences in results between two different situations (explicit attention for structuring). Elaborations, for example, illustrate how results could have been calculated (explicit attention to reasoning). In the preliminary studies we paid a lot of attention to the content of assignments, which we adapted on the basis of the results. Furthermore so called orientation assignments were added, that were meant to stimulate learners to orientate. Analysis showed that this indeed lead to more exploration in the interactive part. The content of the assignments turned out to be a determining factor for what learners do and learn. In the data of the third preliminary study many positive signals can be found from skills of learners in the core activities. For example, a learner tries to formulate in abstract general terms how one can find a solution. Another example is that learners show that they have learned to look at certain situations (structuring) in order to be able to show that a proposition is true (proving, reasoning, showing).

For both the assignments as well as the feedback, choices had to be made to which extent their character should be directive. How much freedom do learners get to explore their own questions, to seek out their own ideas and to follow their own path to an answer? Freedom can be motivating, but too much freedom can also be taxing on learners. Moreover, goals that should be reached are fixed. From this perspective there is no freedom. These two are at odds with each other, unless one assumes that learners will eventually reach the goals formulated beforehand anyhow. In this study this wasn’t the case for most of the learners. Learners required much more direction than expected. Therefore we chose to offer relatively little direction in the main assignment, but to offer a lot of direction in the sub-assignments (added to support the main assignment).

Apart from support for the activities also support for doing research had to be offered. Elaborations of the assignments show learners what doing research is about. Furthermore the assignments and elaborations offer support for learning of the subject matter itself. Thus intergrating subject matter, activities and doing research make it a complex task for learners, and there is a clear need for support.

Eventually four SimQuest applications were used in a large scale educational study. In these applications contexts are still used (as in the first versions of the SimQuest applications), but these are no longer just concrete rich contexts, but sometimes the mathematics itself serves as context. In addition the context doesn't play a role through the entire application as was the case in earlier versions. A transition was made from concrete to abstract in a series of assignments. The structure in the series of assignment was as follows:

- The starting point is a well-known situation for learners
- Looking at the well-known context with 'mathematical eyes'
- Generalising the newly derived mathematics
- Looking at the general form with 'mathematical eyes'

Furthermore the goal of the assignments was no longer that learners had to construct equations and concepts from their results themselves. These concepts were now introduced to learners and they could explore the properties of these equations and concepts.

The assignments are extended with sub-assignments, assignments for supporting learners when they don't succeed to perform the original assignment. These sub-assignments are shaped according to the following step-by-step plan:
Step 1: Consider which variable(s) you're going to change and at which output you're going to look at.
Step 2: What are the different possibilities for the values of the variable(s)?
Step 3: Try the different possibilities.
Step 4: Look back at the process. What can you conclude?
Every sub-assignment included a part in which the learner is asked for a possible approach, as well as a part in which an exemplary elaboration was given.

It turned out that in addition to the SimQuest materials, support had to be offered. We supplied this by, among others, having class conversations and making subject-matter overviews.

In class conversations much support can be given to core activities which are harder to support via the material, such as evaluating, interpreting and reasoning. Because learners have to verbalise their ideas and 'defend' them against others, learners are encouraged to think more deeply about what they are doing.

A second function of a class conversation is social. Learners have to verbalise their ideas and 'defend' them against others. During a conversation, viewpoints, possibilities, and relations can come to the fore, which a learner didn't think of yet. One of the interlocutors is the teacher. He brings in, among others, the social cultural views of the profession and has with that an important role.

In the preliminary studies it turned out that explicitly instructing learners to draw conclusions is desirable. The way this was given shape in the third preliminary study turned out to improve learning results. However, we expected that this form of support could be improved further by giving learners more freedom. This involved freedom in the moments at which conclusions were drawn, and in how the overview of these conclusions was shaped. Therefore we introduced making a subject-matter overview. Making a subject-matter overview isn't about the outcome of a calculation, but about what a student learns from an assignment and how the learned knowledge relates to the whole of the subject-matter. Learners have to abstract a general conclusion from their solution. Subsequently they have to place this abstracted conclusion in their knowledgebase.

The next question, which had to be answered, is how the developed material can be embedded in a realistic class situation. A textbook next to the developed material causes incompatibility problems. As a result of the third preliminary study, we used the textbook for guidance in the large scale study. This meant that in the large scale study the structure of the textbook was followed and parts of the applications were used by parts of the book. This turned out to be sub-optimal, among others because equations came ‘out of the blue’. The integration was insufficient. A suggestion, therefore, is to see whether textbook and developed material can be integrated.

A second aspect which has to do with a realistic class situation is time pressure. Having learners perform research themselves takes time. Currently even too much time. Teachers also get into time trouble during their lessons because too much has to be discussed in too little time. Next to this they have to allocate time to make the subject matter overview.

A third aspect to which attention should be paid when using computer simulations are the facilities. In many schools the facilities aren’t sufficient to use them comfortably in contact lessons. The time it takes to use computers in lessons, has to be added to the existing time pressure. It is not as common as might be expected that learners work with the materials on their computer at home.

From the third preliminary study it turned out that teachers have a need for support. Therefore, for the large scale study a teacher guide was developed. This guide offers teachers something to fall back on, for example the alternation and tuning in of the lessons with the book and working with the SimQuest simulations. In order to be able to give teachers a handle on how they could use the book and the simulations alternately, we divided the different subjects in lesson phases: orientation, introduction, processing and recapitulation. For each of these phases we subsequently indicated which parts of the applications could be used. The idea was that learners, after an introduction by the teacher, autonomously or in groups worked with the materials after which on the basis of their experiences a class conversation should be conducted (processing). When a subject was finished, the idea was that the subject-matter overview was extended with short important findings (recapitulation).

In the large scale study we had an experimental condition in which the developed materials were used during the mathematics lessons. In the control condition ‘normal’ lessons were given. 11 schools participated in this study with 20 classes in total. A total of 418 learners participated, of which 206 men and 212 women. The classes were pre-scientific education classes with an average age 15-16. Learners attended different tracks, 155 learners attended an M-track (social track) and 263 learners followed an N-track (science track). Of the 20 classes, 7 classes were in the control condition and 13 classes were in the experimental condition. In total 140 learners were in the control condition and 278 learners were in the experimental condition. The division in conditions was not arbitrary.

The learning results of the use of the developed materials were measured with a post-test. In the post-test we didn’t measure the core activities, nor the research skills, but the mastery of the subject matter. The post-test in the large scale study is mainly based on the tests from the third preliminary study. During the development of the test the coverage of the chapter, the number of assignments, the amount of transfer, the amount of insight and / or techniques which are tested, and the mathematical difficulty of the test, were taken into account. In the measuring of the amount of transfer we discriminated between both conditions, because they both differed in assignments learners made during the lessons.

At the start of the study learners in the experimental condition scored less on the pre-test than learners in the control condition. After the study the difference in mathematical knowledge between both conditions decreased. Both conditions scored equally on the post-test. Although the total score of both conditions was comparable, there were marked differences.

Learners from the control group turned out to score significantly better on questions in which primarily techniques are important. Furthermore these learners made the test more rapidly. That is, they got around to one of the last questions more often. From this we concluded that these learners automated their knowledge more. Learners in the experimental condition scored better on insight questions, but this difference was not statistically significant. The pre-test scores were taken as a covariate in these analyses.

The results showed several interaction effects between condition and gender. Women achieved better results in the control condition, while men achieved better results in the experimental condition.

We observed one experimental class from the large scale study, the so called in-depth-class, almost every lesson. Through this we developed a picture of the implementation and the role of the teacher. The results show that the teacher played a crucial exemplary role in the development of the desired attitude of learners. The teacher asked, for example, questions as they are posed within mathematics. Over time learners started to ask similar questions. In order to participate in a class conversation it is important that there is a secure atmosphere in the class. In the in-depth-class the teacher was aware of this and took measures to guarantee learners felt secure.

In both the in-depth-class and in the other classes the class conversations were valued positively by the teachers. It turned out that in the in-depth-class the different core activities appeared at different moments of a class conversation. For example, during one class conversation a precise definition of a concept turned out to be important (presenting and communicating). Due to a lack of time in the large scale study the creation of a subject-matter overview was dropped by many teachers, including the teacher of the in-depth-class.

From our study in the in-depth-class we draw the preliminary conclusion that a lesson division is a potentially rich lesson division when learners work individually or in groups with the material after the teacher gave an introduction and subsequently a class conversation is held based upon learners' experiences.

Referenties

Abran, A. A., Khelifi, A., Suryn, W., & Seffah, A. (2003). Usability Meanings and Interpretations in ISO Standards. *Software Quality Journal, 11*, 325.

ACT Inc. (2001). ACT Assessment Homepage. from http://testdev.act.org/sampletest/test1/sr/srtest.html

Ainsworth, S. (2006). DeFT : A conceptual framework for considering learning with multiple representations. *Learning and Instruction, 16*, 183-198.

Anderson, J. R., Reder, L. M., & Simon, H. A. (1996). Situated learning and education. *educational researcher, 25*, 5-11.

Anderson, L. M. (1989). Classroom instruction. In M. C. Reynolds (Ed.), *Knowledge Base for the Beginning Teacher* (pp. 101-116). Exeter, Great Britain: BPCC Wheatons Ltd.

Anderson, R. D. (2002). Reforming science teaching: What research says about inquiry. *Journal of Science Teacher Education, 13*, 1-12.

Atkinson, R., & Renkl, A. (2007). Interactive example-based learning environments: Using interactive elements to encourage effective processing of worked examples. *Educational Psychology Review, 19*, 375-386.

Ausubel, D. P., Novak, J. D., & Hanesian, H. (1968). *Educational psychology. A cognitive view.* (second ed.). New York: Holt, Rinehart and Winston, Inc.

Baker, A. C., Jensen, P. J., & Kolb, D. A. (1997). In Conversation: Transforming Experience into Learning. *Simulation & Gaming, 28*, 6-12.

Bakker, A. (2005). Redeneren als basis voor begripsontwikkeling. *Panama-Post. Tijdschrift voor reken-wiskundeonderwijs: onderzoek, ontwikkeling, praktijk, 24*, 3-8.

Balacheff, N., & Sutherland, R. (1994). Epistemological domain of validity of microworlds - the case of Logo and Cabri-Geometre. *Lessons from Learning, 46*, 137-150.

Bauer, H. H. (1992). *Scientific literacy and the myth of the scientific method*. Urbana and Chicago: University of Illinois Press.

Bennett, N., Herold, D. M., & Ashford, S. J. (1990). The effects of tolerance for ambiguity on feedback-seeking behaviour. *Journal of Occupational Psychology, 63*, 343-347.

Bevan, N. N. (2001). International standards for HCI and usability. *International Journal of Human-Computer Studies, 55*, 533.

Biggs, J. B., & Collis, K. F. (1982). *Evaluating the quality of learning: The SOLO taxonomy*. New York: Academic Press.

Biggs, J. B., & Collis, K. F. (1991). Multimodal learning and the quality of intelligent behaviour. In H. A. H. Rowe (Ed.), *Intelligence: Reconceptualisation and Measurement* (pp. 57-76). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.

Bjork, R. A., & Richardson-Klavehn, A. (1989). On the puzzling relationship between environment context and human memory. In C. Izawa (Ed.), *Current issues in cognitive processes: The Tulane flowerree symposium on cognition.* Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Bransford, J. D., Brown, A. L., & Cocking, R. R. (Eds.). (1999). *How people learn: Brain, mind, experience, and school*. Washington, D.C: National Academy Press.

Broers, N. J., & Imbos, T. (2005). Charting and manipulating propositions as methods to promote self-explanation in the study of statistics. *Learning and Instruction, 15*, 517-538.

Browers, J., & Doerr, H. M. (2001). An analysis of prospectieve teachers' dual roles in understanding the mathematics of change: Eliciting growth with technology. *Journal of Mathematics Teacher Education, 4*, 115-137.

Brown, J. S., Collins, A., & Duguid, P. (1989). Situated Cognition and the Culture of Learning. *Educational researcher, 18*, 32-42.

Bruner, J. (1973). *Going beyond the information given*. New York: Norton.

Bruner, J., Goodnow, J., & Austin, A. (1956). *A study of thinking*. New York: Wiley.

Carnine, D., & Jones, E. D. (1994). Mathematics: Educational tools for diverse learners. *School Psychology Review, 23*, 406-428.
Carroll, J. M. (1990). *The Nurnberg funnel. Designing minimalist instruction for practical computer skill*. Cambridge, MA.: MIT Press.
Carroll, J. M., & Carrithers, C. (1984). Blocking learner error states in a training-wheels system. *Human Factors, 26*, 377-389.
Carroll, J. M., & Rosson, M. B. (1987). Paradox of the active user. In J. M. Carroll (Ed.), *Interfacing thought: Cognitive aspects of human-computer interaction*. Cambridge, MA: MIT Press.
Catrambone, R., & Yuasa, M. (2006). Acquisition of procedures: The effects of example elaborations and active learning exercises. *Learning and Instruction, 16*, 139-153.
Chamberlin, M. (2005). Teachers' discussions of students' thinking: Meeting the challenge of attending to students' thinking. *Journal of Mathematics Teacher Education, 8*, 141-170.
Chamoso Sanchez, J., Hernandez Encinas, L., Lopez Fernandez, R., & Rodriguez Sanchez, M. (2002). Designing hypermedia tools for solving problems in mathematics. *Computers & Education, 38*, 303-317.
Cheng, P. C. H. (1999). Unlocking conceptual learning in mathematics and science with effective representational systems. *Computers & Education, 33*, 109-130.
Chi, M. T. H., Bassok, M., Lewis, M. W., Reimann, P., & Glaser, R. (1989). Self explanations: How students study and use examples in learning to solve problems. *Cognitive Science, 13*, 145-183.
Chi, M. T. H., Feltovich, P. J., & Glaser, R. (1981). Categorization and representation of physics problems by experts and novices. *Cognitive Science, 5*, 121-152.
Cobb, P., & McClain, K. (2006). Guiding inquiry-based math learning. In R. K. Sawyer (Ed.), *The Cambridge handbook of the learning sciences* (pp. 171-186). Cambridge: Cambridge University Press.
Cobb, P., Wood, T., Jackel, E., Nichills, J., Weathleym, G., Trigatti, B., & Perlwitz, M. (1991). Assessment of a problem-centered second-grade mathematics project. *Journal for Research in Mathematics Education, 22*, 3-29.
Davis Jr, O. L. (1998). Beyond beginnings: From "hands-on" to "minds-on". *Journal of Curriculum and Supervision, 13*, 119-122.
Davis, R. B. (1984). *Learning mathematics: The cognitive science approach to mathematics education*. Worcester, Great Britain: Billing & Sons Limited.
De Jong, T. (1986). *Kennis en het oplossen van vakinhoudelijke problemen; een voorbeeld uit een natuurkundig domein.* Eindhoven University of Technology, Eindhoven.
De Jong, T. (2006a). Computer simulations - Technological advances in inquiry learning. *Science, 312*, 532-533.
De Jong, T. (2006b). Nieuw leren en oude kennis: Over bestaande evidentie voor de effectiviteit van "nieuwe" en "oude" vormen van leren. *Pedagogische Studiën, 83*, 89-94.
De Jong, T., & Ferguson-Hessler, M. G. M. (1984). Strategiegebruik bij het oplossen van problemen in een semantisch rijk domein: Electriciteit en Magnetisme. *Tijdschrift voor Onderwijsresearch, 9*, 3-16.
De Jong, T., & Ferguson-Hessler, M. G. M. (1986). Cognitive structures of good and poor novice problem solvers in physics. *Journal of Educational Psychology, 78*, 279-288.
De Jong, T., & Ferguson-Hessler, M. G. M. (1996). Types and qualities of knowledge. *Educational Psychologist, 31*, 105-113.
De Jong, T., & Van Joolingen, W. R. (1998). Scientific discovery learning with computer simulations of conceptual domains. *Review of Educational Research, 68*, 179-201.
De Lange, J. (1993). Between end and beginning: Mathematics education for 12-16 year olds: 1987-2002. *Educational Studies in Mathematics, 25*, 137-160.
DeRoma, V. M., Martin, K. M., & Kessler, M. L. (2003). The relationship between tolerance for ambiguity and need for course structure. *Journal of Instructional Psychology, 30*, 104-109.

Devlin, K. K. (1998). *Wiskunde : wetenschap van patronen en structuren* (J. van de Craats, Trans.). Beek: Segment uitgeverij.
Dewey, J. (1916). *Democracy and Education. An introduction to the philosophy of education*. New York: MacMillan.
Dewiyanti, S. (2005). *Learning together: A positive experience. The effect of reflection on group processes in an asynchronous computer-supported collaborative learning environment.* Open Universiteit Nederland, Heerlen.
Dienes, Z. P. (1963). *An experimental study of mathematics-learning*. London: Hutchinson.
Dienes, Z. P., & Golding, E. W. (1971). *Approach to modern mathematics*. New York: Herder and Herder.
Dillon, J. T. (1988). The remedial status of student questioning. *Journal of Curriculum Studies, 20*, 197-210.
Doorman, L. M. (2005). *Modelling motion: From trace graphs to instantaneous change.* Universiteit Utrecht, Utrecht.
Doyle, W. (1983). Academic Work. *Review of Educational Research, 53*, 159-199.
Doyle, W., & Carter, K. (1984). Academic Tasks in Classrooms. *Curriculum Inquiry, 14*, 129-149.
Drijvers, P. (2000). Students encountering obstacles using a CAS. *International Journal of Computers for Mathematical Learning, 5*, 189-209.
Drijvers, P. (2002). Wiskunde leren in een computeralgebra omgeving: Obstakels en kansen. *Nieuwe Wiskrant, 22*, 36-41.
Drijvers, P. (2006). Context, abstractie en vaardigheid in schoolalgebra. *Nieuw Archief voor Wiskunde, 7*, 198-203.
Driver, R., Asoko, H., Leach, J., Morimer, E., & Scott, P. (1994). Constructing scientific knowledge in the classroom. *Educational Researcher, 23*, 5-12.
Elio, R., & Scharf, P. B. (1990). Modelling novice-to-expert shifts in problem-solving strategy and knowledge organization. *Cognitive Science, 14*, 579-639.
Evans, J. S. B. T. (1989). *Bias in human reasoning : Causes and consequences*. East Sussex, U.K.: Lawrence Erlbaum Associates Ltd.
Evertson, C. M., Anderson, C. W., Anderson, L. M., & Brophy, J. E. (1980). Relationships between classroom behaviors and student outcomes in junior high mathematics and English classes. *American Educational Research Journal, 17*, 43-60.
Examen VWO 2007 tijdvak 1 woensdag 16 mei 13.30 - 16.30 uur wiskunde B1, podium verlichting (Publication. (2007). Retrieved 14-06-07: http://www2.cito.nl/vo/ex2007/700025-1-018o.pdf
Falcade, R., Laborde, C., & Mariotti, M. (2007). Approaching functions: Cabri tools as instruments of semiotic mediation. *Educational Studies in Mathematics, 66*, 317-333.
Ferguson-Hessler, M. G. M., & De Jong, T. (1990). Studying physics text; Differences in study processes between good and poor performers. *Cognition and Instruction, 7*, 41-54.
Frenkel-Brunswik, E. (1949). Intolerance of ambiguity as an emotional and perceptual personality variable. *Journal of Personality, 18*, 108-143.
Freudenthal, H. (1991). *Revisiting mathematics education: China lectures*. Dordrecht, the Netherlands: Kluwer Academic Publishers.
Friedler, Y., Nachmias, R., & Linn, M. C. (1990). Learning scientific reasoning skills in microcomputer-based laboratories. *Journal of Research in Science Teaching, 27*, 173-191.
Gick, M. L., & Holyoak, K. J. (1980). Analogical problem solving. *Cognitive Psychology, 12*, 306-355.
Gijlers, H. (2005). *Confrontation and co-construction: Exploring and supporting collaborative scientific discovery learning with computer simulations.* University of Twente, Enschede.
Goffree, F. (2002). Wiskundedidactiek in Nederland. Een halve eeuw onderzoek. *NAW, 5*, 11.
Grabinger, R. S. (1996). Rich environments for active learning. In D. H. Jonassen (Ed.), *Handbook of research for educational communications and technology* (pp. 665-692). New York: Simon & Schuster Macmillan.

Graesser, A. C., & Person, N. K. (1994). Question Asking during Tutoring. *American Educational Research Journal, 31*, 104-137.

Gravemeijer, K., Van den Heuvel-Panhuizen, M., Van Donselaar, G., Ruesink, N., Streefland, L., Vermeulen, W., te Woerd, E., & Van der Ploeg, D. (1993). *Methoden in het reken-wiskundeonderwijs, een rijke context voor vergelijkend onderzoek* (No. SVO-6010). Utrecht: Freudenthal-instituut.

Grayson, D. J., & McDermott, L. C. (1996). Use of the computer for research on student thinking in physics. *American Journal of Physics, 64*, 557-564.

Gregoire, M. (2003). Is It a challenge or a threat? A dual-process model of teachers' cognition and appraisal processes during conceptual change. *Educational Psychology Review, 15*, 147-179.

Gunstone, R. F., & Champagne, A. B. (1990). Promoting conceptual change in the laboratory. In E. Hegarthy-Hazel (Ed.), *The student laboratory and the science curriculum* (pp. 159-182). London: Routledge.

Guy, R. K. (1988). The Strong Law of Small Numbers. *The American Mathematical Monthly, 95*, 697-712.

Guy, R. K. (1990). The Second Strong Law of Small Numbers. *Mathematics Magazine, 63*, 3-20.

Hadamard, J. (1988). How I did not discover relativity. *The Mathematical Intelligencer, 10*, 65-67.

Hanrahan, M. (1999). Rethinking science literacy: Enhancing communication and participation in school science through affirmational dialogue journal writing. *Journal of Research in Science Teaching, 36*, 699-717.

Hardiman, P. T., Dufresne, R., & Mestre, J. P. (1989). The relation between problem categorization and problem solving among experts and novices. *Memory and Cognition, 17*, 627-638.

Harskamp, E., & Suhre, C. J. M. (2006). Improving mathematical problem solving: A computerized approach. *Computers in Human Behavior, 22*, 801-815.

Harskamp, E., Van Streun, A., & Suhre, C. (1996). *Handwerk en technologie in wiskunde tweede fase voortgezet onderwijs*. Groningen, the Netherlands: Gion.

Hendriksen, C. J. H. (2003). *Analyse van computerondersteunde leer- en instructieomgevingen ter ondersteuning van wiskundeonderwijs*. Enschede: Universiteit Twente.

Herbst, P., & Brach, C. (2006). Proving and doing proofs in high school geometry classes: What is it that is going on for students? *Cognition and Instruction, 24*, 73-122.

Hoek, D. J. (2007). Ontwikkeling van een leeromgeving voor samenwerkend leren. *Pedagogische Studiën, 84*, 407-417.

Honebein, P. C., Duffy, T. M., & Fishman, B. J. (1993). Constuctivism and the design of learning environments: Context and authentic activities for learning. In T. M. Duffy, J. Lowyck, T. M. Welsh & D. H. Jonassen (Eds.), *Designing environments for constructive learning*. Berlin: Springer.

Horton, P. B., McConney, A. A., Gallo, M., Woods, A. L., Senn, G. J., & Hamelin, D. (1993). An investigation of the effectiveness of concept mapping as an instructional tool. *Science Education, 77*, 95-111.

Howe, C., Tolmie, A., Duchak-Tanner, V., & Rattray, C. (2000). Hypothesis testing in science: Group consensus and the acquisition of conceptual and procedural knowledge. *Learning and Instruction, 10*, 361.

Johnson, D. W., & Johnson, R. T. (1987). *Learning together and alone: Cooperation, competition, and individualistic learning* (2nd ed.). N.J. : Prentice-Hall: Englewood Cliffs.

Joiner, K. F., Malone, J. A., & Haimes, D. H. (2002). Assessment of classroom environments in reformed calculus education. *Learning Environments Research, 5*, 51-76.

Jonassen, D. H. (1991). Objectivism versus constructivism: Do we need a new philosophical paradigm? *Educational Technology: Research & Development, 39*, 5-14.

Kanselaar, G., Van Dooren, W., & Verschaffel, L. (2007). Wiskunde en ICT. Een discussiebijdrage. *Pedagogische Studiën, 84*, 418-427.

Kester, L., Lehnen, C., Van Gerven, P. W. M., & Kirschner, P. A. (2006). Just-in-time, schematic supportive information presentation during cognitive skill acquisition. *Computers in Human Behavior, 22*, 93-112.

Keys, C. W., Hand, B., Prain, V., & Collins, S. (1999). Using the science writing heuristic as a tool for learning from laboratory investigations in secondary science. *Journal of Research in Science Teaching, 36*, 1065-1084.

Klein, A. S., Beishuizen, M., & Treffers, A. (1998). The Empty Number Line in Dutch Second Grades: Realistic versus Gradual Program Design. *Journal for Research in Mathematics Education, 29*, 443-464.

Koichu, B., Berman, A., & Moore, M. (2006). Heuristic literacy development and its relation to mathematical achievements of middle school students. *Instructional Science*, 1-41.

Korthagen, F., & Lagerwerf, B. (1995). Levels in learning. *Journal of Research in Science Teaching, 32*, 1011-1038.

Kreijns, K., Kirschner, P. A., & Jochems, W. (2003). Identifying the pitfalls for social interaction in computer-supported collaborative learning environments: A review of the research. *Computers in Human Behavior, 19*, 335-353.

Kroesbergen, E. H., & Van Luit, J. E. H. (2002). Teaching multiplication to low math performers: Guided versus structured instruction. *Instructional Science, 30*, 361-378.

Kuhn, T. S. (1970). *The structure of scientific revolutions*. Chicago: University of Chicago Press.

Kyle, W. C., Linn, M. C., Bitner, B. L., Mitchener, C. P., & Perry, B. (1991). The role of research in science: An NSTA theme paper. *Science Education 75*, 413-418.

Laborde, C. (2002). Integration of technology in the design of geometry tasks with Cabri-Geometry. *International Journal of Computers for Mathematical Learning, 6*, 283-317.

Lampert, M. (1990). When the problem is not the question and the solution is not the answer: Mathematical knowing and teaching. *American Educational Research Journal, 27*, 29-63.

Larkin, J. H. (1983). The role of problem representations in physics. In D. Gentner & A. L. Stevens (Eds.), *Mental models* (pp. 75-98). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.

Lee, K., Nicoll, G., & Brooks, D. (2004). A comparison of inquiry and worked example web-based instruction using physlets. *Journal of Science Education and Technology, 13*, 81-88.

Leidner, D. E., & Fuller, M. (1997). Improving student learning of conceptual information: GSS supported collaborative learning vs. individual constructive learning. *Decision Support Systems, 20*, 149-163.

Lewis, M. W., Bishay, M., McArthur, D., & Chou, J. (1993). Supporting discovery learning in mathematics: Design and analysis of an exploration environment and inquiry activities. Retrieved 03-03, 2003, from http://www.rand.org/education/mcarthur/Papers/IS.html

Lowrie, T. (2002). The influence of visual and spatial reasoning in interpreting simulated 3D worlds. *International Journal of Computers for Mathematical Learning, 7*, 301-318.

Mayer, R. E. (1985). Implications of cognitive psychology for instruction in mathematical problem solving. In E. A. Silver (Ed.), *Teaching and learning mathematical problem solving : Multiple research perspectives* (pp. 123-138). Hillsdale, New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.

Mayer, R. E. (1996). Learning strategies for making sense out of expository text: The SOI model for guiding three cognitive processes in knowledge construction. *Educational Psychology Review, 8*, 357-371.

Mayer, R. E. (2004). Should there be a three-strikes rule against pure discovery learning? *American Psychologist, 59*, 14-19.

McArthur, D., & Lewis, L. R. (1991, August). *Overview of object-orientated microworlds for learning mathematics through inquiry.* Paper presented at the International Conference on the Learning Sciences, Evanston.

McGatha, M., Cobb, P., & McClain, K. (2002). An analysis of students' initial statistical understandings: Developing a conjectured learning trajectory. *The Journal of Mathematical Behavior, 21*, 339-355.

Merrill, M. D. (1983). Componant display theorie. In C. M. Reigeluth (Ed.), *Instructional design theories and models* (pp. 279-334). Hillsdale, NJ: Erlbaum Associates.

Merrill, M. D. (1994). *Instructional design theory*. Englewood Cliffs, New Jersey: Educational Technology Publications.

Merrill, M. D., & Tennyson, R. D. (1977). *Teaching concepts : An instructional design guide*. Englewood Cliffs, N.J Educational Technology Publications.

Miller, A. I. (1984). *Imagery in scientific thought : Creating 20th-century physics*. Boston: Birkhäuser.

Ministerie Van Onderwijs Cultuur en Wetenschap. (1999). Straks kiest uw kind een profiel. Informatie over de tweede fase voor ouders. Retrieved 16-02, 2006, from http://www.tweedefaseadviespunt.nl

Miri, B., David, B.-C., & Uri, Z. (2007). Purposely teaching for the promotion of higher-order hhinking skills: A case of critical thinking. *Research in Science Education, 37*, 353-369.

Mosher, F. A., & Hornsby, J. R. (1966). On asking questions. In J. S. Bruner, R. R. Olver & P. M. Greenfield (Eds.), *Studies in cognitive growth* (pp. 86-102). New York: Wiley.

Nederlandse Vereniging voor Wiskundeleraren. (2005). Wiskundedidactiek anno 2005, manifest. Retrieved 12-12-2007, from http://www.nvvw.nl.win2k.euronet.nl/manifest2005.html

Nelissen, J. M. C. (1987). *Kinderen leren wiskunde: Een studie over constructie en reflectie in het basisonderwijs.* Universiteit Utrecht.

Nielsen, J. (1994). *Usability engineering* (Updated ed.). London: Academic Press.

Nieuwenbroek, S. (2006). Hersenen jongeren niet klaar voor nieuwe leren. *Bij de Les, 2,* 16-19.

Noddings, N. (1985). Small groups as a setting for research on mathematical problem solving. In E. A. Silver (Ed.), *Teaching and learning mathematical problem solving : Multiple research perspectives* (pp. 345-360). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Novak, J. D. (1998). *Learning, creating and using knowledge: Concept map^{TM} as facilitative tools in schools and corporations*. Mahwah (NJ): Lawrence Erlbaum Associates, Inc.

Palmer, D. (2005). A motivational view of constructivist-informed teaching. *International Journal of Science Education, 27*, 1853-1881.

Pea, R. D. (1987). Cognitive technologies for mathematics education. In A. Schoenfeld (Ed.), *Cognitive science and mathematics education* (pp. 89-122). Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Pedrosa De Jesus, H., Teixeira-Dias, J. J. C., & Watts, M. (2003). Questions of chemistry. *International Journal of Science Education, 25*, 1015-1034.

Perrenet, J. C. (1995). *Leren Probleemoplossen in het wiskunde-onderwijs: Samen of alleen: Onderzoek van wiskunde leren bij 12- tot 16-jarigen.* University of Amsterdam, Deventer.

Petraglia, J. (1998a). The real world on a short leash: The (mis) application of constructivism to the design of educational technology. *Educational Technology Research and Development, 46*, 53-65.

Petraglia, J. (1998b). The real world on a short leash: The (mis) application of constructivism to the design of educational technology. *Educational Technology Research and Development 46*, 53-65.

Pine, J., Aschbacher, P., Roth, E., Jones, M., McPhee, C., Martin, C., Phelps, S., Kyle, T., & Foley, B. (2006). Fifth graders' science inquiry abilities: A comparative study of students in hands-on and textbook curricula. *Journal of Research in Science Teaching, 43*, 467-484.

Pintrich, P. R., Marx, R. W., & Boyle, R. A. (1993). Beyond cold conceptual change: The role of motivational beliefs and classroom contextual factors in the process of conceptual change. *Review of Educational Research, 63*, 167-199.

Polya, G. (1971). *Heuristiek en wiskunde. Een andere kijk op de werkwijze van de wiskunde. Oorspronkelijke titel: How to solve it.* (K. Morcus, Trans.). Den Bosch: Malmberg.

Powell, M., & Ansic, D. (1997). Gender differences in risk behaviour in financial decision-making: An experimental analysis. *Journal of Economic Psychology, 18*, 605-628.
Prawat, R. S. (1989). Teaching for understanding: Three key attributes. *Teaching and Teacher Education, 5*, 315-328.
Rasmussen, C., & Kwon, O. N. (2007). An inquiry-oriented approach to undergraduate mathematics. *The Journal of Mathematical Behavior, 26*, 189-194.
Reed, S. K. (1992). A schema-based theory of transfer. In D. K. Dettermann & R. J. Sternberg (Eds.), *Transfer on trial: Intelligence, cognition and instruction*. Norwood: Ablex.
Reed, S. K., Dempster, A., & Ettinger, M. (1985). Usefulness of analogous solutions for solving algebra word problems. *Journal of Experimental Psychology: Learning, Memory, and Cognition, 11*, 106-125.
Reichard, L. A., Rozemond, S., Dijkhuis, J. H., Admiraal, C. J., te Vaarbeek, G. J., Verbeek, J. A., De Jong, G., Brokamp, N. J. J. M., Houwing, H. J., De Vroome, R., Kuis, J. D., ten Klooster, F., Van Leeuwen, F. G., De Waal, S. K. A., & Van Braak, J. (2002). *Getal en Ruimte, VWO A/B 1*. Houten: EPN.
Reid, D. J., Zhang, J., & Chen, Q. (2003). Supporting scientific discovery learning in a simulation environment. *Journal of Computer Assisted Learning, 19*, 9-20.
Reigeluth, C. M., Merrill, M. D., Wilson, B. G., & Spiller, R. T. (1980). The elaboration theory of instruction: A model for sequencing and synthesizing instruction. *Instructional Science, 9*, 195-219.
Renkl, A. (1999). Learning mathematics from worked-out examples: Analyzing and fostering self-explanations. *European Journal of Psychology of Education, 14*, 477-488.
Renkl, A. (2002). Worked-out examples: Instructional explanations support learning by self-explanations. *Learning and Instruction, 12*, 529-556.
Resonansgroep wiskunde. (2007). *Standpunt van de Resonansgroep wiskunde ten aanzien van de wiskundevoorstellen have en vwo voor 2007 en later*.
Robertson, I. (2000). Imitative problem solving: Why transfer of learning often fails to occur. *Instructional Science, 28*, 263-289.
Rodrigues, S. (2000). The interpretive zone between software designers and a science educator: Grounding instructional multimedia design in learning theory. *Journal of Research on Computing in Education, 33*, 1-15.
Rogers, D. A., Regehr, G., Gelula, M., Yeh, K. A., Howdieshell, T. R., & Webb, W. (2000). Peer teaching and computer-assisted learning: An effective combination for surgical skill training? *Journal of Surgical Research, 92*, 53-55.
Roschelle, J., & Kaput, J. (1996). SimCalc MathWorlds for the mathematics of change: Composable components for calculus learning. *Communications of the ACM, 39*, 97-99.
Roth, W. M., & Bowen, G. M. (2001). Professionals read graphs: A semiotic analysis. *Journal for Research in Mathematics Education, 32*, 159-194.
Rumelhart, D. E. (1980). Schemata: The building blocks of cognition. In R. J. Spiro, B. C. Bruce & W. F. Brewer (Eds.), *Theoretical issues in reading comprehension: Perspectives from cognitive psychology, linguistics, artificial intelligence, and education* (pp. 38-58). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.
Savelsbergh, E., De Jong, T., & Ferguson-Hessler, M. G. M. (submitted). Novices' knowledge of physics problem categories and their ability to identify proper solution approaches.
Scheiter, K., & Gerjets, P. (2002). *The impact of problem order: Sequencing problems as a strategy for improving one's performance.* Paper presented at the The 24th Annual Meeting of the Cognitive Science Society, George Mason University, Fairfax, Virginia.
Schneider, S., & Lopes, L. (1986). Reflection in preferences under risk: Who and when may suggest why. *Journal of Experimental Psychology: Human Perception and Performance 12*, 535-548.
Schoenfeld, A. H. (1985). *Mathematical problem solving*. New York: Academic Press.

Sfard, A. (2001). There is more to discourse than meets the ears: Looking at thinking as communicating to learn more about mathematical learning. *Educational Studies in Mathematics, 46*, 13-57.
Siegler, R. S. (1977). The twenty questions game as a form of problem solving. *Child Development, 48*, 395-403.
Sins, P. H. M., Savelsbergh, E. R., & Van Joolingen, W. (2005). The difficult process of scientific modelling: An analysis of novices' reasoning during computer-based modelling. *International Journal of Science Education, 27*, 1695-1722.
Slavin, R. E. (1996). Research on cooperative learning and achievement: What we know, what we need to know. *Contemporary Educational Psychology, 21*, 43-69.
Spencer, S. J., Steele, C. M., & Quinn, D. M. (1999). Stereotype threat and women's math performance. *Journal of Experimental Social Psychology, 35*, 4-28.
Stein, A. (2007). *Geef me de ruimte*. Enschede: Universiteit Twente.
Stein, M. K., Grover, B. W., & Henningsen, M. (1996). Building student capacity for mathematical thinking and reasoning: An analysis of mathematical tasks used in reform classrooms. *American Educational Research Journal, 33*, 455-488.
Steinberg, R. N. (2000). Computers in teaching science: To simulate or not to simulate? *American Journal of Physics, 68*, 37 - 41.
Stinerock, R., Stern, B., & Solomon, M. (1991). Sex and money: Gender differences in the use of surrogate consumers for financial decision making. *Journal of Professional Services Marketing 7* 167-182.
Tempelaar, D. (2007). Onderwijzen of bijspijkeren? *Nieuw archief voor wiskunde, 5de serie deel 8*.
Ten Haaft, G. (2006, 14 januari 2006). Ook beta's rekenen matig. Wiskundeonderwijs. *Trouw,* pp. verdieping 1-3,
the Cognition and Technology Group at Vanderbilt. (1997). *The Jasper project: lessons in curriculum, instruction, assessment and professional development*. Mahwah, NJ: Erlbaum.
Timmermans, R. E. (2005). *Addition and subtraction strategies: assessment and instruction.* Radboud Universiteit Nijmegen, Nijmegen.
Tsui, C.-Y., & Treagust, D. F. (2003). Genetics reasoning with multiple external representations. *Research in Science Education, 33*, 111-135.
Tweede fase Adviespunt - ministerie Van Onderwijs Cultuur en Wetenschap. (2005). Zeven jaar Tweede Fase, een balans. Evaluatie Tweede Fase. Retrieved 14 februari, 2006, from http://www.tweedefase-loket.nl/doc/evaluatie/balans.pdf
Twomey Fosnot, C., Dolk, M., Zolkower, B., & Seignoret, H. Mathematics in the city: Measuring teacher change in facilitating mathematizing [Electronic Version], from http://www.mic3217.addr.com/intro/TeacherChange.pdf
Vahey, P., Enyedy, N., & Gifford, B. (2000). Learning probability through the use of a collaborative, inquiry-based simulation environment. *Journal of Interactive Learning Research, 11*, 51-84.
Van den Boer, C. J. E. M. (2003). *Als je begrijpt wat ik bedoel: Een zoektocht naar verklaringen voor achterblijvende prestaties van allochtone leerlingen in het wiskundeonderwijs.* Universiteit Utrecht, Utrecht.
Van den Heuvel-Panhuizen, M. (2003). The Didactical Use of Models in Realistic Mathematics Education: An Example from a Longitudinal Trajectory on Percentage. *Educational Studies in Mathematics, 54*, 9-35.
Van der Meij, H. (2007). Designing for user cognition and affect in software instructions. *Learning and Instruction, In Press, Corrected Proof.*
Van der Meij, H., & Carroll, J. M. (1998). Principles and heuristics for designing minimalist instruction. In J. M. Carroll (Ed.), *Minimalism beyond the Nurnberg Funnel* (pp. 19-53). London, England: The MIT Press.

Van der Meij, J., & De Jong, T. (2004). *Learning with multiple representations; Supporting students' translation between representations in a simulation-based learning environment.* Paper presented at the AERA, San Diego.
Van Joolingen, W. R. (1993). *Understanding and facilitating discovery learning in computer-based simulation environments*. PhD Thesis. Eindhoven: Eindhoven University of Technology.
Van Joolingen, W. R., & De Jong, T. (2003). SimQuest: Authoring educational simulations. In T. Murray, S. Blessing & S. Ainsworth (Eds.), *Authoring tools for advanced technology educational software: Toward cost-effective production of adaptive, interactive, and intelligent educational software* (pp. 1-31). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.
Van Merriënboer, J. J. G. (1997). *Training complex cognitive skills: A four-component instructional design model for technical training*. NJ: Englewood Cliffs.
Van Oers, B. (2005). Oriënteren als onderwijsdoel. Unpublished voordracht IJsselgroep. Vrije Universiteit Amsterdam.
Van Parreren, C. F., & Carpay, J. A. M. (1976). *Sovjetpsychologen aan het woord.* (2 ed.). Groningen: Tjeenk-Willink.
Van Patten, J., Chao, C.-I., & Reigeluth, C. M. (1986). A review of strategies for sequencing and synthesizing instruction. *Review of Educational Research, 56*, 437-471.
Van Rens, E. M. M. (2005). *Effectief scheikundeonderwijs voor 'leren onderzoeken' in de tweede fase van het vwo. Een chemie van willen, weten en kunnen.* Vrije Universiteit Amsterdam.
Van Schalkwijk, L. T. J. M. (1998). *Onderzoekend wiskunde leren.* Katholieke Universiteit Nijmegen.
Van Streun, A. (1989). *Heuristisch wiskunde-onderwijs: Verslag van een onderwijsexperiment.* Groningen.
Van Streun, A. (2001). Het denken bevorderen. Groningen: Rijksuniversiteit Groningen, Faculteit der Wiskunde en Natuurwetenschappen, Universitair Centrum voor de Lerarenopleiding.
Veermans, K. H. (2002). *Intelligent support for discovery learning: Using opportunistic learner modeling and heuristics to support simulation based discovery learning.* University of Twente, Enschede.
Verloop, N., & Lowyck, J. (2003). *Onderwijskunde: Een kennisbasis voor professionals.* (2de volledige herschreven ed.). Groningen/Houten: Wolters-Noordhof.
Von Glaserfeld, E. (1987). Learning as a constructive activity. In C. Janvier (Ed.), *Problems in the representation in the teaching and learning of mathematics* (pp. 3-17). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.
Vonk, G., & Doorman, L. M. (2000). Van schrapkaart tot internet. Dertig jaar computers in het onderwijs. In F. Goffree, M. van Hoorn & B. Zwaneveld (Eds.), *Honderd jaar wiskundeonderwijs*. Leusden: Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren.
Wallach, T., & Even, R. (2005). Hearing students: The complexity of understanding what they are saying, showing, and doing. *Journal of Mathematics Teacher Education, 8*, 393-417.
Wang, S.-L., & Lin, S. S. J. (2007). The effects of group composition of self-efficacy and collective efficacy on computer-supported collaborative learning. *Computers in Human Behavior, 23*, 2256-2268.
Watson, J., & Moritz, J. (2001). Development of reasoning associated with pictographs: Representing, interpreting, and predicting. *Educational Studies in Mathematics, 48*, 47-81.
Webb, N. M., & Palinscar, A. S. (1996). Group processes in the classroom. In D. C. Berliner & R. C. Calfee (Eds.), *Handbook of educational psychology* (pp. 841-873). New York: Simon & Schuster Macmillan.
White, B. Y. (1993). ThinkerTools: Causal models, conceptual change, and science education. *Cognition and Instruction, 10*, 1-100.
Willemsen, T. F. W. P. (1994). *Remediële rekenprogramma's voor de basisschool. Een effectstudie.*, Rijksuniversiteit Groningen, Groningen.

Bijlagen

B.1 Bijlage inhoud onderwijs

B.1.1 Zonder meer bekend veronderstelde woorden, begrippen en notaties VWO

De tabel bevat begrippen uit de algebra en analyse, uit de tabel kansrekening en statistiek is alleen het onderwerp simulatie van belang en de tabel met begrippen uit de meetkunde en voortgezette meetkunde is weggelaten, omdat deze begrippen niet voorkomen in het behandelde hoofdstuk.

Analyse en algebra		**A1**	**A1,2**	**B1**	**B1,2**
Δ - notatie (delta-notatie)		X	X	X	X
Asymptoot		X	X	X	X
Domein en bereik				X	X
Formule		X	X	X	X
Functies: De naamgeving van functies, te weten: constante, lineaire, kwadratische,		X	X	X	X
Functienotatie:	g(t) = ...	X	X	X	X
	p = ...	X	X	X	X
	y_{index} = ...	X	X	X	X
Grafiek: De naamgeving te weten: rechte lijn, parabool, hyperbool		X	X	X	X
Intervalnotatie:	[.. , ..] (voor een gesloten interval)			X	X
	<.. , ..> (voor een open interval)			X	X
	[.. , ..> en <.. , ..] (voor aan een kant gesloten intervallen)			X	X
	← en→ (voor -∞ en ∞)			X	X
Model, statisch en dynamisch			X		

Model, discreet en continu	X	X	X	X
Ongelijkheid	X	X	X	X
Optimaliseren, optimum, optimale grootheid	X	X	X	X
Richtingscoëfficiënt		X	X	X
Variabele	X	X	X	X
Verband	X	X	X	X
Vergelijking	X	X	X	X
Statistiek en kansrekening				
Simulatie	X	X	X	X

B.1.2 Algemene begrippen

Bekend veronderstelde woorden, met een nadere toelichting

Naamwoorden	
Minimum, maximum, extreme waarde, uiterste waarde	Dit zijn de functiewaarden en niet de coördinaten van de bedoelde punten van de grafiek.
Model	Dit zijn presentaties waarin vereenvoudigingen van een beschreven situatie zijn aangebracht, bijvoorbeeld een matrixmodel (alleen A), een stelsel vergelijkingen, het vaasmodel, een toetsmodel en een groeimodel.

Werkwoorden	
Bereken	Hierbij moet de berekening altijd opgeschreven worden; het antwoord mag ook een met de (grafische) rekenmachine gevonden antwoord zijn. Bij het gebruik van de grafische rekenmachine moet duidelijk worden aangegeven hoe men tot het antwoord komt. Wanneer een antwoord wordt vereist dat langs algebraïsche weg en niet via

	benaderingen met de (grafische) rekenmachine dient te worden gevonden, wordt dat in de vraagstelling expliciet aangegeven. Dit kan op de volgende manier: "Bereken (eventueel met een toevoeging als 'langs algebraïsche weg' of 'met differentiëren of iets dergelijks) de exacte waarde van …"
Bewijs	Bij wiskunde B wordt behalve "toon aan" ook de opdracht "bewijs" gebruikt. De betekenis is gelijk aan die van "toon aan".
Druk uit	Dit kan gebruikt worden in omschrijvingen als "stel een formule op waarin ... wordt uitgedrukt in ... en ..." of "druk ... uit in ... en ..."
Lees af	Het antwoord is voldoende.
Leg uit	Het werkwoord "beredeneren" wordt niet gebruikt.
Los op	De kandidaat dient alle oplossingen te geven. De context kan beperkingen opleggen aan het aantal oplossingen, bijvoorbeeld omdat er sprake is van een beperkt domein. De werkwijze is vrij, maar moet altijd toegelicht worden.
Onderzoek	De leerling verkent het probleem, bijvoorbeeld met behulp van de grafische rekenmachine, en doet verslag van zijn aanpak en bevindingen. Als ook de juistheid van de bevindingen formeel moet worden aangetoond, zal daar expliciet naar worden gevraagd.
Schat	Dit werkwoord wordt gebruikt in opdrachten als "schat de inhoud van de loods en licht je werkwijze toe" of "geef op basis van de gegevens een zo goed mogelijke schatting van het elektriciteitsgebruik in het jaar 2010 en licht je werkwijze toe".
Teken de grafiek	Bij deze opdracht worden aan de kwaliteit (zoals nauwkeurigheid, saillante punten, speciale vorm) van de tekening eisen gesteld. De opdrachten "plot de grafiek" en "teken de globale grafiek" zullen bij examens niet gebruikt worden. In het geval slechts een globale schets van een grafiek wordt gevraagd, worden omschrijvingen als "geef in een grafiek een mogelijk verloop aan ....", "licht je antwoord toe met een schets" of "maak een schets van de grafiek waaruit blijkt dat …" gebruikt. Indien een (tekstuele) toelichting bij de tekening gewenst is, moet daar expliciet om gevraagd worden.
Toon aan	Gevraagd wordt naar een redenering of berekening waaruit de juistheid van het gestelde blijkt. Als de juistheid van een algemeen geldende regel moet worden aangetoond, zal een formulering worden gebruikt als "toon aan dat voor elke *a* de bewering waar is". Het verifiëren van een algemeen geldende regel door middel van enkele voorbeelden is dan niet voldoende.

B.2 Bijlage indeling boek Getal & Ruimte

B.2.1.1 De indeling van het boek

De inhoud van het boek is als volgt:

- het voorwoord
- de opbouw van het boek
- structuurelementen in een paragraaf
- de hoofdstukken 1 t/m 4
- praktische opdrachten
- voorkennis
- gemengde opgaven
- trefwoordenregister

Een korte omschrijving van enkele onderdelen staat in het gedeelte 'opbouw van het boek' (zie tabel B.2.1).

Tabel B.2.1 *Omschrijving onderdelen van het leerboek*

Praktische opdrachten	Verschillende boeiende onderwerpen nodigen uit tot nader onderzoek
Voorkennis	Kennis van enkele onderwerpen uit de onderbouw moet de leerling paraat hebben. Deze stof kan de leerling herhalen, zowel schriftelijk als digitaal.
Gemengde opgaven	Bij elk hoofdstuk geeft een serie opgaven op niveau een goede voorbereiding op de toets.
Trefwoordenregister	Waar stond dat (nieuwe) begrip ook al weer?

B.2.1.2 De indeling van een hoofdstuk

De indeling van een hoofdstuk is als volgt:

- hoofdstukopening
- paragraaf
- computerparagraaf
- overzicht
- diagnostische toets

Een korte omschrijving van enkele onderdelen staat in het gedeelte 'opbouw van het boek' (zie tabel B.2.2).

Tabel B.2.2 *Omschrijving onderdelen hoofdstuk*

Hoofdstukopening	Een aansprekend probleem leidt het hoofdstuk in. Een globaal overzicht en een mogelijke ICT-route geven zicht op het hoofdstuk.
Overzicht	Een puntsgewijze opsomming geeft een overzicht van de behandelde theorie.
Diagnostische toets	Met de diagnostische toets kan de leerling controleren of hij/zij de basisstof beheerst. De leerling kan de toets ook op de computer maken.

B.2.1.3 De indeling van een paragraaf

Iedere paragraaf is opgebouwd uit oriëntatie, theorie, verwerking en terugblik. De volgende onderdelen kunnen voorkomen:

- Oriënterende opgave
- Gewone opgave
- Differentiatie-opgave
- Afsluitende opgave
- Reflectie-opgave
- Theorie
- Digitale leerlijn
- Terugblik

Een korte omschrijving van enkele onderdelen staat in het gedeelte 'structuurelementen in een paragraaf' (zie tabel B.2.3).

Tabel B.2.3 *Omschrijving onderdelen paragraaf*

Oriënterende opgaven	Theorieblokken worden voorafgegaan door oriënterende opgaven
Differentiatie opgaven	Sommige opgaven zijn speciaal bestemd voor leerlingen met wiskunde B
Afsluitende opgaven	De afsluitende opgaven geven het beoogde beheersingsniveau aan
Reflectie opgaven	In een reflectie-opgave wordt nog eens terug gekeken op een direct voorafgaand probleem
Theorie	In de theorie staan de belangrijkste zaken in kernzinnen geaccentueerd en geven voorbeelden en werkschema's een heldere uitleg. In een voorbeeld is de theorie verwerkt in een opgave met aanpak en uitwerking. Hier ziet de leerling hoe hij de uitwerking moet noteren. Een werkschema is de vorm waarin de standaard aanpak van sommige problemen staat voorgeschreven.
Terugblik	In een terugblik staat een samenvatting van een paragraaf, verduidelijkt met voorbeelden.

B.2.1.4 Motiverende informatie

Er zijn drie soorten kaders waarin leerlingen wat extra informatie wordt gegeven. Hoewel dit niet expliciet wordt genoemd, kunnen we deze kaders scharen onder de noemer motivatie. Het zijn de kaders het beroep, geschiedenis en informatief. In de laatste kaders wordt theorie met extra informatie aangevuld of worden interessante wetenswaardigheden vermeld.

B.3 Bijlage vooronderzoek 1: Het zelf tekenen van grafieken met behulp van de computer

Het is belangrijk dat leerlingen begrijpen hoe een grafiek tot stand komt. De computer mag niet als een ‘black box’ overkomen die zomaar een grafiek tevoorschijn tovert. We vroegen leerlingen daarom eerst zelf een grafiek te tekenen voor deze door de computer geconstrueerd werden. Ook het zelf construeren door de leerlingen werd in de SimQuest-applicatie gedaan. De procedure hiervoor was tamelijk ingewikkeld. De leerlingen kregen daarom een uitleg (zie figuur B.3.1).

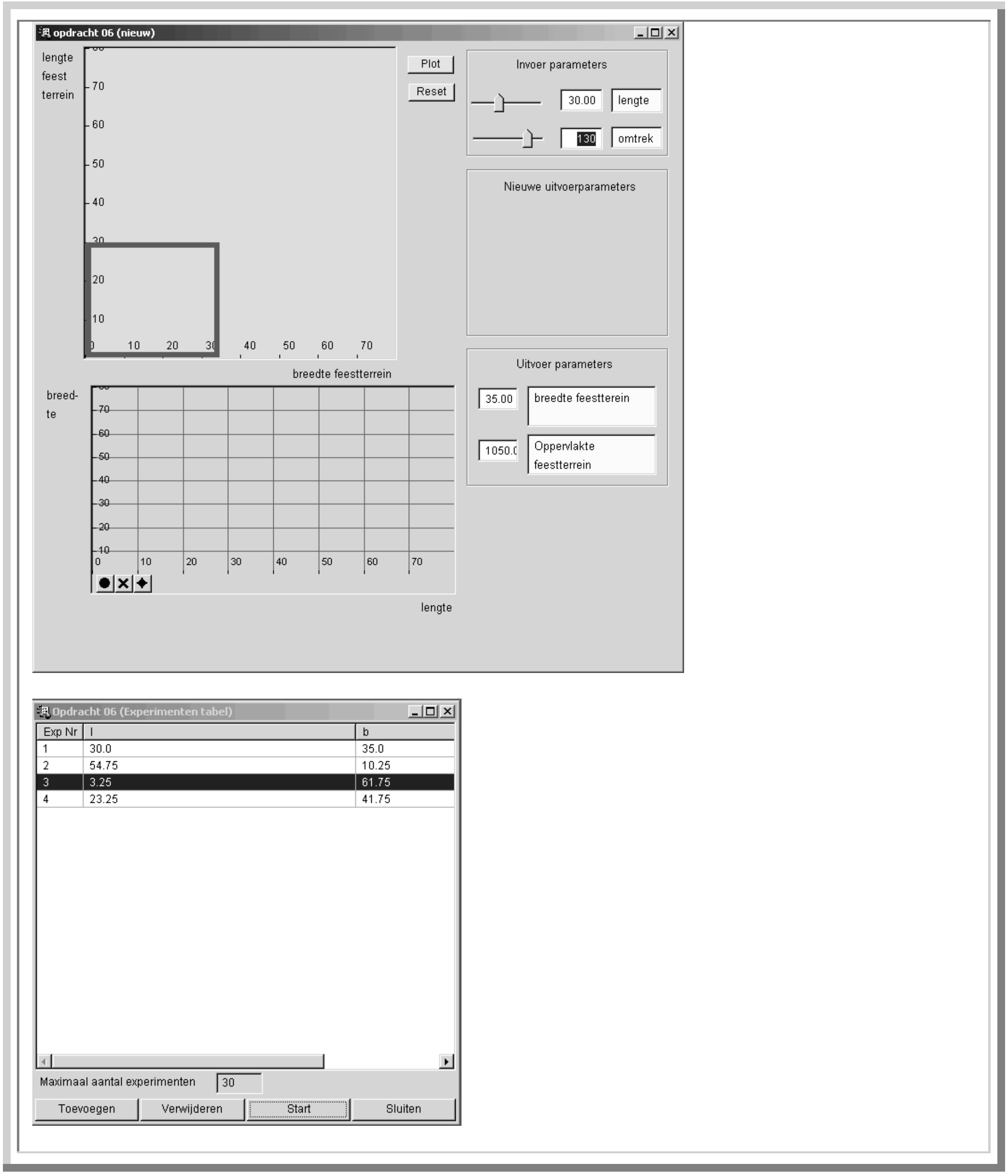
Het maken van een grafiek

Het maken van een grafiek uit de tabel is een wat omslachtige procedure. Allereerst moet de tabel worden gemaakt. Dit gaat als volgt:

- Kies de juiste waarden voor de verschillende invoerparameters (of te wel zet beide schuifbalken op de juiste stand).
- Druk op de knop ‘toevoegen’ in de experimenten tabel
- Begin weer aan het begin

Wanneer de tabel gereed is, kan vervolgens de grafiek getekend worden. Dit gaat als volgt:

- Selecteer in de experimenten tabel het eerste punt van de grafiek (let op; de grafiek wordt tussen het nieuwe en het vorige punt getrokken, volg dus de juiste volgorde bij het selecteren. Of te wel de parameter, die langs de x-as staat, moet dus steeds groter of kleiner worden)
- Druk vervolgens op de knop ‘start’ in de experimenten tabel
- Druk nu op de knop ‘plot’ in de simulatie
- Begin weer aan het begin



Figuur B.3.1 *Uitleg die leerlingen krijgen bij het maken van een tabel en grafiek in SimQuest*

Het maken van een grafiek in SimQuest verschilt met de gewone praktijk zoals leerlingen die kennen. In deze praktijk leren leerlingen om eerst een tabel te maken. Vervolgens aan de hand van deze tabel de verschillende punten in een assenstelsel te tekenen. Tot slot door deze punten een vloeiende lijn te trekken, die zo dicht mogelijk bij de verschillende punten ligt (of bij een wiskundig model door de verschillende punten gaat).

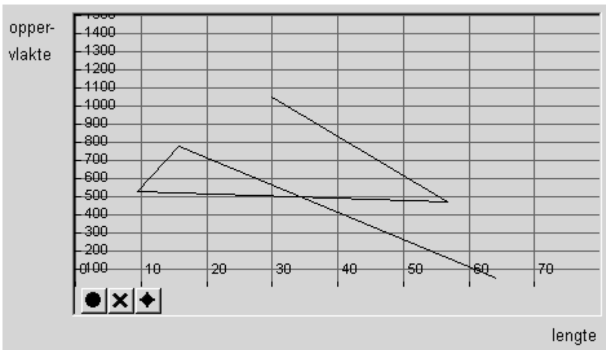
In SimQuest is deze werkwijze niet mogelijk omdat het programma geen mogelijkheid heeft om zelfstandig de lijnen te trekken. Het programma is zo gemaakt dat het, nadat een leerling een tweede punt in het assenstelsel toevoegt, automatisch een lijn van het eerste naar het tweede punt trekt. Vervolgens trekt het programma een lijn van het tweede naar het derde nieuw toegevoegde punt, enzovoort. De leerling kan niet allerlei losse punten in de grafiek tekenen en vervolgens de computer een lijn laten trekken die het verband tussen de punten zo goed mogelijk benadert.

Deze SimQuest manier van het construeren van een grafiek verschilt niet alleen van de bekende aanpak, het is ook geen nette manier. Als je twee punten hebt getekend weet je nog niets over het verloop van de grafiek. Direct een (vloeiende) lijn trekken kan nog helemaal niet. Docenten leren hun leerlingen dat deze manier van construeren niet netjes is en daarom ook niet mag worden toegepast door leerlingen.

Bij het maken van een grafiek in SimQuest moet je eerst weten hoe het verband ongeveer is voordat je punten in het assenstelsel tekent. Maar je tekent juist een grafiek om een idee over het verband tussen twee variabelen te krijgen. Voor ingewikkeldere grafieken (van tweedegraads functies bijvoorbeeld) blijkt deze manier van tekenen van de grafiek met SimQuest fout te gaan, zoals in het voorbeeld in figuur B.3.2 te zien is.

De leerlingen krijgen de volgende opdracht: ‘Maak een tabel waarin de lengte en de oppervlakte staan. Teken met behulp van de tabel een grafiek, waarin de oppervlakte uitstaat tegen de lengte.’.

De leerlingen beginnen met de waarde die de lengte heeft bij het openen van de opdracht. Vervolgens proberen ze waarden uit die groter en kleiner zijn dan deze beginwaarde. Ze houden daarbij dus niet de volgorde van een steeds toenemende lengte aan. Doordat er lijnen tussen het nieuwe en het laatst toegevoegde punt worden getrokken, krijgen ze een dergelijke (niet precies deze) grafiek:



(opdracht 14, groep 2, vooronderzoek 1)

Figuur B.3.2 *Voorbeeld uit eerste vooronderzoek van het maken van een tabel en grafiek in SimQuest*

Van te voren was wel bekend dat de kans bestond dat leerlingen niet de juiste volgorde van de punten aan zouden houden, maar niet hoe groot deze kans was. Wanneer leerlingen een grafiek opbouwen met een oplopende waarde van de variabele langs de x-as treedt het probleem niet op.

Om leerlingen op de noodzaak van het juist kiezen van de volgorde van de getekende punten te wijzen is in de uitleg (zie figuur B.3.1) de aanwijzing ‘let op; de grafiek wordt tussen het nieuwe en het vorige punt getrokken, volg dus de juiste volgorde bij het selecteren. Of te wel de parameter, die langs de x-as staat, moet dus steeds groter of kleiner worden' toegevoegd. Dit bleek niet afdoende te zijn om het optreden van het probleem te voorkomen.

Kortom het zelf maken van grafieken met behulp van SimQuest gaat op een manier waarvan wiskundedocenten hun leerlingen leren dat deze niet netjes is. Bovendien moet men voor het kunnen tekenen van de grafiek eigenlijk al de uitkomst weten. Om deze redenen wordt in de volgende onderzoeken de eigen grafiek door leerlingen niet langer in SimQuest gemaakt.

B.4 Bijlage nadere uitwerking factoren

In het tweede vooronderzoek onderzoeken we enkele algemene aspecten van het werken met simulaties, zoals de mate waarin de leerlingen actief en succesvol met SimQuest omgingen. Dit doen we aan de hand van de verschillende fasen bij het maken van opdrachten. In de bespreking van de resultaten per activiteit kijken we naar beide zaken en besteden we aandacht aan één of meer van de volgende factoren: (1) voorkennis, (2) simulatievaardigheden, (3) onderzoeksvaardigheden, (4) vaardigheden in monitoren en (5) regels, normen en waarden. In deze bijlage geven we een gedetailleerdere beschrijving van deze factoren. We zullen eerst de verschillende fasen in de taakuitvoering beschrijven en vervolgens op de factoren ingaan.

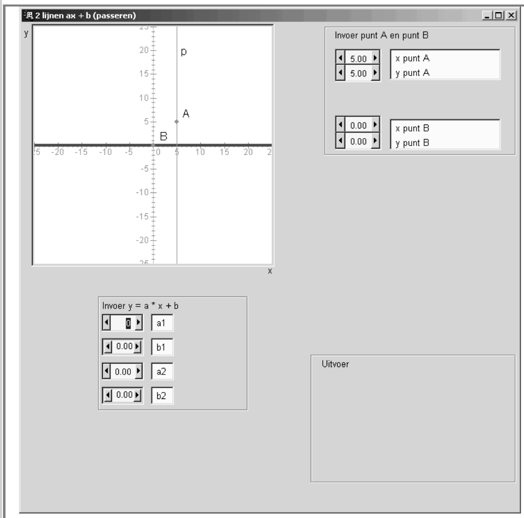
B.4.1.1 Fasen in handelingen van leerlingen

Er zijn verschillende fasen die doorlopen moeten worden bij het uitvoeren van een opdracht in SimQuest. Leerlingen moeten de opdracht lezen en begrijpen, zich oriënteren op de context en het interactieve gedeelte, bedenken hoe ze de opdracht aan gaan pakken, hun aanpak uitvoeren, nadenken over de resultaten van hun uitgevoerde plan, bedenken of en zo ja hoe hun aanpak herhaald en/of uitgebreid dient te worden en wanneer ze de opdracht beantwoord hebben nadenken over de plaats van de opgedane kennis binnen het geheel. Het uitwerken van een opdracht is een iteratief proces waarbij een leerling tussen de verschillende fasen uit deze opsomming heen en weer springt. Het uiteindelijk definitief afronden van de verschillende fasen moet wel in de volgorde van deze opsomming gedaan worden.

We zullen deze fasen hieronder stuk voor stuk kort toelichten. Daarbij beschrijven we aan de hand van de opdracht uit figuur B.4.1 voor elke fase wat een leerling na de definitieve afronding moet hebben bereikt.

Gegeven:
Het punt A heeft de coördinaten (5,5) en het punt B heeft de coördinaten (0,0). Door het punt A is de lijn p: x=5 getekend.

Twee andere lijnen gaan door het punt B. Voor deze lijnen gelden de volgende eisen:
1. Lijn 1 (die geel wordt) snijdt de lijn p boven het punt A.
2. Lijn 2 (die rood wordt) snijdt de lijn p onder het punt A.
3. Beide lijnen gaan door B.



Opdracht:
Verander de a en b van beide lijnen, zodat aan deze twee eisen is voldaan.

Klopt de volgende uitspraak?
rc_lijn 1 > rc_lijn 2

Figuur B.4.1 *Voorbeeldopdracht voor bespreking gewenste handelingen leerlingen*

Lezen en begrijpen van de opdracht

Het kan zijn dat in de opdracht begrippen voorkomen waarvan de leerling de betekenis niet kent of vergeten is. In dat geval moet de leerling de betekenis van de begrippen achterhalen. Een goede graadmeter voor de mate waarin een leerling weet en begrijpt wat de opdracht inhoudt, is of een leerling in staat is om de opdracht te formuleren in zijn eigen woorden.

Uitkomst na definitieve afronding van deze fase

De leerling weet de betekenis van de begrippen snijden, richtingscoëfficiënt en a, b, lijn p: x=5, rc_lijn en > (presenteren en communiceren).
De leerling begrijpt dat hij parameters moet veranderen zodat aan drie genoemde eisen wordt voldaan en dat hij vervolgens iets over de uitspraak moet concluderen. De leerling kan als hem dat wordt gevraagd deze kern van de opdracht in eigen woorden omschrijven (abstraheren).

Oriëntatie

Oriëntatie kan op twee verschillende vlakken plaats vinden. Een oriëntatie met betrekking tot de inhoud van de opdracht en een oriëntatie met betrekking tot het interactieve gedeelte.

Om zich op de inhoud te oriënteren kan de leerling verschillende handelingen uitvoeren. Een leerling moet overzicht krijgen van wat er bekend is en wat nog achterhaald en uitgezocht moet worden. De leerling moet zijn voorkennis met betrekking tot het onderwerp activeren. De leerling moet bedenken of eventuele voorgaande opdrachten een bijdrage aan de oplossing van de opdracht kunnen leveren.

Om zich op het interactieve gedeelte te oriënteren, kan de leerling bekijken en uitproberen wat er in het interactieve gedeelte allemaal te zien en af te lezen is. De leerling moet de functie en mogelijkheden van de verschillende onderdelen leren kennen. Gewoon eens wat variabelen veranderen en kijken wat er in de verschillende representaties gebeurt, zijn daarvoor geschikte handelingen.

Uitkomst na definitieve afronding van deze fase

Oriëntatie op inhoud:
De leerlingen weet dat de elementen van de opdracht twee punten (A en B) en drie lijnen (lijn p, 1 en 2) zijn (abstraheren).
De leerling weet dat de positie van de punten A en B vast ligt.
De leerling weet dat de lijn p vast ligt.
De leerling weet dat de lijnen 1 en 2 niet vast liggen, maar dat er wel eisen aan zijn aan de ligging.
De leerling weet dat het de grootste uitdaging in de opdracht is om de lijnen 1 en 2 te plaatsen (abstraheren).
De leerling beseft dat deze opdracht een opdracht is over de concepten richtingscoëfficiënt, snijpunt met de y-as en formule van een lijn (abstraheren en structureren). De leerling weet dat hij kennis uit voorgaande opdrachten hierover (bv. de opdrachten over de invloed van a en b) kan gebruiken.
De leerling begrijpt dat hij iets moet concluderen over de richtingscoëfficiënten van alle mogelijke oplossingen van de ligging van lijn 1 en lijn 2.

Oriëntatie op het interactieve gedeelte:
De leerling weet de punten en lijnen in de animatiegrafiek aan te duiden.
De leerling weet hoe de positie van de verschillende elementen in de animatiegrafiek veranderd kan worden.
De leerling weet dat de richtingscoëfficiënt van lijn 1 (rc_lijn 1) gelijk is aan a1 en de richtingscoëfficiënt van lijn 2 (rc_lijn 2) gelijk is aan a2 (abstraheren).

Plan van aanpak

Wanneer een leerling overzicht heeft wat er nog onbekend is en uitgezocht moet worden, moet hij bedenken hoe hij dat uitzoeken aan gaat pakken. Hij moet nagaan of en hoe hij het interactieve gedeelte hiervoor kan gebruiken. Naast nadenken over wat de leerling wil gaan doen moet hij ook nadenken over wat hij daarmee denkt te bereiken. Hij moet nadenken over wat hij in het interactieve gedeelte af moet lezen en wanneer hij voldoende informatie heeft om uitspraken te kunnen doen.

Uitkomst na definitieve afronding van deze fase (probleem oplossen)

De leerling weet dat hij helemaal aan het begin moet zorgen dat de punten A en B en de lijn p goed liggen. De leerling weet dat hij daarna deze elementen met rust moet laten.
De leerling weet dat het goed is om eerst naar één specifieke oplossing te kijken.
De leerling weet dat hij eerst één lijn moet kiezen om mee aan de slag te gaan en daarna pas met de andere lijn.
De leerling beseft dat hij eerst moet zorgen dat deze lijn door het punt B gaat, eis 3. De leerling weet dat dit (in dit specifieke geval) kan door b1 (of b2) juist te kiezen.
De leerling weet dat om aan eis 1 (of eis 2) te voldoen hij a1 juist moet kiezen. De leerling weet dat er meerdere mogelijkheden zijn, maar dat hij eerst één situatie bekijkt.
De leerling herhaalt de procedure van het kiezen van a en b voor de andere lijn voor één specifieke situatie.
De leerling weet dat hij door het uitvoeren van voorgaande stappen voldoende informatie vergaart om hierna een conclusie te trekken over de geldigheid van de uitspraak voor dit specifieke geval (evalueren en interpreteren).

De leerling weet dat in het geval de uitspraak blijkt te kloppen voor dit ene geval hij na moet gaan of dat ook geldt voor ieder willekeurig geval.
De leerling weet dat hij niet alle mogelijkheden na kan gaan en dus zal moeten beredeneren of de opdracht klopt (beredeneren/bewijzen/aantonen).

Uitvoering plan van aanpak

Wanneer de leerling een plan van aanpak heeft, is de volgende stap om dit plan uit te voeren. Handelingen zijn daarbij het uitvoeren van een aantal experimenten, het aflezen van de resultaten daarvan en het beschrijven van die resultaten.

Uitkomst na definitieve afronding van deze fase

De leerling heeft een schets van in ieder geval één situatie, die omschreven staat in de bijbehorende notities (presenteren en communiceren). De situatie uit de schets voldoet aan alle drie de eisen.

Verwerken van de resultaten

Nu de resultaten verkregen zijn, moet de leerling met behulp van de resultaten conclusies trekken over zijn ideeën. Daarvoor moet de leerling de verkregen resultaten interpreteren en vanuit die interpretatie iets concluderen. Vervolgens moet de leerling de gevonden conclusies beredeneren of afleiden. Het kan zijn dat de resultaten ideeën van de leerlingen tegenspreken of laten zien waar het in de uitvoering nog niet goed gaat. In dat geval moet de leerling eerdere stappen herhalen.

Uitkomst na definitieve afronding van deze fase

Over de situatie waar de leerling een schets van heeft, heeft de leerling de conclusie getrokken dat de uitspraak klopt (evalueren en interpreteren).
De leerling weet dat alle mogelijkheden voor lijn 1 in een bepaald vlak van de grafiek vallen (evalueren en interpreteren).
De leerling weet dat alle mogelijkheden voor lijn 2 in een bepaald vlak van de grafiek vallen (evalueren en interpreteren).
De leerling weet dat voor alle lijnen 1 voor de richtingscoëfficiënt geldt richtingscoëfficiënt > 1 (bedeneren/bewijzen/aantonen).
De leerling weet dat voor alle lijnen 2 voor de richtingscoëfficiënt geldt richtingscoëfficiënt < 1 (bedeneren/bewijzen/aantonen).
De leerling weet dat de uitspraak geldig is voor alle mogelijke situaties (bedeneren/bewijzen/aantonen).
De leerling heeft een redenatie genoteerd waaruit blijkt dat deze uitspraak geldig is voor alle mogelijkheden (presenteren en communiceren).

Plaatsen van de resultaten

Wanneer de leerling de opdracht heeft uitgevoerd en tot een oplossing is gekomen, moet de leerling bedenken wat de plaats van de nieuw verworven inzichten is binnen het geheel van wat hij al weet.

Uitkomst na definitieve afronding van deze fase (structureren)

De leerling weet dat door eisen aan de waarde van de richtingscoëfficiënt te stellen, bepaalde lijnen wel en niet mogelijk zijn.
De leerling weet dat hij een plan van aanpak heeft, die hij wellicht in volgende opdrachten kan gebruiken.

De leerling ziet in dat er veel meer mogelijkheden zijn door bijvoorbeeld A en B op een andere plek te leggen.

Relatie tussen activiteiten en handelingen bij het probleem oplossen tijdens het werken met SimQuest

De activiteiten uit tabel 2.3 komen op verschillende plaatsen in de beschrijving van de gewenste handelingen terug. Zo is een onderdeel van het structureren het bedenken of eventuele voorgaande opdrachten een bijdrage aan de oplossing van de opdracht kunnen leveren (oriëntatie). Een ander onderdeel is het bedenken wat de plaats van de nieuw verworven inzichten is binnen het geheel van wat hij al weet (plaatsen van de resultaten). Kortom de handelingen en activiteiten zijn met elkaar verweven. In de volgende paragraaf gaan we verder op deze verwevenheid in en beschrijven we nader de focus van dit vooronderzoek.

B.4.1.2 Overige factoren

Nu we de verschillende fasen hebben beschreven, geven we een beschrijving van de overige factoren die het leren met behulp van SimQuest kan beïnvloeden. Bij het werken met SimQuest spelen allerlei aspecten die op verschillende gebieden liggen: de kernactiviteiten, de stof zelf, het werken met het programma en / of het onderzoekend leren. In de praktijk zijn de verschillende aspecten niet zo eenvoudig te scheiden als in deze opsomming is gebeurd. We hebben in dit vooronderzoek een indeling in categorieën factoren gemaakt, die enigszins van elkaar te scheiden zijn in de praktijk: (1) de rol van voorkennis, (2) de rol van simulatievaardigheden, (3) de rol van onderzoeksvaardigheden, (4) de rol van het monitoren en (5) de rol van ideeën, normen en waarden.

De eerste categorie gaat over zaken die voor aanvang van de instructie gebeurd zouden moeten zijn. De laatste categorie gaat over zaken die voor aanvang gebeurd zijn, al of niet gewenst. De tweede categorie richt zich op problemen met het werken met het programma, dat op basis van onderzoekend leren is ontworpen. Het gaat om de omgang met het programma en het onderzoekend leren, los van de vakinhoud. In de derde en vierde categorie draait het juist om vaardigheden los van het programma. In de volgende paragraaf werken we deze categorieën verder uit.

Verdere uitwerking

In het kader (figuur B.4.2) staan de verschillende categorieën nader uitgewerkt. In deze uitwerking zijn de factoren opgesplitst en zijn omschrijvingen gegeven van eventuele nadelige consequenties van deze factoren op het leren.

1. ***De rol van voorkennis***:

a) Afwezigheid/onjuiste aanwezigheid van wiskundige kennis: *abstraheren (oriënteren)*
- De leerlingen kunnen niet verder doordat kennis, die in de simulatie bekend verondersteld wordt, (gedeeltelijk) niet of onjuist aanwezig is.
- De leerlingen raken in de war doordat kennis, die in de simulatie bekend verondersteld wordt, (gedeeltelijk) niet of onjuist aanwezig is.

b) Oningebedde aanwezigheid van wiskundige kennis: *abstraheren, structureren en interpreteren*
- De voorkennis is als regel wel juist aanwezig, maar kan niet worden toegepast in praktijksituatie of wordt niet aan gedacht bij het verklaren van wat er gebeurt.

c) Afwezigheid van wiskundige terminologie: *presenteren/communiceren*
- De leerlingen hebben moeite met het wiskundig juist formuleren van hun antwoord.
- De leerlingen gebruiken regels om iets uit te rekenen, maar zijn zich daar niet van

bewust en schrikken wanneer om een formule wordt gevraagd.

2. ***De rol van simulatievaardigheden***:
Hierbij gaat het om het niet weten hoe informatie met behulp van de simulatie verkregen kan worden, als je wel weet welke informatie je nodig hebt.

a) Onvoldoende beeld op hoe de benodigde informatie uit de simulatie verkregen kan worden:
- De leerlingen kiezen geen handige waarden. *abstraheren (oriënteren) en probleem oplossen*
- De leerlingen veranderen meerdere variabelen tegelijkertijd. *abstraheren (oriënteren) en probleem oplossen*
- De leerlingen bekijken te weinig situaties om iets te kunnen concluderen. *evalueren*
- De situaties die de leerlingen bekijken zijn niet extreem genoeg. *evalueren*
- De situaties die de leerlingen bekijken verschillen onderling nauwelijks. *evalueren*

b) Onvoldoende begrip van de omgeving:
- De leerlingen weten niet hoe de verschillende representaties met elkaar verband houden.
  - Ze begrijpen niet hoe de getallen in het uitvoerveld in verband staan met wat er in de animatie gebeurt. *interpreteren*
  - Ze begrijpen niet dat of hoe het getal dat ze voor de plaats van een punt bij de invoervariabelen opgeven, samenhangt met het assenstelsel van de animatie. *abstraheren (oriënteren)*

c) Onvoldoende beslisvaardigheden: De leerlingen trekken geen juiste conclusies uit wat ze in de simulaties zien gebeuren.
  - De uitkomsten van de voorgaande experimenten geven aanleiding tot het verhogen/verlagen van een bepaalde waarde, maar de leerling doet juist het tegenovergestelde. *evalueren en interpreteren*

d) Zorgvuldigheid:
- Iets anders zeggen dan opschrijven
- Vergeten van experimentuitkomsten / gelezen informatie in opdracht
- Onzorgvuldig lezen van opdracht *abstraheren (oriënteren)*
- Rekenfout
- De leerlingen controleren niet of hun antwoord juist is. *evalueren*
- Niet genoeg inzoomen om te kunnen antwoorden *evalueren*

3. ***De rol van onderzoeksvaardigheden***:
Deze categorie richt zich specifiek op de inhoudelijke aanpak van opdrachten.

a) De leerlingen oriënteren zich niet goed op het probleem. *abstraheren (oriënteren)*
  - De leerlingen proberen geen enkele situatie uit tijdens de oriënterende opdrachten.
  - De leerlingen benoemen niet welke informatie zij nodig hebben om het probleem op te lossen.

b) Het opdelen en combineren in/van deelproblemen: *probleem oplossen*
- De leerlingen delen het grote probleem niet op in kleinere deelproblemen.
  - De leerlingen proberen in één keer zonder dat ze van te voren de oplossing denken te weten, aan alle eisen in de opdracht te voldoen. Ze zorgen bv. niet dat eerst de afstand klopt en daarna de tijd. Of dat ze eerst uitvinden wat variëren van 'a' voor gevolgen heeft en dan 'b'.
- De leerlingen combineren de oplossingen van deelproblemen niet tot een oplossing voor het centrale vraagstuk of vervolg deelprobleem. De leerlingen zien een parallel vraagstuk als een compleet nieuw probleem. Ze gebruiken resultaten uit vorige opdrachten niet bij het oplossen van een nieuwe opdracht. Ze beseffen bv. niet dat H op de rechthoek moet liggen voor een zo kort mogelijke reistijd. Ze gaan opnieuw

opzoek naar waarheden die ze net al gevonden hebben. Bv. wanneer ze bij 1 hebben ontdekt dat ze gewoon kunnen berekenen en ze bij 5 lengtes dit weer opnieuw uit moeten gaan vinden.

- De leerlingen bedenken geen experimenten waarmee ze de benodigde informatie met behulp van de simulatie kunnen verkrijgen. (het gaat hierbij echt om de vertaalslag van een stap in het oplossingsproces naar een actie in de simulatie, dit in tegenstelling tot 4a waar het meer over globale manier van aanpak gaat)
  - De leerlingen willen de waarde van een bepaalde variabele weten, maar gebruiken de simulatie niet om hierachter te komen.
  - De leerling doet uitspraken als: “hoe kun je dat uitproberen?”.

c) Gebrek aan reflectie: De leerlingen reflecteren niet over het waarom wanneer hun verwachting of aanpak niet juist is gebleken of waarom het antwoord dat goed is ook echt goed moet zijn. De leerling goochelt bv. met getallen. Het gaat in dit geval dus echt over reflectie over de inhoud van de gevonden oplossing en niet over reflectie over de manier van komen tot het vinden van een oplossing. _beredeneren/aantonen/bewijzen_

4. ***De rol van monitoren***:

Het gaat bij deze categorie om algemene vakoverstijgende elementen.

a) De leerlingen hebben moeite met het bedenken van een plan van aanpak (het gaat hierbij niet om wiskundige inhoud maar meer algemeen). _abstraheren (oriënteren) en probleem oplossen_
  - Ze geven aan niet te weten hoe ze verder kunnen gaan.
  - De leerlingen geven aan dat de trial-and-error strategie hen niet erg ver brengt, maar gaan hiermee door bij gebrek aan een alternatief.
  - De leerlingen hebben geen duidelijk overzicht over wat ze al gedaan hebben en wat er nog moet gebeuren. De leerlingen missen bv. informatie in de opsomming van de informatie, die zij al weten. Of de leerlingen vergeten dat er meer eisen in de opdracht stonden. De leerlingen bedenken niet of ze alle mogelijkheden bekeken hebben.

b) Vasthouden aan gekozen strategie: De leerlingen hebben moeite om hun systematische manier van werken vol te houden. _probleem oplossen_
  - Wanneer het de leerling te lang duurt voor het antwoord bereikt is (maar wel steeds dichter bij) wijzigt hij/zij de gebruikte strategie.
  - De leerling past een eerder gebruikte strategie niet volledig (en daardoor leidend tot onjuiste resultaten) toe.
  - De leerling berekent een deel antwoord, maar gaat deze waarde later toch weer aanpassen.

c) Een stap terug doen en van afstand reflecteren op aanpak. Deze categorie is achteraf of tijdens het oplossen en niet vooraf zoals bij punt 4a. _evalueren, interpreteren en probleem oplossen_
  - De leerlingen gaan te lang door met simuleren, zonder een moment van reflectie in te bouwen.
  - De leerlingen zijn nog zo vol van hun vorige ontdekking dat deze interfereert met de huidige opdracht.

5. ***De rol van regels, normen en waarden***:

a) Het moment van een opdracht of het presenteren van nieuwe informatie is belangrijk: _structureren_
  - Een vervolgopdracht moet feilloos aansluiten op de voorgaande opdracht of te wel deze verder uitbouwen.
  - Nieuwe informatie moet je gebruiken bij het beantwoorden van de opdracht.

b) Opdrachten zijn gelikt: _probleem oplossen_
  - Er kan maar één onbekende zijn.

- De functie moet behoren tot een bekende reeds behandelde categorie functies.
- Het antwoord moet een mooi getal zijn en niet te extreme waarden hebben.

c) Getrokken conclusies zijn pas waar als docent/programma bevestigt: Zonder bevestiging van docent en/of programma niet durven/mogen concluderen ook al bevestigt de data jouw vermoeden. *evalueren*

Figuur B.4.2 *Indeling van problemen van leerlingen tijdens het werken met het materiaal*

De relatie tussen de factoren en de kernactiviteiten

In de indeling in de bovenstaande categorieën staan niet expliciet de activiteiten uit tabel 2.3 (deel 1, hoofdstuk 2) genoemd. Wat is de relatie tussen de factoren en de kernactiviteiten? Hoe en waar vinden we deze activiteiten terug? We zullen deze vraag slechts vluchtig beantwoorden.

Abstraheren

Aspecten van abstraheren komen bijvoorbeeld terecht in de categorieën:
- categorie 1b; de aanwezige kennis kan niet worden toegepast in de praktijksituatie,
- categorieën 2a en 2b; een onvoldoende beeld van de omgeving en hoe de benodigde informatie met behulp van de omgeving kan worden verkregen,
- categorie 5; ideeën door gevolgd onderwijs kunnen het abstractieproces onjuist sturen, zoals het tweede punt van categorie 5b: ‘De functie moet behoren tot een bekende reeds behandelde categorie functies’.

Structureren

De verschillende verzamelingen, waartussen leerlingen overeenkomsten en verschillen moeten vinden (opdrachten onderling, opdrachten en voorkennis), komen in verschillende categorieën terug. Overeenkomsten en verschillen tussen opdrachten onderling vinden en gebruiken, valt onder categorie 3b; het opdelen en combineren in/van deelproblemen. Overeenkomsten en verschillen tussen opdrachten en de voorkennis van leerlingen vinden en gebruiken valt grotendeels in categorie 1b; oningebedde aanwezigheid van wiskundige voorkennis. Daarnaast komt het voor dat verwachtingen van leerlingen de voorkennis een oneigenlijke rol laten spelen. Dit valt onder categorieën 5a en 5b.

Evalueren

Evalueren speelt bij het simuleren met SimQuest een grote rol; leerlingen moeten op basis van resultaten oordelen vellen over ideeën. In categorie 2, de rol van simulatievaardigheden, vinden we dan ook op meerdere plekken aspecten die met evaluatie te maken hebben terug:
- categorie 2a leerlingen bekijken niet genoeg, niet extreem genoeg of nauwelijks onderling verschillende situaties zodat ze eigenlijk niet kunnen evalueren,
- categorie 2c; de leerlingen trekken onjuiste conclusies
- categorie 2d; de leerlingen controleren hun antwoord niet of zoomen niet genoeg in om te kunnen antwoorden.

Een gebrekkige evaluatie kan ook resulteren in gebrekkig monitoren. Nieuwe ontdekkingen uit een voorgaande opdracht interfereren dan met de huidige opdracht (categorie 4c). Ook het voorgaande gevolgde onderwijs kan een goede evaluatie belemmeren. Dit valt onder categorie 5c; de evaluatie van de docent of het programma verwachten.

Interpreteren

Leerlingen moeten de resultaten die zij krijgen interpreteren en gevolgtrekkingen maken op basis van de resultaten. Leerlingen moeten bedenken hoe ze hun zoektocht vervolgen op basis van de uitkomsten van de voorgaande experimenten. Dit valt in categorie 2c. De leerlingen moeten bedenken hoe de resultaten van de verschillende representaties met elkaar in verband te brengen zijn. Dit valt in categorie 2b. Geen trial-and-error (categorie 4a en 4c), maar de resultaten interpreteren zodat ze je verder helpen. Interpretatie van de resultaten bij een voorgaande situatie kan te veel zeggenschap op andere situaties geven krijgen en daardoor een juiste interpretatie van de volgende resultaten blokkeren. Dit valt onder categorie 4c.

Bewijzen/aantonen/beredeneren

Beredeneren valt vooral in categorie 3c. Niet stoppen als er een conclusie is getrokken of een verband is gevonden, maar nadenken over het hoe en waarom. Nadenken over de reikwijdte van dit verband of deze conclusie.

Communiceren en presenteren

Communiceren speelt vooral een rol bij het begrijpen en het beantwoorden van opdrachten. Voor het begrijpen van opdrachten is het nodig dat leerlingen beschikken over de terminologie die bekend verondersteld wordt. Dit valt onder categorie 1b. Het kunnen beantwoorden van de opdrachten op een wiskundig nette manier, valt in categorie 1c.

B.4.2 Resultaten

B.4.2.1 De categorieën

In paragraaf B.4.1.2 introduceerden we categorieën waarin we handelingen en uitspraken van leerlingen konden plaatsen. Tijdens de observaties heeft de onderzoekster aantekeningen gemaakt over de handelingen en uitspraken van leerlingen. Op basis van deze aantekeningen is een tweetal overzichten ingevuld. In deze paragraaf tonen we deze overzichten. In de volgende paragrafen illustreren we deze resultaten met voorbeelden. Bovendien gaan we verder in op deze resultaten en zullen ons daarbij toe spitsen op de activiteiten.

Negatief

Aan de hand van wat leerlingen zeiden, deden in het programma, de berekeningen die ze op papier maakten en de antwoorden die ze gaven, heeft de observator aantekeningen gemaakt. Deze aantekeningen hebben we gebruikt om te vinken in hoeverre de problemen uit het kader van figuur B.4.1 voorkwamen. Het resultaat hiervan staat in tabel B.4.1. Het gaat hierbij om minimaal een keer voorkomen; er is geen onderscheid gemaakt tussen vrijwel altijd of slechts sporadisch. In de rijen staan de verschillende categorieën en in de kolommen de verschillende leerlingen. Bij de leerlingen is aangegeven of het om een zwakke, gemiddelde of sterke wiskunde leerling gaat.

Tabel B.4.1 *Scores van de leerlingen wat betreft problemen in de verschillende categorieën (vooronderzoek 2)*

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
		a		a			a				a	a						a		
	s	z	g	g	z	s	z	g	g	s	z	z	g	g	g	s	s	z	g	s
1a	v		v	v				v		v		v		v	v			v		v
1b		v				v	v						v	v		v		v	v	
1c				v			v			v			v							v
2a	v	v	v		v	v	v	v			v	v	v					v	v	v
2b		v					v	v		v		v						v		
2c						v	v	v				v								
2d	v	v	v	v		v		v	v	v	v	v	v	v	v	v	v	v	v	v
3a		v										v			v			v		v
3b		v		v		v						v	v		v				v	v
3c	v	v	v		v	v	v	v	v	v	v	v	v		v	v	v	v	v	v
4a	v	v			v	v	v	v	v	v	v	v	v	v	v	v	v	v	v	
4b			v	v	v		v				v	v		v				v	v	
4c			v		v		v					v						v	v	v
5a						v	v													
5b		v	v							v				v		v				
5c		v																v		

Hoewel we in de volgende paragrafen verder op deze resultaten ingaan, willen we hier kort een aantal zaken aanstippen. De categorieën die het meest aangevinkt zijn, zijn de categorieën 2d (zorgvuldigheid), 3c (reflecteren op verkregen uitkomsten) en 4a (het maken van een plan van aanpak).

Hoewel het ontbreken van een (volledig) plan van aanpak bij vrijwel alle leerlingen wel een keer voorkomt (categorie 4a), is het opvallend dat het niet vasthouden aan een strategie (categorie 4b) voornamelijk bij zwakke leerlingen optreedt. De zwakke leerlingen gaan vaak te lang door met proberen, zonder een moment van pauze en reflectie in te bouwen. Vaak zijn ze, wanneer ze vastlopen, al geholpen door de vraag 'wat probeerde je' te beantwoorden. Het opnoemen van de doelen en wat je al weet is voor deze leerlingen erg handig.

Ook categorie 2a (kennis over inzetten van interactief gedeelte) is redelijk vaak aangevinkt bij zowel zwakke als sterke leerlingen. De zwakke leerlingen scoren deze categorie vooral omdat ze geen handige situaties kiezen en/of meerdere variabelen tegelijkertijd variëren. De sterke leerlingen scoren deze categorie vooral omdat ze te weinig of niet voldoende extreme situaties bekijken. Hoewel er dus op een aantal punten om verschillende redenen categorieën worden gescoord door de verschillende groepen leerlingen, geldt over het algemeen dat wanneer de opdrachten wat moeilijker worden, de sterke leerlingen dezelfde soort problemen hebben als de zwakke leerlingen.

Tot slot lijken vooral zwakke leerlingen zich vaak onvoldoende te oriënteren (categorie 3a). Daardoor weten ze niet precies hoe het interactieve gedeelte geïnterpreteerd dient te worden (categorie 2b).

Positief

We hebben niet alleen gekeken naar wat er niet of minder goed ging, maar ook naar wat opvallend goed ging. Om te bepalen in hoeverre leerlingen blijk geven zich van de mogelijke problemen bewust te zijn en ze daar actie tegen ondernemen, onderzochten we hoe vaak zij hier tijdens het hardop denken melding van maakten. Ook dit is in een overzicht gezet (zie tabel B.4.2), waarbij een categorie wordt aangevinkt wanneer uit uitspraken van leerlingen blijkt dat ze hier op letten. Het gaat er dus om dat leerlingen een overweging expliciet noemen. Alleen afwezigheid van problemen, bijvoorbeeld een leerling die telkens maar één variabele tegelijkertijd verandert (categorie 2a) zonder daar expliciet iets over te zeggen, is geen reden voor aanvinken. Hierdoor zullen een paar categorieën, zoals categorie 5, zelden aangevinkt worden.

Tabel B.4.2 *Scores van de leerlingen wat betreft positief opvallende zaken in de verschillende categorieën (vooronderzoek 2)*

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
		a		a			a				a	a						a		
	s	z	g	g	z	s	z	g	g	s	z	z	g	g	g	s	s	z	g	s
1a	V		V	V	V	V			V	V				V	V	V		V		
1b	V		V	V	V	V			V	V					V	V		V		
1c																				
2a	V		V	V	V	V		V	V	V	V		V	V	V	V	V		V	V
2b																				
2c	V	V	V																	
2d																				
3a	V		V			V		V	V							V	V			V
3b					V			V		V					V					
3c															V	V	V			V
4a			V						V	V	V					V	V			
4b																				
4c		V		V	V	V					V		V		V	V			V	V
5a																				
5b																				
5c																				

Ook op basis van deze tabel is er een aantal punten, dat we hier kort willen aanstippen. De verschillen tussen goede en zwakke leerlingen komen duidelijker naar voren wanneer gekeken wordt naar positieve zaken die expliciet genoemd worden. Over het algemeen geldt dat de zwakke leerlingen weinig vinkjes scoren in deze tabel. Uitzondering is leerling 5, die de enige N-leerling in deze groep is.

Opvallend is dat ook in deze tabel, net als in tabel B.4.1, categorie 2a (kennis over inzetten van interactief gedeelte) veelvuldig is aangevinkt. Alle leerlingen waar het vinkje in positieve zin ontbreekt, zijn zwakke leerlingen. Een mogelijke verklaring hiervoor is dat het ook vooral de sterke leerlingen zijn die scoren op oriëntatie (categorie 3a).

Een andere opvallende zaak is dat vooral sterke leerlingen op categorie 3c (reflecteren op verkregen uitkomsten) scoren. De sterke leerlingen reflecteren waarom iets wel of niet waar moet zijn.

Leerling 20 valt op doordat hij in het begin niet goed presteert, hoewel hij tot de groep sterke leerlingen behoort. In de loop van de sessie lijkt hij echter zichzelf bij de kladden te grijpen; hij neemt meer tijd om zich te oriënteren en gaat bij het simuleren systematischer te werk. Dit is onder andere terug te zien in tabel B.4.2 waar deze leerling bijvoorbeeld positief op categorie 3a (oriëntatie) en 4c (een stap terug doen en van afstand reflecteren op aanpak) scoort.

B.5 Het maken van aantekeningen

In hoeverre maken leerlingen notities op papier van de resultaten die ze in het interactieve gedeelte krijgen? En als leerlingen aantekeningen maken, wat voor aantekeningen maken ze dan? In tabel B.5.1 staan hier gegevens over. We hebben speciaal naar twee soorten aantekeningen gekeken, namelijk berekeningen (voor waarden van variabelen, dus voorafgaand aan een run in het interactieve gedeelte) en notities van verkregen resultaten met het interactieve gedeelte.

Tabel B.5.1 *De hoeveelheid leerlingen die aantekeningen maakt*

type leerling	aantal leerlin-gen	aantal dat aan-tekeningen heeft gemaakt	aantal dat berekeningen in aantekeningen heeft gemaakt	aantal dat aanteke-ningen over uitkomsten heeft gemaakt
sterk	6	2	2	2
gemiddeld	8	6	3	5
zwak	6	1	1	0

Het valt op dat vooral de gemiddelde leerlingen aantekeningen maken. Het is in te denken dat leerlingen die vanaf het begin redeneren en eenvoudige situaties uitkiezen, gemakkelijk hun uitkomsten kunnen onthouden. Dat ze dan geen aantekeningen maken, brengt hen niet in de problemen. Maar leerlingen die ‘gewoon proberen’ komen zeker bij veel pogingen wel in de problemen met het onthouden van resultaten. Het is dan ook opvallend dat geen van de zwakke leerlingen aantekeningen maakt van zijn/haar uitkomsten, hoewel deze groep over het algemeen door proberen tot een antwoord komt.

B.6 Bijlage papierentoetsen in het derde vooronderzoek

In het derde vooronderzoek zijn vier toetsen afgenomen. Bij de N-klas is een schriftelijk proefwerk afgenomen. Daarnaast is er een computertoets afgenomen (zie hieronder voor beschrijving). In de M-klas is twee maal een schriftelijk proefwerk afgenomen. De eerste toets ging over de stof t/m & 3. De tweede toets ging over heel hoofdstuk 1.

Bij de schriftelijke toets hebben we getracht meer aan te sluiten bij wat de leerlingen in de lessen hadden gedaan in vergelijking met een gangbare toets. De toets moest echter ook te maken zijn door leerlingen die alleen met het boek hadden gewerkt. We hebben gezocht naar een toets waarvoor beide groepen leerlingen voldoende voorbereid zouden moeten zijn.

B.6.1 Beschrijving van de verschillende onderdelen

Schriftelijke toets N-klas

De toets van de N-klas ging over het complete hoofdstuk. De toets is hieronder gegeven.

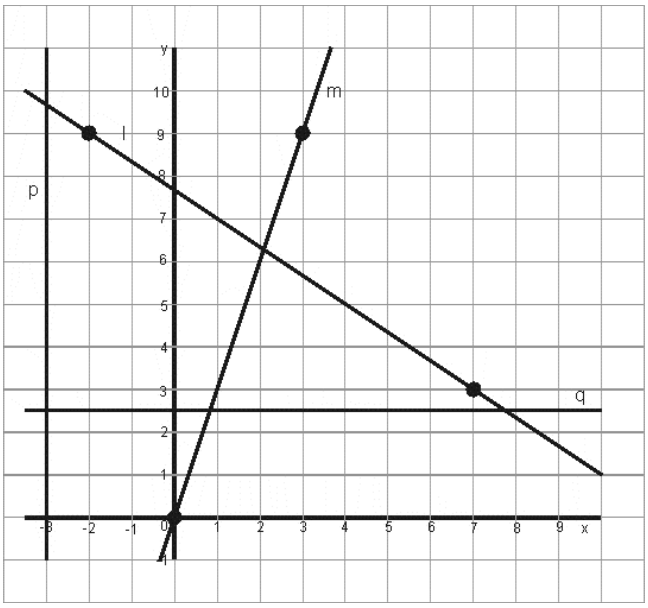
PROEFWERK 4 vwo wiskunde //04 hfdst 1

- *dit werk bestaat uit 6 opgaven*
- ***werk vooral netjes en zorgvuldig***
- *vermeld (waar dat nodig is voor het antwoord) hoe je GR is ingesteld*
- *geef niet alleen antwoorden, maar motiveer ze ook!*
- *verdeling van het aantal punten aan het eind; (45+5 levert een 10 op)*

SUCCES!!!!

Opgave 1

a) Stel bij elk van de vier lijnen in de onderstaande figuur een vergelijking op.

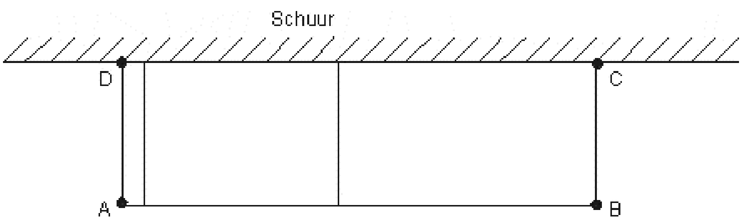


b) Stel de vergelijking op van de lijn n die evenwijdig aan m is en door het punt (2,-4) gaat.

Opgave 2

Koeienfokker Ruursma heeft melkkoeien, vleeskoeien en een stier. Naast de stal wil Ruursma een stuk weiland afzetten waar de beesten kunnen grazen. Omdat de vleeskoeien niet gemolken hoeven te worden en Ruursma voorlopig geen nieuwe kalfjes wil, verdeelt hij het stuk land in drie stukken, zoals in onderstaande figuur. Voor de drie zijden en de twee afscheidingen heeft Ruursma in totaal 300 meter gaas tot zijn beschikking.

a) Stel een formule op voor de oppervlakte als functie van AD.
b) Bereken bij welke afmetingen Ruursma de grootst mogelijke oppervlakte krijgt.



Opgave 3

Los de volgende vergelijkingen algebraïsch op:

a) $2x - 6 = 17$
b) $x^2 + 3x + 4 = 2$
c) $(x - 1)(x + 3) = 12$
d) $2x^2 + 9 = 1$
e) $(-5x + 8)^2 = 25$

Opgave 4

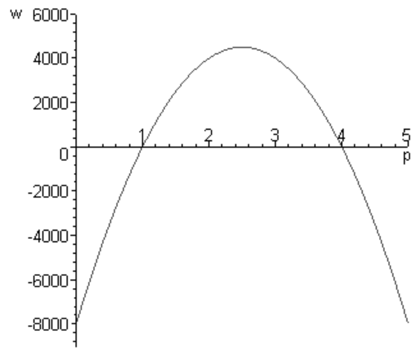
Gegeven is de functie f (x) = $3x^3 - 81x + 5$.

Bereken B_f in het geval dat $D_f = [-1,10]$. Geef een schets van de grafiek van de functie f bij je antwoord.

Opgave 5

In de onderstaande figuur is de grafiek van de winstfunctie $w = -a \cdot p^2 + 10000 \cdot p - 8000$ bij een bepaalde a getekend. In deze formule stelt w de winst voor en p de prijs. Je ziet dat de grafiek een bergparabool is.

a) Welke voorwaarde geldt in dit geval voor a?



Neem nu het tegengestelde van a.

b) Wat kun je nu over de maximale winst vertellen?

Kies a = 2500 (de grafiek blijft dus niet hetzelfde als in de figuur hiernaast), dus: $w = -2500 \cdot p^2 + 10000 \cdot p - 8000$.

c) bij welke prijzen draai je verlies? Geef het antwoord in twee decimalen nauwkeurig.

Opgave 6

Stel 2 auto's rijden allebei van plaats A naar plaats B via dezelfde route op dezelfde dag. Langs de route staat om de honderd meter een groen bordje. De maximale snelheid op deze route is 80 km/u en beide auto's rijden dan ook de hele weg 80 km/u. Langs de route woont Jan. Op het moment dat auto 2 het groene bordje bij het huis van Jan passeert, is het 10 minuten geleden dat auto 1 dit groene bordje passeerde.

In de bovenstaande tekst staan te weinig gegevens om in één figuur de twee grafieken van zowel de plaats van auto 1 als de plaats van auto 2 uitgezet tegen de tijd, te kunnen tekenen. Zeker is dat beide grafieken lineair zijn; beide auto's rijden immers met een constante snelheid. Schrijf op wat je nog meer over de beide grafieken in deze figuur weet en geef een schets van een mogelijke grafiek van deze situatie.

EINDE

Normering:

opgave	1a	1b	2a	2b	3	4	5a	5b	5c	6
punten aantal	4 maal 2	2	5	3	5 maal 2	4	1	2	4	6

Schriftelijke toets N-klas: omschrijving

Opgave 1b, 2, 3 en 4 in deze toets zijn gangbare toetsopgaven. Opgaven 1a, 5 en 6 wijken meer af van gebruikelijke toetsopgaven. We zullen deze toetsonderdelen nu kort bespreken.

Toets opgave 1

Het opstellen van een lijn aan de hand van punten of de grafiek komt zowel in het boek als in de SimQuest-applicaties aan bod. In het leerboek zijn de opgaven over dit onderwerp vaak tekstueel (zoals opgave 1b in de toets). Leerlingen hebben in de SimQuest-applicaties veel met grafieken gewerkt. Daarom is er in de toets voor gekozen om dit onderdeel op een grafische manier te bevragen. In onderdeel a zijn grafieken gegeven en leerlingen moeten daarvoor formules opstellen.

In onderdeel b wordt gevraagd om de formule van een evenwijdige lijn, die door een bepaald punt gaat, te geven. Dit punt is bewust buiten het getekende assenstelsel gekozen; de mogelijkheid tot proberen valt op deze manier (min of meer) weg. Het antwoord moet beredeneerd en berekend worden. Leerlingen die in het programma vooral het antwoord vonden door te proberen, zonder daarna zich af te vragen over het hoe en waarom, ervaren mogelijk bij deze opgave negatieve gevolgen van deze werkwijze.

Toets opgave 5

In het computermateriaal wordt veel gewerkt met parameters die geen vaste waarde hebben; leerlingen moeten de waarde van deze parameters kiezen. In deze opgave is ook een parameter, namelijk ‘a’. De eerste twee vragen gaan over de mogelijkheden van de waarde voor ‘a’. Er zijn oneindig veel mogelijke waarden voor ‘a’, maar er zijn slechts een beperkt aantal varianten. In deelvraag b wordt gevraagd naar een combinatie van een variant met een wiskundig begrip. In deze opdracht worden dus de activiteiten structureren en communiceren getoetst. Vervolgvraag b is ook een vraag naar interpretatie; interpreteert de leerling juist dat er geen maximale winst is? Bij deelvraag c wordt vervolgens een waarde voor ‘a’ gekozen en wordt er een vraag gesteld zoals zowel in het boek als in het programma ook wordt gesteld.

Toets opgave 6

Deze opgave vraagt van leerlingen om een contextrijk verhaal te vertalen naar een grafiek. In het contextrijke verhaal staan echter te weinig gegevens om deze grafiek te kunnen tekenen. De leerlingen moeten aangeven welke gegevens missen, zelf waarden voor deze gegevens kiezen en vervolgens de grafiek tekenen. In het computerprogramma wordt vaak van leerlingen gevraagd om zelf wat te kiezen. Daarbij kunnen ze het zichzelf makkelijk of moeilijk maken. Deze opgave is een poging om bij die aspecten van het programma aan te sluiten.

Het feit dat in het computerprogramma grafieken door de computer gegenereerd worden, kan er toe leiden dat leerlingen niet leren om zelf grafieken te tekenen. We hebben geprobeerd dit op te vangen door een aantal maal voordat de computer de grafiek genereert, de leerling eerst zelf de grafiek te laten tekenen of schetsen. Deze toetsopdracht is bedoeld om te bekijken hoe goed leerlingen in staat zijn om zulk soort grafieken zelf te construeren.

Schriftelijke toets N-klas: ervaringen

In tabel B.6.1 staan de resultaten van de toets afgenomen in de N-klas. De resultaten van de drie leerlingen die niet met SimQuest-simulaties gewerkt hebben, staan apart vermeld.

Tabel B.6.1 *Resultaten papieren toets N-klas*

Met of zonder SimQuest	N	minimum	maximum	gemiddelde	standaard deviatie
met	22	3,2	9,2	5,8	1,7
zonder	3	5,8	7,2	6,7	0,8

De resultaten voor de afzonderlijke toetsvragen staan in tabel B.6.2.

Tabel B.6.2 *Resultaten op de verschillende onderdelen van toets in de N-klas*

opdracht	N	minimum	maximum (maximum haalbaar)	gemiddelde (percentage van maximum)	standaard deviatie
1	25	1	10 (10)	6,6 (66%)	2,5
2	25	0	8 (8)	2,9 (37%)	3,1
3	25	4	10 (10)	8,2 (82%)	1,6
4	25	0	4 (4)	1,8 (46%)	1,5
5	25	0	5 (7)	2,2 (31%)	1,5
6	25	0	5 (6)	3,0 (49%)	1,8

Toets opgave 1

Het is opvallend dat een deel van de leerlingen de richtingscoëfficiënt en het snijpunt met de y-as niet berekent maar afleest. Voor eenvoudige waarden is dit gewenst. Maar bij schuine grafieken is het aflezen van zowel de richtingscoëfficiënt als het snijpunt met de y-as over het algemeen niet voldoende nauwkeurig. De werkwijze om op zicht te schatten en niet te preciseren met een berekening, zien we hier ook bij de beantwoording in de toets.

Leerlingen die foutieve waarden berekenen, maken geen opmerking dat hun antwoord nooit kan kloppen gezien de loop van de grafiek. Meerdere leerlingen maakten bijvoorbeeld de veelvoorkomende fout:

$a = \frac{\Delta x}{\Delta y}$ in plaats van $a = \frac{\Delta y}{\Delta x}$.

Nadat ze met deze formule een antwoord hadden gekregen, heeft geen van hen een opmerking opgeschreven dat dit antwoord niet kan kloppen. We hoopten dat leerlingen door het programma een gevoel zouden krijgen voor 'mogelijke' waarden. Maar deze evaluerende vaardigheid was in dit geval bij deze leerlingen nog niet voldoende om hen hun vergissing te doen inzien en/of een opmerking daarover bij hun antwoord te maken.

Een punt dat bij veel leerlingen opvalt, is dat ze niet de juiste wijze van noteren weten. Deze leerlingen hebben niet voldoende geleerd hoe ze wiskundig op een juiste manier een formule opschrijven nadat ze de parameters hebben berekend.

Toets opgave 2

Dit type opgave komt zowel in het boek als in het computerprogramma voor. In het computerprogramma is er ruime aandacht voor het verband tussen de formule, de bijbehorende grafiek en het concrete geval. Dit komt nu niet terug in de vraagstelling. Deze opgave kan op dit punt uitgebreid worden.

De opgave is vergelijkbaar met, maar niet gelijk aan, opdrachten in de SimQuest-simulaties. Een aantal leerlingen schrijft dan ook het antwoord op van de situatie in de SimQuest-simulatie. Eén leerlinge heeft tijdens het werken met de SimQuest-simulaties de foutieve conclusie getrokken dat de oppervlakte altijd maximaal is, als de oppervlakte vierkant is. Deze foutieve conclusie gebruikt ze in de toets opnieuw om de oplossing te vinden. Ze heeft een foutieve conclusie getrokken uit het werken met het programma en deze foutieve conclusie is blijven bestaan tot en met het maken van de toets. Een andere leerling maakt dezelfde fout (oppervlakte is altijd maximaal bij een vierkant), maar hij heeft de opdracht in het computerprogramma, die hier expliciet naar vraagt, niet gemaakt blijkt uit de logbestanden.

Toets opgave 4

Een eerste opvallend aspect is dat leerlingen veelvuldig afwijken van de officiële notatie. Veel leerlingen gebruiken verkeerde haken, namelijk ( ) in plaats van [ ] < >. Andere leerlingen beschrijven welke y waarden zijn toegestaan, maar geven uiteindelijk niet het eindantwoord in de officiële notatie. De wiskundige presentatie is onvoldoende.

Een veel gemaakte fout is het berekenen van het bereik door de grenzen van het domein in de formule in te vullen en de y-waarden bij deze x-waarden te berekenen en die getallen als bereik te geven. Meerdere leerlingen die dit foute eindantwoord geven, maken opmerkingen over het feit dat het laagste punt niet bij de laagst toegestane x waarde (linker grens van het domein) ligt, maar geven vervolgens als eindantwoord de waarden wanneer dat wel zo zou zijn geweest. Ook in de schetsen van een aantal leerlingen is te zien, dat ze wel het laagste punt hebben berekend (en deze in de schets van de grafiek hebben aangegeven), maar vervolgens geven ze niet het juiste antwoord. Tot slot is het opvallend dat veel leerlingen geen juiste schets hebben. In een groot aantal van deze schetsen liggen de grenzen van het bereik bij de grenzen van het domein.

Een aantal leerlingen weet niet wat het bereik, $B_{f,}$ is. Twee leerlingen geven bijvoorbeeld de volgende definitie: bereik = verschil max en min. Eén leerling geeft bij dit ene domein twee losse bereiken. Dit duidt op onbegrip van wat het bereik voorstelt.

Kortom, de alternatieve manier waarop het bereik in de SimQuest-simulaties aan bod is geweest, leidt niet tot erg goede prestaties op een ‘traditionele’ toetsvraag. De SimQuest-opdrachten over het onderwerp Domein & Bereik zijn geen ‘standaard’ opgaven, waarin de nieuwe begrippen geïntroduceerd en gevraagd worden, zoals de opdrachten in het boek. Buiten de veelgemaakte fout met de grenzen, worden er ook erg veel fouten gemaakt in de notitie en het kennen van het begrip bereik. Een mogelijke verklaring hiervoor is dat leerlingen de definitie en notatie in het boek niet (goed) hebben bekeken en er in het computerprogramma onvoldoende nadruk op is gelegd.

Toets opgave 5

Uit het antwoord op vraag b blijkt dat een aantal leerlingen geen goed beeld heeft van het begrip maximale winst. Zo noemt een leerling bijvoorbeeld dat er geen maximum meer is en zegt dezelfde leerling tegelijkertijd dat de maximale winst erg laag wordt. Uit dit en andere antwoorden blijkt dat meerdere leerlingen denken dat het minimum van de grafiek nu gelijk is aan de maximale winst. Zij hebben de maximale winst gelijk gesteld aan de waarde van de top / het dal van de grafiek. Een ander voorbeeld hiervan is het volgende antwoord: “het is verlies geworden”. Het lijkt erop dat deze leerling duidt op het feit dat de bergparabool een dalparabool is geworden en dat als je dit doet door in de x-as te spiegelen, de y-waarde van het minimum een negatieve waarde is.

Enkele leerlingen geven bij opgave b wel het juiste antwoord maar hebben moeite om dit antwoord juist te formuleren. Een voorbeeld van een dergelijke formulering is: “heeft geen einde”.Een andere leerling noemt eerst dat het een dalparabool wordt en zegt dan: “het is oneindig”, zonder te specificeren wat met ‘het’ bedoeld wordt. Nog een voorbeeld van een antwoord waaruit de goede bedoeling blijkt, maar de formulering te wensen over laat is: “maximum wordt te groot”.

Toets opgave 6

Wat opvalt aan het beantwoorden van deze opgave is dat leerlingen goed in staat zijn om de opgave te maken. Veel punten worden echter mis gelopen, doordat de grafiek te veel een schets blijft.

Schriftelijke toets N-klas: meningen

De leerlingen is gevraagd of ze voor iedere toetsopgave konden aangeven of er volgens hen een verwante opdracht in de SimQuest-simulaties was geweest. De resultaten staan in tabel B.6.3.

Tabel B.6.3 *Mening verwantschap opdrachten in de SimQuest-simulaties en toetsopgaven*

Toetsvraag N-klas	aantal wel	aantal niet
1	4	0
2	4	0
3	1	3
4[1]	2	1
5	2	2
6[1]	2	1

[1] niet elke leerling is aan deze toetsvraag toegekomen

Ook is aan de leerlingen gevraagd aan te geven welke opgave zij het makkelijkst en welke zij het moeilijkst vonden. De resultaten staan in tabel B.6.4. Opvallend is dat de opgave waarop het laagst gescoord is, opgave 5, niet het moeilijkst wordt genoemd.

Tabel B.6.4 *Mening van leerlingen over moeilijkheidsgraad toetsopgaven*

Toetsvraag N-klas	makkelijkst[1]	moeilijkst[1]
1	0,5	0,5
2	-	1,5
3	3	1
4	-	-
5	-	-
6	0,5	1

[1] er is een half genomen als leerlingen twee opgaven noemden

Twee schriftelijke toetsen M-klas

Op de volgende pagina's staan de twee toetsen zoals de leerlingen deze gekregen hebben. De eerste toets in de M-klas ging over de stof t/m & 3 en de tweede toets ging over het complete hoofdstuk.

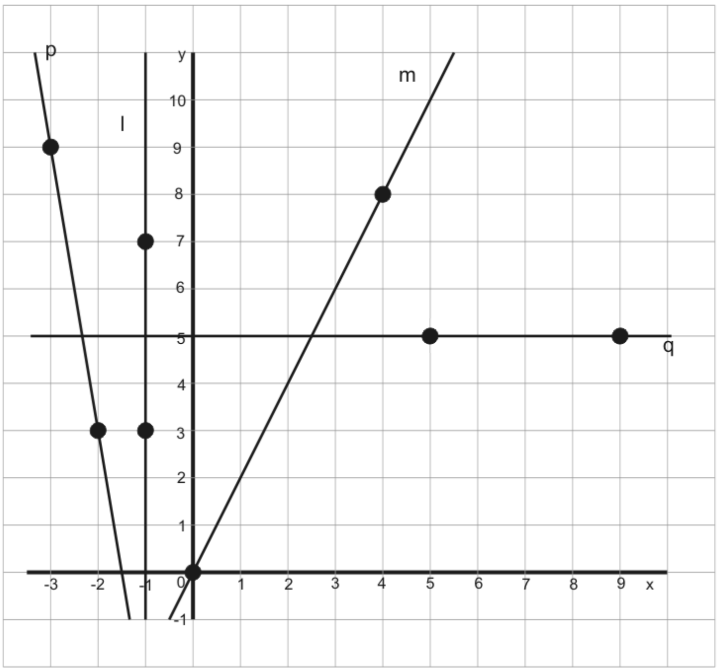
PROEFWERK 4 vwo wiskunde 21/12/04 hfdst 1 &1 t/m &3

- *dit werk bestaat uit 5 opgaven*
- ***werk vooral netjes en zorgvuldig***
- *vermeld (waar dat nodig is voor het antwoord) hoe je GR is ingesteld*
- *geef niet alleen antwoorden, maar motiveer ze ook!*

SUCCES!!!!

Opgave 1

a) Stel bij elk van de vier lijnen (p, l, m en q) in de onderstaande figuur een vergelijking op.



b) Stel de vergelijking op van de lijn n die evenwijdig aan m is en door het punt (5,-3) gaat.

c) De lijn k snijdt de y-as in het punt (0,7). Voor $x > 0$ geldt dat de lijn k boven de lijn q ligt. Welke waarden kan de richtingscoëfficiënt van de lijn k aannemen?

Opgave 2

Los de volgende vergelijkingen algebraïsch op:

a) $4x - 5 = 21$

b) $x^2 + 11x + 20 = -8$

c) $(-5x + 4)^2 = 36$

d) $(x - 4)(x + 2) = 16$

e) $3x^2 + 10 = 1$

Opgave 3

Gegeven is de functie f (x) = $-3x^3 + 9x + 2$.

Bereken B_f in het geval dat $D_f = \langle -4,2 \rangle$. Geef een schets van de grafiek van de functie f bij je antwoord.

z.o.z

Opgave 4

Los de volgende ongelijkheden met behulp van een grafiek op. Geef een exact antwoord.

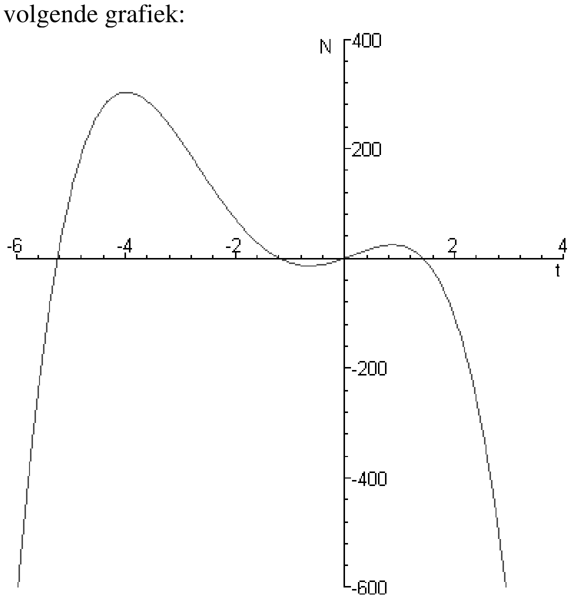
a) $x^2 - 5x > 6$

b) $-x^2 + 7x \geq 5x$

Opgave 5

In de kantine van een school is er van 12.00 uur tot 13.15 uur de mogelijkheid om een warme maaltijd te kopen bij de keuken. Meneer ten Donkelaar is wiskunde leraar op deze school. Hij heeft een formule opgesteld waarmee beschreven wordt hoeveel leerlingen op een bepaald tijdstip in de kantine hun warme maaltijd aan het eten zijn. Deze formule luidt: $N = -4t^4 - 20t^3 + 12t^2 + 36t$. Hierin is N het aantal leerlingen t uur na opening van de kantine om 12.00 uur.

Mevrouw Nelissen werkt in de kantine van de school en wil het maximale aantal leerlingen dat zij kan verwachten weten om een idee te krijgen van de hoeveelheid tafels die zij moet reserveren voor deze leerlingen. Zij leent de GR van haar dochter, tikt de formule van meneer ten Donkelaar in en plot de volgende grafiek:



Mevrouw Nelissen denkt dat ze moet rekenen op een maximaal aantal leerlingen van ongeveer 325. Zij wil een deel van de kantine met daarin 325 gereserveerde zitplaatsen afschermen. Zij stuit nu op een probleem; in de kantine zijn maar 100 zitplaatsen.

a) Heeft mevrouw Nelissen gelijk als ze zegt dat er in de kantine te weinig zitplaatsen zijn op het tijdstip dat er een maximaal aantal leerlingen aan het eten is? Leg uit waarom.

b) Hoe groot is het maximale aantal leerlingen dat mevrouw Nelissen kan verwachten precies?

Mevrouw Nelissen vraagt zich af hoe laat ze de schoonmaakster zal vragen om te komen. Ze beslist dat dit op een tijdstip moet zijn dat alle gereserveerde tafels weer verlaten zijn.

c) Vanaf welk tijdstip kan Mevrouw Nelissen afspreken met de schoonmaakster?

EINDE

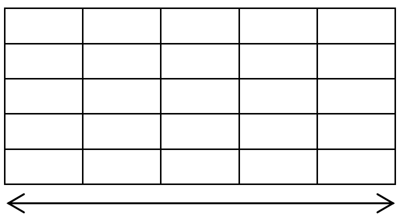
PROEFWERK 4 vwo wiskunde 24/01/05 hfdst 1

- *dit werk bestaat uit 4 opgaven*
- ***werk vooral netjes en zorgvuldig***
- *vermeld (waar dat nodig is voor het antwoord) hoe je GR is ingesteld*
- *vergeet niet je naam bovenop het antwoordenblad dat bij opgave 4 hoort te zetten en lever dit na afloop ook in*
- *geef niet alleen antwoorden, maar motiveer ze ook!*

SUCCES!!!!

Opgave 1

Er is in het dorpje Reelen jaarlijks een koeienvlaai wedstrijd. Op een groot grasland wordt een stuk afgebakend met een rood lint. Dit stuk wordt vervolgens verdeeld in kleinere allemaal even grootte stukken door extra lijnen te trekken met het rode lint, zoals in onderstaande tekening. Tijdens de wedstrijd graast er een koe op het stuk wei. Elke deelnemer heeft een gebied toegewezen gekregen en waar de eerste vlaai komt te liggen bepaalt wie er wint.



l

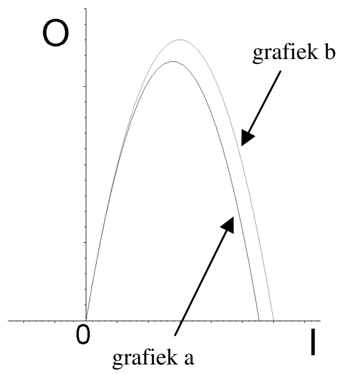
voorbeeld van weiland als er 25 deelnemers zijn, alle getekende lijnen worden van het rode lint gemaakt

Stel er doen 64 personen met de wedstrijd mee. De organisatie heeft in totaal 144 meter rood lint.

a) Bij welke afmetingen is het stuk wei van iedere deelnemer zo groot mogelijk?

Iemand van de organisatie heeft een grafiek getekend waarin de oppervlakte van het totale afgezette gebied (O) uitstaat tegen de lengte van het totale afgezette gebied (l). Een week voor de wedstrijd kwam er nog een extra aantal aanmeldingen. Er werd geen rood lint meer bijgekocht. De organisatie heeft van de nieuwe situatie een grafiek getekend. In het rechterplaatje zijn beide grafieken getekend.

b) Welke van de twee grafieken is de grafiek van de nieuwe situatie? Schrijf ook op waarom.



Opgave 2
Jasper heeft de opdracht gekregen om de gemiddelde zomertemperatuur te bepalen, die bomen minimaal nodig hebben om te kunnen overleven.

In het eerste deel van zijn onderzoek bekijkt Jasper hoeveel de temperatuur daalt als de hoogte toe neemt. Hij maakt daarvoor gebruik van gegevens van metingen in Trontheim (Noorwegen). Bij deze metingen is de hoogte vanaf zeeniveau gevarieerd en is de bijbehorende gemiddelde zomertemperatuur gemeten. Hij maakt aan de hand van de resultaten van twee metingen de volgende tabel:

z.o.z.

	hoogte (m)	gemiddelde zomertemperatuur (°C)
simulatie 1	500	12
simulatie 2	1000	9

Jasper trekt de volgende conclusie: bij 100 m stijging, daalt de gemiddelde zomertemperatuur 0,6 graden.

a) Waarom kan Jasper deze conclusie niet trekken alleen op basis van de gegevens in deze tabel?

Ga er vanuit dat Jasper's conclusie klopt.

b) Stel een formule op voor de gemiddelde zomertemperatuur in de omgeving van Trontheim als functie van de hoogte vanaf zeeniveau.

In het tweede deel van zijn onderzoek, bekijkt Jasper wat de gemiddelde zomertemperatuur moet zijn om boomgroei mogelijk te maken. In de omgeving van Trontheim groeien vanaf 833m hoogte geen bomen meer. (Wanneer je niet uit som b bent gekomen, gebruik dan de formule $T = -0{,}004\ h + 13$, met h de hoogte boven zeeniveau en T de gemiddelde zomertemperatuur).

c) Geef het bereik van de gemiddelde zomertemperatuur in de omgeving van Trontheim waarbij bomen kunnen overleven! Ga er vanuit dat de omgeving van Trontheim boven zeeniveau ligt.

Er zijn ook vergelijkbare gegevens beschikbaar over Kampala (Oeganda). Rond Kampala ligt de boomgrens op 2500 m hoogte.

d) Beschrijf van welke metingen Jasper de gegevens moet verzamelen om te controleren of
   (1) de temperatuursgrens die hij gevonden heeft juist is en
   (2) de temperatuurafname van 0,6 graden per 100 m hoogtestijging juist is.

Opgave 3
In de kantine van een school verkoopt men kaasbroodjes. Als een prijs p van € 2,- gevraagd wordt, is de omzet per dag een hoeveelheid q van 80 broodjes. Verlaagt men de prijs tot € 1,90 dan stijgt de omzet tot 82 broodjes. Ga er van uit dat er een lineair verband bestaat tussen p en q. De kosten K voor de kantinebeheerder hangen af van het aantal broodjes volgens de formule $K = ½q + 10$.

a) Stel een formule op voor p als functie van q.
b) Schrijf de opbrengst R als functie van q.
c) Laat zien dat de dagelijkse winst W te schrijven is als $W = -0{,}05q^2 + 5{,}5q - 10$.
d) Bereken de maximale winst m.b.v. je GR. Wat kost in dat geval een kaasbroodje?

Opgave 4
Gegeven is de formule V = a T + b. Op het antwoordenblad zijn telkens twee grafieken getekend voor verschillende waarden van de coëfficiënten a en b. De linker grafiek geeft de beginsituatie weer.

Geef op het antwoordenblad in de tabellen onder de grafieken aan, hoe de coëfficiënten a en b zijn veranderd, zodat de rechter grafiek wordt verkregen. Kruis voor zowel a als b in de 3 verschillende situaties één van de 5 mogelijkheden aan.
Vergeet niet op het antwoordenblad je naam in te vullen!!!!!!

EINDE

Antwoordenblad

Naam:

V = a T + b

Situatie 1

	wordt of blijft 0	blijft gelijk maar is ongelijk aan 0	neemt toe in absolute grootte, maar wordt niet gelijk aan 0	neemt af in absolute grootte, maar wordt niet gelijk aan 0	alleen het teken verandert
a					
b					

Situatie 2

	wordt of blijft 0	blijft gelijk maar is ongelijk aan 0	neemt toe in absolute grootte, maar wordt niet gelijk aan 0	neemt af in absolute grootte, maar wordt niet gelijk aan 0	alleen het teken verandert
a					
b					

Situatie 3

	wordt of blijft 0	blijft gelijk maar is ongelijk aan 0	neemt toe in absolute grootte, maar wordt niet gelijk aan 0	neemt af in absolute grootte, maar wordt niet gelijk aan 0	alleen het teken verandert
a					
b					

Twee schriftelijke toetsen M-klas: omschrijving

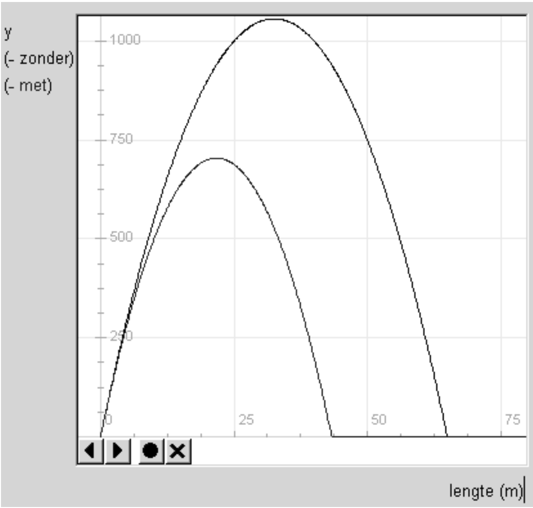
Van de eerste toets opgave 1b, 2, 3 en 4 gangbare toetsopgaven. Opgaven 1a, 1c en 5 wijken meer af. Van de tweede toets zijn opgaven 1a en 3 gangbare toetsopgaven. Opgaven 1b, 2 en 4 wijken meer af. We zullen nu verschillende opgaven van de toetsen bespreken.

Toets 1 opgave 1c

Toetsopgave 1 voor de M-klas is gelijk aan de toetsopgave 1 van de N-klas. Omdat we gemerkt hadden dat deze opgave nog niet echt recht deed aan de aspecten die we door middel van het werken met de SimQuest-simulaties hopen te benadrukken, hebben we bij de M-klas een opgave c toegevoegd. Onderdeel c is een onderdeel dat zich richt op de vaardigheid om te kunnen bedenken welke mogelijkheden er allemaal zijn. De vraag sluit aan op wat er in de SimQuest-simulaties is gevraagd, maar is ook te beantwoorden wanneer men niet met de SimQuest-simulaties heeft gewerkt.

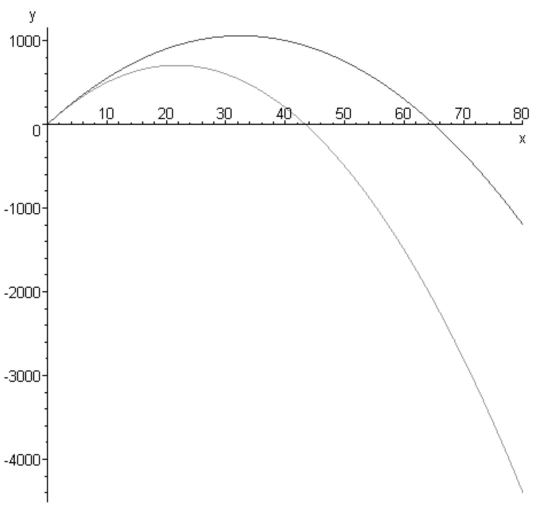
Toets 1 opgave 5

Deze opgave is een opgave over het onderdeel modelleren. We wilden graag weten of leerlingen geleerd hebben om grafieken en reële verhalen aan elkaar te koppelen. In de SimQuest-simulaties is voor de leerling al een aantal stappen in het abstractieproces gedaan. Eén van deze stappen is het bij de juiste waarde laten starten van bijvoorbeeld de variabele ‘tijd’ of ‘lengte’. Het zou kunnen dat leerlingen, doordat in de simulatie altijd vanaf de juiste waarde gestart wordt, niet nadenken over hoe de grafiek daarvoor loopt. In het geval van de tijd kan het zijn dat leerlingen niet expliciet nadenken over wat er voor $t = 0$ gebeurt. Zou het programma, doordat het stappen voor leerlingen neemt, ervoor zorgen dat leerlingen niet goed leren om grafieken en reële verhalen te koppelen? Aan de andere kant kunnen eventuele vragen over ‘de werkelijkheid’ gesteld worden, zoals in het programma meerdere malen gebeurt (bijvoorbeeld bij de windmolen en het benefietconcert), en tot nadenken stemmen. Bijvoorbeeld het feit dat de grafiek van de oppervlakte niet doorloopt, kan de leerling aanzetten tot nadenken. Hier wijkt de grafiek namelijk duidelijk af van een ‘normale’ grafiek van een lineaire functie (zie figuur B.6.1).



De grafiek zoals die in de SimQuest-simulaties gegeven wordt. Langs de y-as staat de oppervlakte. Een oppervlakte kan niet negatief worden, vandaar dat de grafiek niet verder getekend wordt.

Op de grafische rekenmachine zou deze grafiek er meer zo uit zien:



Om leerlingen over de loop van de grafiek te laten nadenken wordt bijvoorbeeld de volgende vraag gesteld:

Verklaar waarom:
(1) de y-coördinaat van de top van de grafiek verschilt
(2) de x-coördinaat van de top van de grafiek verschilt
(3) de x-coördinaat van het tweede snijpunt met de x-as verschilt

Figuur B.6.1 *Voorbeeld verschil grafieken in de SimQuest-simulaties en de grafische rekenmachine*

In deze toetsopgave is zowel vaardigheid in het vertalen van het verhaal naar de kale wiskunde als vaardigheid in het omgaan met de GR nodig. In de opgave wordt een grafiek gegeven, maar de grenzen zijn niet juist gekozen. Getoetst wordt of leerlingen hier rekening mee houden (vraag a en b).

In vraag c draait het om het kiezen van het juiste antwoord uit verschillende mogelijkheden. Hier moet eerst geabstraheerd worden om het probleem op te lossen en vervolgens 'omgekeerd' geabstraheerd worden om antwoord te geven op de vraag en uit de berekende oplossingen de juiste te kiezen.

Toets 2 opgave 1

Toetsopgave 1a is vergelijkbaar met toetsopgave 2b uit de toets van de N-klas. Omdat er in het programma de nodige aandacht wordt besteed aan de bijbehorende grafieken, hebben we een vraag 1b toegevoegd waarin deze grafieken meer centraal staan. Er wordt gevraagd wat er gebeurt met de grafiek wanneer er iets in de situatie verandert. Hierbij zijn in de grafiek geen getallen gegeven. Hierdoor wordt vooral begrip getoetst en niet rekenvaardigheid of vaardigheid in het omgaan met de grafische rekenmachine.

We verwachten dat leerlingen deze vraag goed moeten kunnen maken, omdat in de oppervlakte vragen (benefiet) in de SimQuest-simulaties er veel aandacht is geweest voor de verandering van grafieken als gevolg van verandering in de situatie (van zonder naar met artiestenruimte).

Toets 2 opgave 2

In onderzoek naar nieuwe manieren van toetsen van onderzoeksvaardigheden, zie je vaak dat er vragen worden bedacht die specifiek naar deze aspecten vragen (zie voor een voorbeeld (ACT Inc., 2001)). Leerlingen wordt bijvoorbeeld gevraagd aan te geven hoe zij in een beschreven onderzoek iets zouden aanpakken of wat er aan een onderzoek niet deugt. Deze opgave is een poging om een vergelijkbare opgave te bedenken voor dit specifieke onderwerp. We wilden polsen of met een dergelijke opgave de onderzoeksvaardigheden van leerlingen getoetst kunnen worden.

Deze opgave gaat over het doen van experimenten en het (kunnen) trekken van conclusies. Nadenken over de geldigheid van getrokken conclusies is een belangrijk aspect bij het onderzoekend leren. In vraag a wordt hier expliciet naar gevraagd. Bepalen of iets wel of niet een lineair verband is, is herhaaldelijk aan bod gekomen in de SimQuest-simulaties.

In vraag c wordt nagegaan in hoeverre de leerlingen in staat zijn om de gevonden resultaten juist te interpreteren en de consequenties in te zien en vervolgens te gebruiken bij het oplossen van een volgend vraagstuk.

In vraag d wordt vervolgens in gegaan op de manier waarop met een herhaalde meting eerdere resultaten en conclusies bevestigd dan wel tegengesproken kunnen worden. De leerlingen wordt gevraagd te beschrijven welke metingen ze daarvoor zouden moeten doen.

Naast dat vaardigheden als evalueren, interpreteren en bewijzen nodig zijn voor het beantwoorden van de opdrachten, zijn ook abstractievaardigheden nodig. In deze opgave moet uit een contextrijk verhaal de kale wiskunde worden geabstraheerd, op deze kale gegevens wiskundige bewerkingen worden uitgevoerd en de kale resultaten weer terug vertaald / omgekeerd geabstraheerd worden naar een antwoord binnen de context.

Toets 2 opgave 4

Eén van de aspecten van het werken met de SimQuest-simulaties is het krijgen van inzicht en een gevoel voor bijvoorbeeld hoe een grafiek van een bepaalde functie er ongeveer uit zal zien. In deze toetsopgave worden geen getallen gegeven. Geen getallen, dus leerlingen kunnen niet zomaar rekenprocedures (zonder begrip) gebruiken. Deze opdracht vraagt om inzicht hoe een lineaire formule en grafiek samenhangen of om het idee om toch getallen uit te proberen. Deze eigen getallen moeten dan gekozen worden; een tactiek die ook vaak in het programma gebruikt kan worden.

Een vergelijkbare opdracht komt ook in de SimQuest-simulaties voor. In die opdracht moeten de waarden van ‘a’ en ‘b’ veranderd worden. Het grafische resultaat kan vervolgens bekeken worden. De opdracht vraagt naar verandering, dus niet een statische toestand. Geleerd hebben met de SimQuest-simulaties kan hiervoor voordelig zijn; in het programma gaat het namelijk vaak over wat voor gevolgen een bepaalde verandering heeft.

Twee schriftelijke toetsen M-klas: ervaringen

Toets 1

De resultaten die behaald zijn op de toetsen staan in tabel B.6.5.

Tabel B.6.5 *Behaalde resultaten op de toetsen in de M-klas*

Toets M	N	minimum	maximum	gemiddelde	standaard deviatie
toets 1	29	2,9	8,8	5,9	1,5
toets 2	30	2,5	9,1	6,5	1,6

De resultaten van de verschillende opgaven van de tweede toets in de M-klas (voor elke opdracht is het maximum ook gelijk aan het aantal maximaal haalbare punten) staan in tabel B.6.6.

Tabel B.6.6 *Resultaten op de verschillende onderdelen van toets 2 in de M-klas*

opdracht	N	minimum	maximum	gemiddelde (percentage)	standaard deviatie
1A	30	0	6	1,87 (31%)	1,94
1B	30	0	3	2,17 (72%)	1,12
2A	30	0	2	1,70 (85%)	,65
2B	30	0	3	2,20 (73%)	1,22
2C	30	0	4	2,00 (50%)	1,26
2D	30	0	4	2,17 (54%)	1,58
3A	30	0	4	2,93 (73%)	1,46
3B	30	0	3	1,83 (61%)	1,34
3C	30	0	3	1,93 (64%)	1,34
3D	30	0	4	2,27 (57%)	1,46
4A	30	0	4	2,40 (60%)	1,69
4B	30	0	4	2,53 (63%)	1,38
4C	30	0	4	3,13 (78%)	1,14

Wat opgave 2 betreft, is het de vraag of een dergelijke opgave binnen de toets op zijn plaats is. Zeker wanneer er slechts één toets is, kan een dergelijke opgave wegens ruimte- en tijdgebrek al niet geplaatst worden. Het doen van onderzoek kan misschien beter op een andere manier (namelijk in een praktische opdracht of een opdracht met het programma) getoetst worden.

We vroegen ons vooraf af of opgave 4 niet te gemakkelijk zou zijn. Zoals aan de resultaten te zien is, was dit niet het geval. Het is opvallend wat voor fouten leerlingen maken.

Eén leerlinge heeft gewoon overal dezelfde optie aangekruist. Het lijkt erop dat zij niet wist wat het antwoord was, maar wel door had dat ze door iets aan te kruisen punten zou verdienen. Het heeft haar maar liefst 8 (van de mogelijk 12) punten opgeleverd. Een nadeel van een dergelijke opgave is dat leerlingen door willekeurig wat aan te kruisen zonder veel begrip toch veel punten kunnen halen.

Een aantal leerlingen geeft bij een horizontale lijn niet het antwoord dat de richtingscoëfficiënt daar gelijk aan 0 is. Zij kruisen de optie 'blijft gelijk maar is ongelijk aan 0' aan. Daarnaast geeft een aantal leerlingen van schuine lijnen aan dat de richtingscoëfficiënt gelijk aan 0 is. Beide groepen leerlingen beheerst blijkbaar de kennis 'een horizontale lijn heeft een richtingscoëfficiënt gelijk aan 0, is een lijn niet horizontaal dan is de richtingscoëfficiënt ongelijk aan 0' niet voldoende om de opdrachten juist te kunnen beantwoorden.

Een lijn die lager ligt, maar wel parallel (de richtingscoëfficiënt blijft gelijk) loopt, daarvan geven twee leerlingen aan dat de richtingscoëfficiënt afgenomen is. Twee andere leerlingen geven bij deze opdracht het antwoord dat alleen het teken van de richtingscoëfficiënt verandert. Deze leerlingen denken dat de richtingscoëfficiënt verandert, ondanks dat de grafieken parallel lopen. Andersom zijn er ook leerlingen die van een stijgende grafiek en een dalende grafiek zeggen dat ze dezelfde richtingscoëfficiënt hebben. De antwoorden van deze leerlingen laten zien dat ondanks het werken met het programma er leerlingen zijn die de kennis 'parallelle grafieken hebben dezelfde richtingscoëfficiënt, niet-parallelle grafieken niet' onvoldoende beheersen om deze opdrachten juist te kunnen beantwoorden.

Wellicht hebben de eerste twee leerlingen getwijfeld of de beide lijnen wel parallel liepen. Een verbetering van de toets opgave zou zijn om een raster toe te voegen, zodat leerlingen beter kunnen bepalen of lijnen parallel zijn. Opvallend is wel dat ze beiden voor afname hebben gekozen en niet voor toename. Dat maakt de aanname dat ze zich hebben vergist doordat de lijn lager is gaan liggen, aannemelijker. Onduidelijkheid van de tekening zou ook voor onjuiste antwoorden gezorgd kunnen hebben bij het aangeven of 'b' gelijk aan 0 is of niet. Lijnen niet laten beginnen bij de y-as maar bij een negatieve waarde van x en het toevoegen van een raster verbetert de afleesbaarheid van de grafiek.

Twee schriftelijke toetsen M-klas: meningen

De geïnterviewde leerlingen is gevraagd om voor iedere toetsvraag aan te geven of er volgens hen een verwante opdracht in de SimQuest-simulaties is geweest. De resultaten staan in tabel B.6.7 en tabel B.6.8.

Tabel B.6.7 *Mening verwantschap opgaven van de SimQuest-simulaties en toets 1*

Toetsopgave M-klas toets 1	aantal wel	aantal niet
1	4	0
2	0	4
3	1	3
4	0	4
5	2	2

Tabel B.6.8 *Mening verwantschap opgaven van de SimQuest-simulaties en toets 2*

Toetsopgave M-klas toets 2	aantal wel	aantal niet
1	4	0
2	3	1
3	2	2
4	2	2

Net als bij de N-klas geven leerlingen van een groot aantal toetsvragen aan dat er een verwante opdracht in de SimQuest-simulaties is gegeven. Zij zien meer verwantschap tussen de SimQuest-simulaties en de tweede toets als tussen de SimQuest-simulaties en de eerste toets. Dit komt overeen met de mening van de ontwerpers van de toetsen.

Ook aan de M-leerlingen is gevraagd aan te geven welke opdracht zij het makkelijkst en welke zij het moeilijkst vonden. De resultaten staan in tabel B.6.9 en tabel B.6.10.

Tabel B.6.9 *Mening van leerlingen over moeilijkheidsgraad toetsopgaven toets 1*

Toetsopgave M-klas toets 1	makkelijkst	moeilijkst
1	-	-
2	3	1
3	-	1
4	-	-
5	1	2

Tabel B.6.10 *Mening van leerlingen over moeilijkheidsgraad toetsopgaven toets 2*

Toetsopgave M-klas toets 2	makkelijkst	moeilijkst
1	1	3
2	-	-
3	3	-
4	-	1

B.7 Voorstel lesindeling uit de docentenhandleiding

INDELING VAN DE STOF PER LESUUR

sommen uit boek	O = Oriëntatie
opdrachten met SimQuest	I = Introductie
practicum met GR	V = Verwerking
	R = Recapitulatie

les-uur	lesstof	in de les			voorbereiding volgende les	
1	1.1 theorie A 1 2a m.o.01	uitleg over de verschillende materialen (GR, SimQuest, werkplan) en de werkwijzen (onderzoekend leren, simuleren, opbouwen leerstofoverzicht)			SimQuest installeren & openen	
		O	lineaire formules en grafieken		O	1 alle opgaven m.o.01
2	1.1 theorie B 2b, 3, 4, 8, 11 m.e en m.t.	afnemen voortoets			V	alle opgaven m.t.
		I V	lineaire formules en grafieken	m.e. m.t. introduceren		
3	1.1 theorie C & D 13, 16, 19 m.f.01, m.f.03, m.f.04	V R O & I	 opstellen formule m.b.v. grafiek	m.t. bespreken leerstofoverzicht m.f.01 m.f.03 introduceren	V	alle opgaven m.f.03 en m.f.04
4	1.2 theorie A 2 20, 21 w.o	V R O	 modelleren	m.f.03 en m.f.04 bespreken leerstofoverzicht w.o. introduceren	O & I	2 alle opgaven w.o
5	1.2 theorie B 22, 25 w.d.01, w.d.02	I		w.o. bespreken	V	alle opgaven w.d.01 en w.d.02
6	1.2 theorie C 28 t.d	V R O & I	 domein & bereik	w.d.01, w.d.02 bespreken leerstofoverzicht t.d.01 en t.d.02	V	alle opgaven t.d.03 t/m t.d.07
7	1.3 theorie A 30 t/m 33 w.a.01, b.i, b.v.01, b.v. 02	V R O & I	 vergelijkingen	t.d.03 t/m t.d.07 bespreken leerstofoverzicht w.a.01	V	alle opgaven b.i, b.v.01, b.v.02

8	1.3 theorie A 34 t/m 36 w.a.02, w.a.04 t/m w.a.06	V		b.v.01, b.v.02 bespreken, w.a.02 introduceren	V	alle opgaven w.a.02, w.a.04 t/m w.a.06
9	1.3 theorie B 38 t/m 41 b.v.03, b.v. 04	V R O & I	 ongelijkheden	w.a.02, w.a.04 t/m w.a.06 bespreken leerstofoverzicht	V	alle opgaven b.v.03, b.v.04
10	1.4 theorie A & B 45, 46, 49, 50 b.ob.02 t/m b.ob.04, b.b	V R O I	 toepassingen	b.v.03, b.v.04 bespreken leerstofoverzicht m.b.v. leerstof overzicht b.ob.02 t/m b.ob.04	V	alle opgaven b.b
11	1.4 theorie B & C 52, 55, 56 b.oa, b.ba, b.p	V		b.b bespreken	V	alle opgaven b.oa, b.ba,
12	herhaling 1, 3, 5, 6, 10 (blz. 173)	V R afslui-ting	 voorbereiding proefwerk	b.oa, b.ba, bp bespreken leerstofoverzicht kernopgaven hoofdstuk	af-sluit -ing	alle opgaven

In de handleiding werden de verschillende afkortingen toegelicht. De eerste letter stond steeds voor de naam van de applicatie:
m = mobieltjes
w = windmolen
t = tsunami
b = benefietconcert
Per les werd ook aangegeven welke varianten mogelijk waren, bijvoorbeeld voor M-klassen.

B.8 Eindtoets

Hieronder is het in het grootschalig praktijkonderzoek gehanteerde observatieschema gegeven.

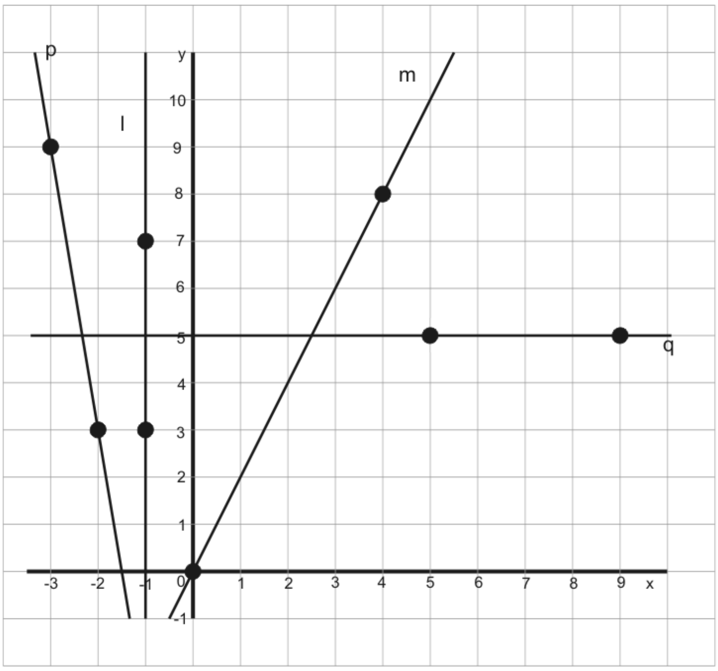
PROEFWERK 4 vwo wiskunde hoofdstuk 1

- *dit werk bestaat uit 6 opgaven waarvan opgave 6 op dit proefwerk gemaakt dient te worden*
- *je krijgt 45 minuten de tijd; 6 kantjes tekst lijkt veel, maar sommige opgaven kunnen snel gemaakt worden*
- ***werk vooral netjes en zorgvuldig***
- *vermeld (waar dat nodig is voor het antwoord) hoe je grafische rekenmachine is ingesteld*
- *geef niet alleen antwoorden, maar motiveer ze ook!*

NAAM: ____

Opgave 1

a) Stel voor elk van de vier lijnen (p, l, m en q) in de onderstaande figuur een vergelijking op.



b) Stel de vergelijking op van de lijn n die evenwijdig is aan m en door het punt (5,-3) gaat.

De lijn k snijdt de y-as in het punt (0,3). Voor $x > 0$ geldt dat de lijn k onder de lijn q ligt.

c) Welke waarden kan de richtingscoëfficiënt van de lijn k aannemen, zodat aan deze twee voorwaarden wordt voldaan?

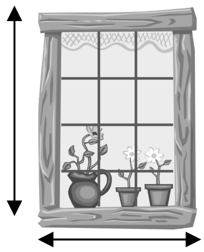
Opgave 2

Los de volgende vergelijkingen algebraïsch op:

a) $2x - 6 = 17$
b) $(x - 1)(x + 3) = 12$
c) $2x^2 + 9 = 1$
d) $(-5x + 8)^2 = 25$

Z.O.Z.

Opgave 3



Sylvia wil tijdens de kerstdagen het raam van haar woonkamer versieren. Zij heeft in de winkel een rol plakband van 5 m gekocht.
Sylvia plakt 3 banen horizontaal en 2 banen vertikaal op het raam (zie het plaatje hiernaast). Ze doet dit zo dat alle rechthoekjes die ontstaan even groot zijn. Voor de volgende vragen kun je de breedte van het plakband verwaarlozen én ervan uitgaan dat de 5 meter plakband volledig gebruikt wordt.

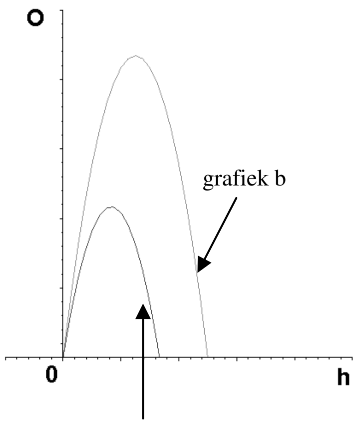
a) Toon aan dat de formule voor de oppervlakte van een rechthoekje, als functie van de hoogte van het raam, gelijk is aan:

$$O_{rechthoekje} = -\frac{1}{18}h^2 + \frac{5}{36}h$$

b) Bereken de afmetingen van de rechthoekjes waarbij de oppervlakte maximaal is.

Op een tweede raam met andere afmetingen plakt Sylvia een kleiner aantal banen. Ook voor dit raam heeft Sylvia een rol van 5 m plakband, die ze geheel gebruikt. In de figuur hiernaast is de grafiek van de oppervlakte (als functie van de hoogte) van beide ramen getekend.

c) Welke grafiek is de grafiek van het tweede raam? Schrijf ook op waarom.



Opgave 4

Los de volgende ongelijkheid op met behulp van een grafiek. Rond in het antwoord af op 2 decimalen:

$x^2 - 5x > 8$

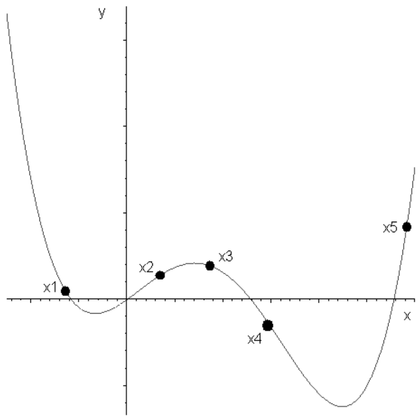
Opgave 5

Gegeven is een vierdegraads functie f met bijbehorende grafiek zoals in de figuur hieronder. In de grafiek van f zijn vijf punten aangegeven. Van elk punt wordt de x-coördinaat genoemd.
Er geldt nu het volgende:

Als $D_f = [x_1, x_2]$ dan $B_f = [p,q]$
Als $D_f = [x_2, x_3]$ dan $B_f = [q,r]$
Als $D_f = [x_4, x_5]$ dan $B_f = [s,t]$

Geef nu bij de volgende domeinen het bijbehorende bereik.
Gebruik daarbij indien mogelijk p, q, r, s, t, ← en →.

a) $D_f = \langle x_1, x_2 \rangle$
b) $D_f = [x_1, x_5]$
c) $D_f = \langle \leftarrow, x_3]$



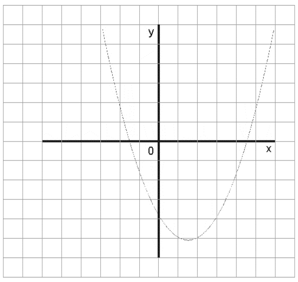
Opgave 6

Deze opgave bestaat uit de vragen a t/m e. Eerst volgt hieronder een voorbeeld. Dit voorbeeld gaat over “parabolen”. Daarna volgen de opgaven die gaan over de formule y = ax + b.

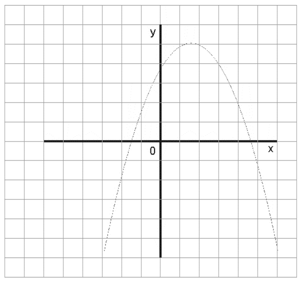
Voorbeeld

Gegeven: twee parabolen; $y = ax^2 + bx + c$.

Beginsituatie



Eindsituatie



Opgave

Zet een kruisje onder de bewering die waar is. Als meerdere beweringen waar zijn, zet je ook meerdere kruisjes. De bewering heeft betrekking op de a binnen de formule $y = ax^2 + bx + c$.
Vergelijk a in de eindsituatie met a in de beginsituatie en vergelijk de x-coördinaat van de top in de eindsituatie met de x-coördinaat van de top in de beginsituatie.

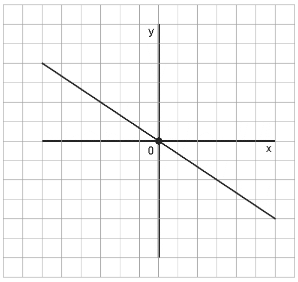
	wordt 0	blijft 0	blijft gelijk	is groter	is kleiner	het teken verandert
a					X	X
x-coördinaat van de top			X			

De opgaven a tot en met e staan op de volgende pagina’s.

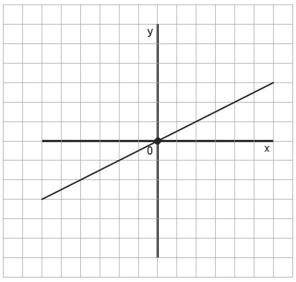
Opgave 6a

Gegeven: y = ax + b

Beginsituatie



Eindsituatie



Zet een kruisje onder de bewering die waar is. Als meerdere beweringen waar zijn, zet je ook meerdere kruisjes. De bewering heeft betrekking op de a en b binnen de formule y = ax + b.

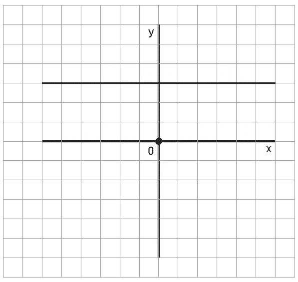
Vergelijk a in de eindsituatie met a in de beginsituatie en vergelijk b in de eindsituatie met b in de beginsituatie.

	wordt 0	blijft 0	blijft gelijk	is groter	is kleiner	het teken verandert
a						
b						

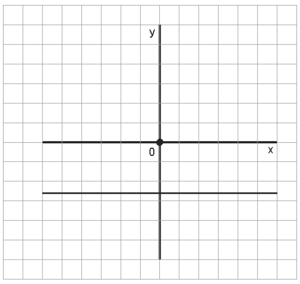
Opgave 6b

Gegeven: y = ax + b

Beginsituatie



Eindsituatie



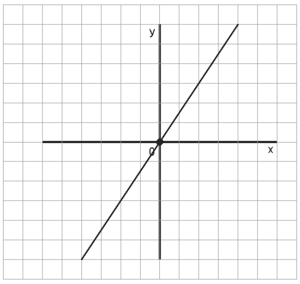
Zet een kruisje onder de bewering die waar is. Als meerdere beweringen waar zijn, zet je ook meerdere kruisjes. De bewering heeft betrekking op de a en b binnen de formule y = ax + b.
Vergelijk a in de eindsituatie met a in de beginsituatie en vergelijk b in de eindsituatie met b in de beginsituatie.

	wordt 0	blijft 0	blijft gelijk	is groter	is kleiner	het teken verandert
a						
b						

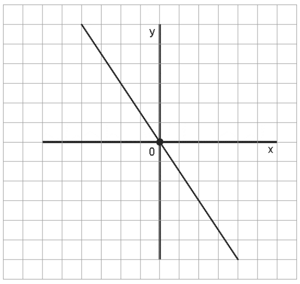
Opgave 6c

Gegeven: y = ax + b

Beginsituatie



Eindsituatie



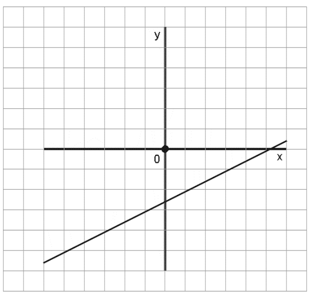
Zet een kruisje onder de bewering die waar is. Als meerdere beweringen waar zijn, zet je ook meerdere kruisjes. De bewering heeft betrekking op de a en b binnen de formule y = ax + b.
Vergelijk a in de eindsituatie met a in de beginsituatie en vergelijk b in de eindsituatie met b in de beginsituatie

	wordt 0	blijft 0	blijft gelijk	is groter	is kleiner	het teken verandert
a						
b						

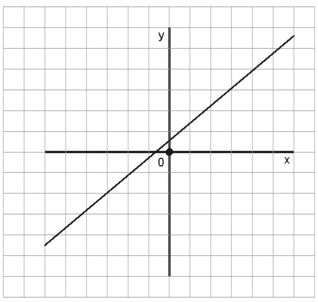
Opgave 6d

Gegeven: y = ax + b

Beginsituatie



Eindsituatie



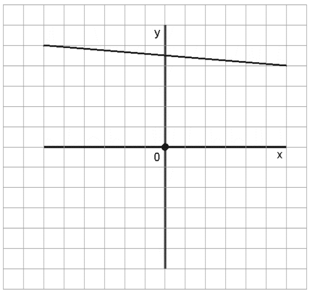
Zet een kruisje onder de bewering die waar is. Als meerdere beweringen waar zijn, zet je ook meerdere kruisjes. De bewering heeft betrekking op de a en b binnen de formule y = ax + b.
Vergelijk a in de eindsituatie met a in de beginsituatie en vergelijk b in de eindsituatie met b in de beginsituatie

	wordt 0	blijft 0	blijft gelijk	is groter	is kleiner	het teken verandert
a						
b						

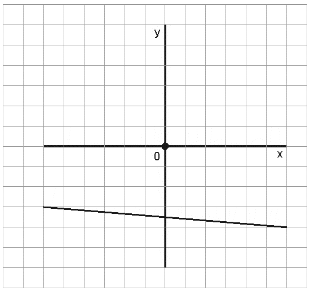
Opgave 6e

Gegeven: y = ax + b

Beginsituatie



Eindsituatie



Zet een kruisje onder de bewering die waar is. Als meerdere beweringen waar zijn, zet je ook meerdere kruisjes. De bewering heeft betrekking op de a en b binnen de formule y = ax + b.
Vergelijk a in de eindsituatie met a in de beginsituatie en vergelijk b in de eindsituatie met b in de beginsituatie

	wordt 0	blijft 0	blijft gelijk	is groter	is kleiner	het teken verandert
a						
b						

EINDE   PROEFWERK

B.9 Scoringsvoorschrift eindtoets

Hieronder is het scoringsvoorschrift voor de eindtoets gegeven.

Opgave 1
10 + 3 + 2

a) 2 x 2 + 2 x 3
verkeerde notatie: consequent dan totaal -1

l: x = -1 (2), alleen verticale lijn noemen (1)

q: y = 5 (2), alleen horizontale lijn noemen (1)

m: twee punten (0,0) en (4,8)

$a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{8-0}{4-0} = 2$ of $a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{0-8}{0-4} = 2$ (1)

b = 0 (1)
m: y = 2 x (1)

p: twee punten (-3,9) en (-2,3)

$a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{9-3}{-3--2} = -6$ of $a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{3-9}{-2--3} = -6$ (1)

$9 = -6 \cdot -3 + b$ of $3 = -6 \cdot -2 + b$
$9 = 18 + b$ $\quad$ $3 = 12 + b$
$b = -9$ $\quad$ $b = -9$ (1)
p: y = -6x - 9 (1)

b) 3
door rekenen met fouten, dus als a fout is, doorrekenen bij b met foute a enz.

$a_n = a_m = 2$ (1)
$-3 = 2 \cdot 5 + b$
$-3 = 10 + b$
$b = -13$ (1)
n: y=2x – 13 (1)

c) 2

$a_k \leq 0$ (2)

indien slechts 1 en dus niet alle mogelijke oplossingen wordt gegeven (1)
antwoord $a_k < 0$ dan (1,5)
antwoord $a_k <$ negatief getal (1)

Opgave 2
2 x 2 + 2 x 3

a) $2x = 23$ (1)
$x = 11\frac{1}{2}$ (1)

b) $x^2 + 3x - x - 3 = 12$ (1)
$x^2 + 2x - 15 = 0$
$(x - 3)(x + 5) = 0$ (1) of $D = 4 + 60 = 64$
$x = 3 \vee x = -5$ (1) $x = \frac{-2 \pm 8}{2}$ (1)
$x = 3 \vee x = -5$ (1)

c) $2x^2 = -8$ (1)
heeft geen oplossing (1) of geen uitkomst (1)

d) $-5x + 8 = 5 \vee -5x + 8 = -5$ (1) indien 1 van beide (0,5)
$-5x = -3 \quad \vee -5x = -13$ (1) indien 1 van beide (0,5)
$x = 3/5 \quad \vee x = 13/5$ (1) indien 1 van beide (0,5)

of

$25x^2 - 80x + 64 = 25$ (1)
$x^2 - 16/5x + 39/25 = 0$ of $25x^2 - 80x + 39 = 0$ (1)
$(x - 3/5)(x - 13/5) = 0$ of abc-formule
$x = 3/5 \quad \vee x = 13/5$ (1) indien 1 van beide (0,5), indien afgerond (0,5)

notatiefout – 0,5

Opgave 3
5 + 4 + 3

a) O_rechthoekje = O_raam / ((3 + 1) · (2 + 1)) = b · h / 12 (1)
$3 \cdot b + 2 \cdot h = 5$ (1)

$$b = \frac{5 - 2h}{3} \quad (1)$$

$$O_{rechthoek} = \frac{5h - 2h^2}{3 \cdot 12} \quad (1)$$

$$O_{rechthoek} = -\frac{1}{18}h^2 + \frac{5}{36}h \quad (1)$$

b) Max opzoeken met GR; stappen met GR (1)

$h_{\max} = \frac{5}{4}$ m (1)

$b_{\max} = \dfrac{5 - 2 \cdot \frac{5}{4}}{3}$ (1) of $b_{\max} = \dfrac{O_{\max} \cdot 12}{h_{\max}}$ (1)

$b_{\max} = \frac{5}{6}$ m (1)

afmeting: 5/16 m bij 5/18 m

of

helft plakband gaat over hoogte, helft over breedte. (1)
Dus 2,5 in totaal over hoogte. (1)
h_{max} = 2,5 / 2 = 1,25 m (1)
b_{max} = 2,5 / 3 = 5/6 m (1)

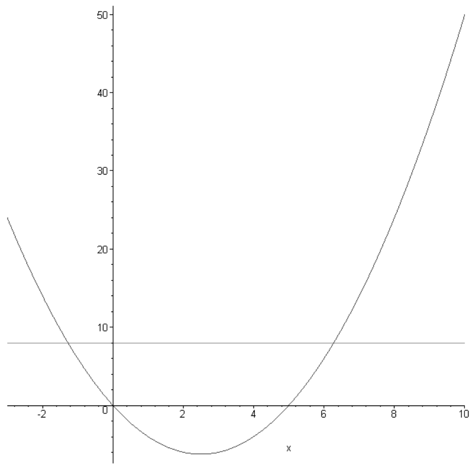
afmeting: 5/16 m bij 5/18 m

c) grafiek b (1)
Er moeten minder banen gemaakt worden. (1) Er blijft dan meer lint over voor b. De oppervlakte neemt toe. (1)

Opgave 4
4

intersect met GR
x = 2,5 + 0,5√57 of x = 2,5 - 0,5√57

grafiek schets (1)



intersect geeft x ≈ 6,27 en x ≈ -1,27 (1) als = i.p.v. ≈ wordt gebruikt (0,5)

aflezen geeft x < -1,27 V x > 6,27 (2); notatie fout (1)

Opgave 5
3 x 4

a)	B_f = [p,q>	[(1), p (1), q (1), > (1)
b)	B_f = [s,t]	[(1), s (1), t (1),] (1)
c)	B_f = [p,→>	[(1), p (1), → (1), > (1)

Opgave 6
10
Elk goed kruisje +1 of + 0,5 (bij meer dan 1 kruisje), elk fout kruisje -1 of -0,5 (bij meer dan 1 kruisje), nooit < 0.

a)	a 4 en 6	(0,5) en (0,5)
	b 2 en/of 3	(1); (0,5) als alleen 3
b)	a 2 en/of 3	(1); (0,5) als alleen 3
	b 5 en 6	(0,5) en (0,5)
c)	a 5 en 6	(0,5) en (0,5)
	b 2 en/of 3	(1); (0,5) als alleen 3
d)	a 4	(1)
	b 4 en 6	(0,5) en (0,5)
e)	a 3	(1)
	b 5 en 6	(0,5) en (0,5)

B.10 Verwachtingen bij de opgaven in de toets in het grootschalig praktijkonderzoek

We hebben geen eenduidige verwachtingen wat er uit de toets aan verschillen tussen de groepen naar voren zouden moeten komen. Daarvoor hebben we te beperkt inzicht in het leren van de leerlingen en de invloed daarop van de aangeboden instructie. Bovendien is er de afweging in tijd tussen inoefenen en inzicht (zie onder andere deel 1, hoofdstuk 3). Het aanleren van technieken levert hogere resultaten op, inzicht levert hogere resultaten op (op de langere termijn). Er is slechts beperkt tijd beschikbaar. Tijd die aan het verwerven van inzicht besteed wordt, gaat af van de tijd die besteed wordt aan het leren van technieken en automatiseren. Hoe deze twee zaken tegen elkaar opwegen is onbekend en we weten niet hoe de balans zal doorslaan naar hogere of lagere resultaten. We hopen dan ook aan de hand van de resultaten op de toetsen, hier een iets duidelijker beeld van te krijgen.

Opgave 1a

Door een meer gestructureerde inzet van het programma, onder andere door meer nadruk op het boek te leggen en ruimte in de lessen in te bouwen voor introductie van een onderwerp, hoopten we dat verkeerde notaties minder vaak voor zouden komen. Met andere woorden we verwachtten dat door onze aanpassingen aan de opzet, de communicatie- en presentatievaardigheden van de leerlingen in de experimentele groep beter zouden zijn ten opzichte van de resultaten in het derde vooronderzoek. We hoopten dat deze vaardigheden van vergelijkbaar niveau als dat van de controle groep zouden zijn.

Door de grotere nadruk in het programma op de grafische weergave zouden de experimentele leerlingen een voorsprong op de controle leerlingen kunnen hebben, wat deze opgave betreft. Aan de andere kant zou het kunnen zijn dat de leerlingen uit de controle groep technieken hebben geleerd om dit soort opgaven op te lossen. Er is immers ook een vergelijkbare opdracht in het boek. Omdat op korte termijn technieken tot betere resultaten leiden dan inzicht (zie deel 1, hoofdstuk 3), zouden de controle leerlingen het beter kunnen doen. Tot slot kunnen we natuurlijk niet uitsluiten dat ook de SimQuest-leerlingen begripsloze technieken hebben geleerd. De resultaten, gemaakte fouten en ontbrekende evaluerende opmerkingen van beide groepen zouden in dat geval gelijk moeten zijn.

Opgave 1b

De verwachtingen van deze opgave zijn gelijk als bij de vergelijkbare toetsopgaven in het derde vooronderzoek (zie deel 2, hoofdstuk 4 en bijlage B.6). Deze grafiek is niet getekend waardoor het eventuele grafische voordeel van de SimQuest-leerlingen uit opgave 1a verdwenen is. De opgave is een opgave zoals die in het boek voorkomt. Het is een opgave die heel goed via een standaard oplossing aangepakt kan worden. Onze verwachting is dat de controle groep beter zal scoren.

Opgave 1c

De verwachtingen van deze opgave zijn gelijk als bij de vergelijkbare toetsopgave in het derde vooronderzoek (zie deel 2, hoofdstuk 4 en bijlage B.6). We krijgen nu voor het eerst ook resultaten van deze opgave van leerlingen die niet met het programma hebben gewerkt. We verwachten dat in de beschrijving van het waarom de SimQuest-leerlingen beter zullen scoren dan controle leerlingen, tenminste als in hun klas regelmatig tijd is genomen voor het beargumenteren van het hoe en waarom. Deze leerlingen zouden vaardigheden in het beredeneren hebben moeten verwerven wat betreft de loop van de grafiek in verband met een veranderde situatie en in het expliciteren hiervan.

Opgave 2

Dit soort opgaven krijgen leerlingen al meerdere jaren en in feite gaat het om herhaling van de stof. Het draait hier in feite om automatiseren. De verwachting is dan ook dat controle leerlingen het op deze opgave beter zullen doen. Bij hen hoefde immers de beschikbare tijd over minder onderdelen verdeeld te worden, dus is er waarschijnlijk meer tijd besteed aan het inoefenen.

Opgave 3a

De verwachtingen van deze opgave zijn gelijk als bij de vergelijkbare toetsopgaven in het derde vooronderzoek (zie deel 2, hoofdstuk 4 en bijlage B.6).

Leerlingen hebben in het programma uitgebreid de gelegenheid gehad om zich een beeld te vormen van de verbanden tussen de concrete situatie, de bijbehorende formule en grafiek. We hopen dat dit heeft bijgedragen aan meer inzicht in het afleiden van formules en het vinden van optima. Meer inzicht zou moeten leiden tot een grotere transfer (zie deel 1, hoofdstuk 3). Op basis van dit gegeven kunnen we verwachten dat de SimQuest-leerlingen beter op deze toetsopgave zullen scoren. Aan de andere kant is er in de lessen meer tijd voor één onderwerp geweest. De leerlingen hebben daardoor minder verschillende voorbeelden gezien. Dit is juist weer nadelig (zie deel 1, hoofdstuk 3). Het kan daardoor zijn dat de prestaties van de leerlingen gelijk of zelfs slechter dan de leerlingen uit de controle klassen zijn. Omdat technieken voor dit soort opgaven minder beschikbaar zijn, hebben leerlingen veel wiskundig inzicht nodig voor het kunnen beantwoorden van de opgave. Daarom verwachten we dat deze opgave erg moeilijk wordt gevonden door leerlingen, ook op basis van onze bevindingen in het derde vooronderzoek, en er dus relatief weinig punten gehaald zullen worden.

Opgave 3b

De verwachtingen van deze opgave zijn gelijk als bij de vergelijkbare toetsopgaven in het derde vooronderzoek (zie deel 2, hoofdstuk 4 en bijlage B.6).

Voor het komen tot een antwoord is bij deze opgave het kunnen gebruiken van de GR belangrijk. Daar SimQuest-simulaties vaak de taak van de GR hebben overgenomen, hebben de SimQuest-leerlingen minder met dit apparaat gewerkt. Dit zou een nadelige invloed op de score van de SimQuest-leerlingen op deze toetsopgave kunnen hebben. Om dit nadelige effect gedeeltelijk op te heffen, vragen we leerlingen in het programma enkele uitkomsten ook te berekenen met hun GR en die te vergelijken met de uitkomsten die de simulatie geeft.

Opgave 3c

De verwachtingen van deze opgave zijn gelijk als bij de vergelijkbare toetsopgaven in het derde vooronderzoek (zie deel 2, hoofdstuk 4 en bijlage B.6). Om de in deze paragraaf genoemde redenen verwachten we dat de SimQuest-leerlingen beter zullen scoren.

Opgave 4

Om dezelfde redenen als in opgave 3b, namelijk minder oefening met de GR, verwachten we van deze opgave dat de leerlingen uit de controleklassen beter zullen scoren. Bovendien is dit een gangbare boekopgave net als opgave 2, die erg goed te maken is wanneer men de technieken goed onder de knie heeft.

Opgave 5

We hebben geprobeerd deze opgave dusdanig vorm te geven, dat technieken met de GR niet langer inzetbaar zijn. We hoopten op deze manier vooral inzicht te toetsen. Meer inzicht zou onder andere moeten blijken uit het feit dat leerlingen niet alleen naar de waarden van de functie bij de grenzen van het bereik kijken, maar ook naar de loop van de grafiek. We hopen dat leerlingen er alert op zijn dat er tussen de grenzen ook waarden kunnen voorkomen waarbij de functiewaarden hoger of lager liggen als de functiewaarden bij de grenzen van het domein.

Door de abstracte formulering is het voor leerlingen nog een hele kunst om te bedenken, welke waarden dit dan zijn. Stap één is dus om niet klakkeloos de functiewaarden behorend bij de grenzen van het domein op te schrijven, stap twee is om vervolgens te weten hoe dan wel dit probleem aan te pakken en in staat te zijn om uit de abstracte omschrijving wat de naam van de functiewaarden van de minima en het maximum te kunnen bepalen. Niet klakkeloos de gebruikelijke fout maken zou op deze manier tot een lagere score kunnen leiden. Bij de opgaven a en b wordt namelijk een deel van het antwoord wel bepaald door de grenzen van het domein. Iemand die weet dat niet alleen de grenzen van het domein het antwoord bepalen, in feite dus verder denkt, maar daardoor ook ten onrechte een functiewaarde van de grens vervangt door een andere waarde, heeft uiteindelijk minder punten. Meer inzicht leidt dan tot minder punten. Door de abstracte formulering verwachten we dat minder sterke wiskunde leerlingen (vaak de M-leerlingen) veel moeite met deze opgaven zullen hebben.

Opgave 6

We constateerden in het derde vooronderzoek dat er onverwachte antwoorden werden gegeven, die duidden op gebrek aan kennis. Dit ondanks dat de leerlingen wel opdrachten over deze kennis in het programma hadden gemaakt. We hoopten dat met de veranderingen met betrekking tot de inzet in de lessen, dit soort fouten niet of in ieder geval nog slechts heel sporadisch voorkomen. Door in de klassikale les getrokken conclusies explicieter naar voren te brengen en te bespreken, hoopten we dat dit tot beter beheerste kennis zou leiden. Met als gevolg dat dit soort opdrachten nu wel door de meeste SimQuest-leerlingen juist beantwoord zouden worden.

Ook bij deze opgave verwachtten we dat SimQuest-leerlingen beter zouden moeten scoren, omdat zij zoals beschreven in deel 2, hoofdstukken 4.2, meer naar veranderingen hebben gekeken ten opzichte van de controle leerlingen.

Samenvatting

Wanneer we het bovenstaande samenvatten dan komen we tot de volgende tabel (tabel B.10.1) wat betreft onze verwachtingen.

Tabel B.10.1 *Samenvatting verwachtingen toetsvragen*

toetsopdracht	voorkeur voor controle (c) groep, experimentele (e) groep of neutraal (-)
1a	-
1b	c
1c	e
2	c
3a	-
3b	-
3c	e
4	c
5	e
6	e
totaal eindtoets	?

B.11 Observatieschema voor het grootschalig praktijkonderzoek

Hieronder is het in het grootschalig praktijkonderzoek gehanteerde observatieschema gegeven.

Protocol bijwonen wiskunde les

Datum: ……………………………………………………….

School: ……………………………………………………….

Klas: ……………………………………………………….

Observator: ……………………………………………………….

Starttijd lesuur: ……………………………………………………….

Eindtijd lesuur: ……………………………………………………….

Onderdelen behandeld uit het boek:

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

Onderdelen behandeld uit SimQuest:

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

Vink in het volgende rijtje de onderdelen aan die voorkomen en schrijf erachter hoelang dit duurde:

☐ bespreken huiswerk opgaven boek: …………………… minuten

☐ bespreken huiswerk opgaven SimQuest: …………………… minuten

☐ klassikale uitleg over nieuwe stof en/of het klassikaal maken van opgaven:

…………………… minuten

☐ uitbreiden van het leerstofoverzicht: …………………… minuten

☐ zelfstandig werken door leerlingen: …………………… minuten

☐ anders namelijk, …………………………………………………….……………...

……………………………………….…………………………………………...

……….…………………………………………………….………………………..

Indien onderdelen uit SimQuest worden besproken/gebruikt, vink dan hieronder hoe dit gebeurt:

☐ gebruikt laptop (of andere vorm van computer) en beamer

☐ de docent heeft sheets of kopieën gemaakt waarmee hij SimQuest bespreekt

☐ de docent tekent op het bord wat er in SimQuest te zien was

☐ de docent herhaalt in woorden wat er in SimQuest te zien was

☐ anders namelijk, …………………………………………………….……………...

……………………………………….…………………………………………...

……….…………………………………………………….………………………..

Neem op de achterkant (of een ander blaadje) indien van toepassing het leerstofoverzicht over.

B.12 Interviewschema van het grootschalig praktijkonderzoek

In tabel B.12.1 is het in het grootschalig praktijkonderzoek gehanteerde interviewschema gegeven.

Tabel B.12.1 *Het gehanteerde interviewschema*

	Leerkracht	Leerling	Materiaal
Voor-bereiding	1. Hoe heeft u zich voorbereid op de les? 2. Wat was er anders dan normaal? Wat zijn hierbij uw positieve en negatieve ervaringen? 3. Is uw voorbereiding in de loop van de tijd veranderd?	1. Wat werd er van de leerlingen verwacht aan voorbereiding? 2. Wat was er anders dan normaal? Wat zijn hierbij uw positieve en negatieve ervaringen? 3. Is de voorbereiding van de leerlingen veranderd in de loop van de tijd?	1. Wat waren de positieve punten en wat waren de negatieve punten van het materiaal voor de voorbereiding? 2. Is er in de loop van de tijd iets veranderd aan de bruikbaarheid van het materiaal?
Doceren	1. Hoe zag het doceren (klassikale gedeelte) eruit? 2. Wat was er anders dan normaal? Wat zijn hierbij uw positieve en negatieve ervaringen? 3. Is het doceren in de loop van de tijd veranderd?	1. Wat verwachtte u van de leerlingen tijdens het klassikale lesdeel? 2. Wat was er anders dan normaal? Wat zijn hierbij uw positieve en negatieve ervaringen? 3. Is de deelname van de leerlingen veranderd in de loop van de tijd?	1. Wat waren de positieve punten en wat waren de negatieve punten van het materiaal voor het doceren? 2. Is er in de loop van de tijd iets veranderd aan de bruikbaarheid van het materiaal?
Bege-leiden	1. Hoe zag het begeleiden (zelfstandig werken) eruit? 2. Wat was er anders dan normaal? Wat zijn hierbij uw positieve en negatieve ervaringen? 3. Is het begeleiden in de loop van de tijd veranderd?	1. Wat verwachtte u van de leerlingen tijdens het klassikale lesdeel? 2. Wat was er anders dan normaal? Wat zijn hierbij uw positieve en negatieve ervaringen? 3. Is de deelname van de leerlingen veranderd in de loop van de tijd?	1. Wat waren de positieve punten en wat waren de negatieve punten van het materiaal voor het begeleiden? 2. Is er in de loop van de tijd iets veranderd aan de bruikbaarheid van het materiaal?